Спектральное представление однородных случайных полей и авторегрессионных полей дискретного аргумента

Дь. ТЕРДИК (Дебрецен)

Эта работа повсящена анализу Фурье однородных случайных полей, специально, авторегрессионных случайных полей.

1) Рассматривается однородное случайное поле $y_{\underline{k}}$ на целочисленной решетке в R^n $(n \geqq 1)$ т. е. при обозночении $\mathbf{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, случайные величины $y_{\underline{k}}$, $\underline{k} \in \mathbf{Z}^n$ имеют следующие свойства:

$$My_{\underline{k}} = m, \quad \operatorname{cov}(y_{\underline{k}}, y_{\underline{l}}) = M(y_{\underline{k}}-m)(y \ -m) = C(\underline{k}-\underline{l})$$

Известно, что $y_{\underline{k}}$ допускает спектральное разложение (обобщение однопараметрического случая)

$$y_{\underline{k}} = \int\limits_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(\underline{k}, \underline{\lambda})} \Phi(d\underline{\lambda}) \tag{1.1}$$

где $(\underline{k}, \underline{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} k_j \lambda_j$ и $\Phi(d\underline{\lambda})$ случайная спектральная мера поля $\{y_{\underline{k}}\}$. Интересно отметить, что спектральные разложения типа (1.1) следуют из общих теорем о спектральном разложении однородного поля на коммутативной топологической группе G с мерой Хаара [1]. Несмотря на это, результаты о спектральном представлении для однородных полей непрерывного параметра неоднократно доказываются [2] в то время как дискретный случай даже не упоминается. Мы дадим теперь доказательство представлении (1.1) исходя из следующей общей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n$-линейные унитарные отераторы на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, которые перестановочны. Тогда существует, и единственно, разложение единицы $H(d\underline{\lambda})$ на $[-\pi, \pi]^n$, такое что*

$$\mathscr{L}_1^{k_1} \mathscr{L}_2^{k_2} \ldots \mathscr{L}_n^{k_n} = \int\limits_{[-\pi, \pi]^n} e^{i(\underline{k}, \underline{\lambda})} H(d\underline{\lambda}) \tag{1.2}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $n=2$. Известно [4], что $\mathscr{L}_1^k, \mathscr{L}_2^l$ представимы в виде

$$\mathscr{L}_1^k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} E(d\lambda), \quad \mathscr{L}_2^l = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu l} F(d\mu)$$

и для произвольных $g, f \in \mathscr{H}$ выполняются

$$(\mathscr{L}_1^k g, f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}(E(d\lambda)g, f), \quad (\mathscr{L}_2^l g, f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu l}(F(d\mu)g, f)$$

где $E(d\lambda)$ и $F(d\mu)$ разложения единицы на $[-\pi, \pi]$ и это представления единственны. Покажем сначала, что если $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ перестановочны тогда скажем $\mathscr{L}_2^l$ и $E(d\lambda)$ тоже перестановочны. Положим $\mathscr{L}_2^l h = f$ тогда имеем

$$(\mathscr{L}_1^k \mathscr{L}_2^l h, g) = (\mathscr{L}_1^k f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}(E(d\lambda)f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}(E(d\lambda)\mathscr{L}_2^l h, g)$$

$$(\mathscr{L}_1^k \mathscr{L}_2^l h, g) = (\mathscr{L}_1^k h, \mathscr{L}_2^{-l} g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}(E(d\lambda)h, \mathscr{L}_2^{-l} g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}(\mathscr{L}_2^l E(d\lambda)h, g).$$

В силу единственности представлений отсюда следует равенство

$$(E(d\lambda)\mathscr{L}_2^l h, g) = (\mathscr{L}_2^l E(d\lambda)h, g)$$

для каждого $h, g \in \mathscr{H}$. Следовательно $\mathscr{L}_2^l$ и $E(d\lambda)$ перестановочны. Аналогично проверяется перестановочность $E(d\lambda)$ и $F(d\mu)$. Теперь положим $H(d\lambda, d\mu) = E(d\lambda)F(d\mu)$. Очевидно, что произведение $E(d\lambda)