Über Weyl—Otsukische Räume

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

Einleitung. Die Otsukischen allgemeinen Übertragungstheorien[1] sind dadurch charakterisiert, daß die kovariante Ableitung der Tensoren für die kovarianten bzw. kontravarianten Indizes mit verschiedenen Übertragungsparametern $''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ bzw. $'\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ festgelegt ist, die aber nicht ganz beliebig vorgegeben werden können, d. h. sie bestimmen nicht die unabhängigen Grundgrößen des Raumes, sondern sind durch die Relation

$$\partial_k P_j^i + ''\Gamma_{r\ k}^{\ i} P_j^r - '\Gamma_{j\ k}^{\ s} P_s^i = 0 \tag{0.1}$$

miteinander verknüpft. Der Tensor $P_j^i(x)$ in (0.1) soll immer einen eindeutig bestimmten inversen Tensor $Q_k^j(x)$ haben, d. h. es ist $\mathrm{Det}\,(P_j^i) \neq 0$ und $P_j^i Q_k^j = \delta_k^i$. Als Grundgrößen können also z. B. $''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ und P_j^i gewählt werden, die Überstragungsparameter $'\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ sind dann durch (0.1) eindeutig bestimmt.

In unserem Aufsatz [1] begründeten wir eine solche Übertragung, in der $''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ aus einem metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ gebildet wurde, der rekurrente kovariante Ableitung hatte. Diejenige Otsukischen Räume, in denen die Übertragun gdurch g_{ij}, P_j^i und durch den Rekurrenzvektor γ_k definiert ist, haben wir Weyl—Otsukische W—O_n-Räume genannt. Diese sind also durch $\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$ charakterisiert.

Im folgenden wollen wir das Problem untersuchen, daß unter welchen Bedingungen die kovariante Ableitung des kontravarianten metrischen Grundtensors g^{ij} in einem W—O_n-Raum auch rekurrent ist. Bekanntlich ist in den gewöhnlichen Weylschen Räumen $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$, d. h. der Tensor g^{ij} ist in diesen Räumen immer rekurrent, während in den W—O_n-Räumen das nur unter weiteren Bedingungen erfüllt ist.

Das Kronecker-δ_k^i kann als der gemischte metrische Fundamentaltensor betrachtet werden. Es ist in den W—O_n-Räumen im allgemeinen $\nabla_k \delta_j^i \neq 0$. Im Paragraphen 3 werden wir auch diejenigen Bedingungen bestimmen, die die Gültigkeit der Relation $\nabla_k \delta_j^i = \psi_k \delta_j^i$ sichern.

Dementsprechend stellen wir im § 1. die wichtigsten Relationen der W—O_n-Räume zusammen; dann, in §§ 2—3, bestimmen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Rekurrenz von g^{ij} und δ_j^i. Die Integrabilitätsbedingungen von P_j^i sichern, daß bei gegebenen $''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ die P_j^i so bestimmt werden können, daß die kovariante Ableitung von δ_j^i rekurrent sei.

---

[1] Vgl. [2]. Das Schriftenverzeichnis befindet sich am Ende unseres Artikels.

Endlich werden wir im § 4., in den Schlußbemerkungen beweisen, daß die Summe der Rekurrenzvektoren von g_{ij} und g^{ij} gleich $2\psi_m$ ist, wenn ψ_m den Rekurrenzvektor von δ^i_j bedeutet.

§ 1. Grundformeln der W—O_n**-Räume.** Ein Otsukischer O_n-Raum ist eine Punktmannigfaltigkeit in der die geometrische Struktur durch ein invariantes Differential von der Form (vgl. [1], (1.1)—(1.5), oder [2], (4.9)—(4.10)):

$$DV^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} := P^{i_1}_{r_1} \dots P^{i_p}_{r_p} V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q | k} \, dx^k P^{s_1}_{j_1} \dots P^{s_q}_{j_q}, \tag{1.1}$$

$$V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q | k} := \partial_k V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} + \sum_{t=1}^{p} {'\Gamma_h}^{r_t}{}_k V^{r_1 \dots r_{t-1} h r_{t+1} \dots r_p}_{s_1 s_2 \dots \dots \dots \dots s_q} - \sum_{t=1}^{q} {''\Gamma_{s_t}}^{h}{}_k V^{r_1 r_2 \dots \dots \dots \dots r_p}_{s_1 \dots s_{t-1} h s_{t+1} \dots s_q} \tag{1.1a}$$

festgelegt ist, wo $V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ einen beliebigen Tensor, ${'\Gamma_j}^i{}_k$ und ${''\Gamma_j}^i{}_k$ Übertragungsparameter bzw. P^i_j einen angegebenen, die geometrische Struktur bestimmenden Tensor bedeutet. Zwischen die Grundgrößen besteht die Relation (0.1).

Die fundamentale kovariante Ableitung von (1.1), ist nach (1.1a)

$$\nabla_k V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} := P^{i_1}_{r_1} \dots P^{i_p}_{r_p} V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q | k} P^{s_1}_{j_1} \dots P^{s_q}_{j_q}. \tag{1.2}$$

Der O_n-Raum wird ein Weyl—Otsukischer W—O_n-Raum, falls die Übertragungsparameter ${''\Gamma_j}^i{}_k$ von einem metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ — der in i, j selbstverständlich symmetrisch sein muß — abgeleitet sind, so, daß

$$\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij} \tag{1.3}$$

gültig sei (vgl. [1], (1.7)). Die Grundgrößen eines W—O_n-Raumes sind hiernach *der metrische Grundtensor* $g_{ij}(x)$, *der Rekurrenzvektor* $\gamma_k(x)$ und *der Tensor* $P^i_j(x)$.

Bezüglich $P^i_j(x)$ nehmen wir an, daß die Symmetrieforderung

$$P_{ij} := g_{ir} P^r_j = g_{jr} P^r_i = P_{ji} \tag{1.4}$$

gültig ist. Aus dieser Bedingung folgt auch, daß die kovariante Form des inversen Tensors von P^i_j, d.h. Q_{ij} auch symmetrisch ist. Es gilt nämlich nach (1.4): $g_{ik} = P_{kj} Q^j_i$ und somit wird

$$Q_{im} = g_{ik} Q^k_m = P_{kj} Q^j_i Q^k_m = P_{kj} Q^k_m Q^j_i = g_{mj} Q^j_i = Q_{mi}. \tag{1.4a}$$

Die Überstragungsparameter ${''\Gamma_j}^i{}_k$ können in den W—O_n-Räumen aus (1.3) berechnet werden. Im Hinblick auf (1.1a) und (1.2) wird (vgl. [1], Formel (2.3))

$${''\Gamma_i}^j{}_k = \left\{{}_i{}^j{}_k\right\} - \frac{1}{2}(\gamma_k m^j_i + \gamma_i m^j_k - \gamma^j m_{ik}), \tag{1.5}$$

wo $\left\{{}_i{}^j{}_k\right\}$ die aus g_{ij} gebildeten Christoffelklammern zweiter Art bedeuten, ferner im Hinblick auf (1.4a)

$$m_{ik} := g_{ab} Q^a_i Q^b_k \equiv g_{ai} Q^a_b Q^b_k, \quad m^i_k = Q^i_a Q^a_k. \tag{1.6}$$

Die Übertragungsparameter ${'\Gamma_j}^h{}_k$ können somit aus (0.1) nach einer Kontraktion mit Q^h_i bestimmt werden.

§ 3. Rekurrenz von g^{ij}. Vor allem berechnen wir $\nabla_k g^{ij}$. Auf Grund von (1.2) und (1.1a) wird:

$$\nabla_k g^{ij} = P^i_a P^j_b(\partial_k g^{ab} + g^{at}\,'\Gamma_t{}^b{}_k + g^{tb}\,'\Gamma_t{}^a{}_k). \tag{2.1}$$

Auf Grund von $g_{tr}g^{rb}=\delta^b_t$ wird nach partieller Ableitung nach x^k und Überschiebung mit g^{at}

$$\partial_k g^{ab} = -g^{at} g^{rb}\,\partial_k g_{tr}. \tag{2.2}$$

Aus (1.3) bekommt man (vgl. [1], (2.2a)) im Hinblick auf (1.6)

$$\partial_k g_{tr} = g_{ts}\,''\Gamma_r{}^s{}_k + g_{rs}\,''\Gamma_t{}^s{}_k + \gamma_k m_{tr}. \tag{2.3}$$

Aus (2.2) wird somit

$$\partial_k g^{ab} = -g^{tb}\,''\Gamma_t{}^a{}_k - g^{at}\,''\Gamma_t{}^b{}_k - \gamma_k m^{ab},$$

und nach (2.1) bekommt man auf Grund der Identität

$$\delta^b_{t|k} = {}'\Gamma_t{}^b{}_k - {}''\Gamma_t{}^b{}_k \tag{2.4}$$

die Formel

$$\nabla_k g^{ij} = P^i_a P^j_b(g^{at}\,\delta^b_{t|k} + g^{bt}\,\delta^a_{t|k} - \gamma_k m^{ab}).$$

Beachtet man jetzt (1.4) und (1.4a) d. h. die Symmetrie des P-bzw. Q-Tensors, die offenbar auch für die rein kontravarianten Komponenten besteht, so folgt im Hinblick auf (1.6):

$$\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij} + P^i_a P^i_b(g^{at}\,\delta^b_{t|k} + g^{bt}\,\delta^a_{t|k}). \tag{2.5}$$

Aus (2.5) folgt unmittelbar wegen $\mathrm{Det}\,(P^i_j)\neq 0$ der folgende

Satz 1. *Es ist*

(2.6(2.6)
$$g^{at}\,\delta^b_{t|k} + g^{bt}\,\delta^a_{t|k} = (\gamma^*_k + \gamma_k) g^{rs} Q^a_r Q^b_s$$

notnotwendig und hinreichend dafür, daß aus (1.3) *die Relation*

$$\nabla_k g^{ij} = \gamma^*_k g^{ij} \tag{2.7}$$

folge, wo γ^*_k *einen kovarianten Vektor bedeutet.*

Bemerkung. Der Fall $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$, die in den gewöhnlichen Weylschen Räumen gültig ist, ist offenbar durch $\gamma^*_k = -\gamma_k$ gekennzeichnet. In den W—O_n-Räumen kann aber auch $\gamma^*_k \neq -\gamma_k$ bestehen.

Die Gleichungen (2.6) bilden im wesentlichen ein partielles Differentialgleichungssystem für die P^i_k; das wollen wir im folgenden bestimmen. Unter Beachtung von (2.4) bekommt man aus (2.6) nach einer Kontraktion mit $P_{ia}P_{jb}$ im Hinblick auf (1.4)

$$({}'\Gamma_{tsk} - {}''\Gamma_{tsk}) P^t_i P^s_j + ({}'\Gamma_{tsk} - {}''\Gamma_{tsk}) P^t_j P^s_i = (\gamma^*_k + \gamma_k)\, g_{ij}. \tag{2.8}$$

Aus (0.1) bekommt man

$${}'\Gamma_{tsk} = (\partial_k P^h_t + {}''\Gamma_r{}^h{}_k P^r_t) Q^m_h\, g_{ms}. \tag{2.9}$$

Substituiert man dies in (2.8), so wird nach gewissen Vertauschungen der Indizes und zufolge der Annahme (1.4):

$$(2.10) \qquad g_{s(j}P^t_{i)}\,\partial_k P^s_t = {}''\Gamma_{tsk}P^t_{(i}P^s_{j)} - {}''\Gamma_{r(j|k|}P^t_{i)}P^r_t + \frac{1}{2}(\gamma^*_k + \gamma_k)\,g_{ij}.$$

Satz 2. *Das Differentialgleichungssystem (2.10) ist notwendig und hinreichend dafür, daß aus (1.3) die Relation (2.7) folge.*

Beweis. Die Notwendigkeit haben wir schon gezeigt, da (2.10) aus (2.4) abgeleitet wurde. (2.10) ist aber auch hinreichend, da wenn man (0.1) beachtet, d. h. $\partial_k P^s_t$ eliminiert wird, so erhält man aus (2.10) unter Beachtung von (1.4) die Gleichung (2.8), die nach (2.4) eben mit (2.4) übereinstimmt.

Bemerkung. Die Gleichung (2.10) ist nach (1.5) allein durch g_{ij}, γ_k, γ^*_k und P^i_j bestimmt, sie bildet somit eine Bedingung zwischen den Grundgrößen des W—O_n-Raumes. γ^*_k ist im wesentlichen auch ein Grundvektor — nämlich der Rekurrenzvektor von g^{ij} — des Raumes.

§ 3. Rekurrenz von δ^i_k. In den W—O_n-Räumen ist die kovariante Ableitung von δ^i_k — wie wir es in (2.4) schon gezeigt haben — im allgemeinen von Null verschieden. Nehmen wir jetzt an, daß

$$(3.1) \qquad \nabla_k \delta^i_j = \psi_k \delta^i_j, \quad \psi_k = \psi_k(x)$$

besteht, wo ψ_k einen vorgegebenen kovarianten Vektor bedeutet, und bestimmen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für (3.1). Auf Grund der Definition der kovarianten Ableitung (1.2) bzw. (2.4) erhält man im Hinblick auf (1.6)

$$\delta^s_{r|k} = \psi_k Q^s_j Q^j_r \equiv \psi_k m^s_r,$$

bzw.

$$(3.2) \qquad {}'\Gamma_r{}^s{}_k = {}''\Gamma_r{}^s{}_k + \psi_k m^s_r.$$

Substituiert man das in (0.1), so wird

$$(3.3) \qquad \partial_k P^i_j + {}''\Gamma_r{}^i{}_k P^r_j - {}''\Gamma_j{}^s{}_k P^i_s - \psi_k Q^i_j = 0.$$

Es besteht der folgende

Satz 3. *Die Gleichungen (3.3) sind notwendig und hinreichend für die Rekurrenz der kovarianten Ableitung von δ^i_j, d. h. für das Bestehen der Formel (3.1).*

Beweis. Aus (3.3) folgt nach (0.1) die Formel (3.2) und auf Grund von (2.4) bekommt man (3.1).

Bemerkung. (3.3) kann als ein Gleichungssystem für ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$, oder als ein Differentialgleichungssystem für P^i_j betrachtet werden.

Sind ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ angegeben, so ist in diesem Falle sehr leicht für P^i_j die Integrabilitätsbedingungen von (3.3) zu bestimmen, die notwendig und hinreichend für das Bestehen von (3.1) sind. Diese Integrabilitätsbedingungen sind nach dem Thomas—Veblenschen Kriterium (vgl. [3]) $\partial^2_{[km]}P^i_j = 0$; aus (3.3) bekommt man:

$$(3.4) \qquad {}''R_s{}^i{}_{km}P^s_j - {}''R_j{}^s{}_{km}P^i_s - 2\,{}''\nabla_{[m}\psi_{k]}Q^i_j - 2\psi_{[k}\,{}''\nabla_{m]}Q^i_j = 0,$$

wo $''R^i_{skm}$ der aus $''\Gamma^i_{sk}$ gebildete Krümmungstensor bzw. $''\nabla_m$ die allein mit $''\Gamma^i_{sk}$ gebildete kovariante Ableitung bezeichnet.

Ist nun (3.4) eine Identität, so hat (3.3) n^2 unabhängige Lösungen. Ist (3.4) keine Identität, so muß (3.4) unter Beachtung von (3.3) partiell abgeleitet werden und die erhaltene neue Gleichung muß man wieder partiell ableiten, falls sie nicht identisch erfüllt ist. Bekommt man auf diese Weise $p \leqq n^2$ unabhängige Gleichungen (einschließend auch (3.4)), und existiert eine Zahl $N \leqq n^2$, so daß die $(N+1)$-te Gleichung vermöge der vorigen identisch erfüllt ist, so hat die Lösung (n^2-p) beliebig wählbare Konstante. Für $p>n^2$ ist (3.3) nicht lösbar, d. h. (3.1) kann für die angegebenen $''\Gamma^i_{jk}$ nicht bestehen.

§ 4. Schlußbemerkungen. Nehmen wir jetzt an, daß g_{ij}, g^{ij} und δ^i_j alle rekurrente kovariante Ableitung haben, d. h. die Formeln (1.3), (2.7) und (3.1) bestehen. Offenbar besteht immer

$$\nabla_k(g_{jt}g^{it}) = \nabla_k \delta^i_j.$$

Nach (1.2) wird wegen $g^{tb}g_{ta}=\delta^b_a$:

$$P^i_b P^a_j(g^{tb}\,\partial_k g_{at} + g_{at}\,\partial_k g^{tb} + {'\Gamma_s{}^b{}_k} g_{at} g^{st} - {''\Gamma_a{}^r{}_k} g_{rt} g^{bt}) = \nabla_k \delta^i_j.$$

Beachten wir jetzt (1.1a), so wird:

$$P^i_b P^a_j\big(g^{tb}(g_{at|k} + {''\Gamma_i{}^r{}_k} g_{ra}) + g_{at}(g^{tb}{}_{|k} - {'\Gamma_s{}^t{}_k} g^{sb})\big) = \nabla_k \delta^i_j. \tag{4.1}$$

Die Symmetriebedingungen (1.4), die selbstverständlich auch auf die kontravarianten Komponenten von P^i_j gültig sind, führt uns nach (2.4) auf

$$g^{is}\nabla_k g_{sj} + g_{js}\nabla_k g^{is} - g_{aj}\, g^{bi}\nabla_k \delta^a_b = \nabla_k \delta^i_j. \tag{4.2}$$

Aus dieser Formel folgt der

Satz 4. *Ist in einem metrischen* O_n*-Raum der Grundtensor* $g_{is}P^s_j = P_{ij}$ *in* i, j *symmetrisch, so besteht die Relation (4.2). Sind noch* $\nabla_k g_{ij}$, $\nabla_k g^{ij}$ *und* $\nabla_k \delta^i_j$ *rekurrent mit den Rekurrenzvektoren* γ_k, γ^*_k *und* ψ_k, *so folgt aus (4.2)*

$$\gamma_k + \gamma^*_k = 2\psi_k. \tag{4.3}$$

Beweis. Substituiert man die entsprechenden Größen von (1.3), (2.7) und (3.1) in die Gleichung (4.2), so erhält man (4.3), w. z. b. w.

In den gewöhnlichen Riemann—Weylschen Räumen, in denen also $P^i_j = \delta^i_j$ ist, gilt immer $\psi_k = 0$, und nach (4.3): $\gamma^*_k = -\gamma_k$.

Schriftenverzeichnis

[1] Arthur Moór, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor. *Acta Sci. Math.* **40** (1978), 129—142.

[2] Tominosuke Otsuki, On general connections I. *Math. Journal of Okayama University* **9** (1960), 99—164.

[3] J. M. Thomas—O. Veblen, Projective invariants of affine geometry of paths. *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.

(Eingegangen am 18. Oktober 1981.)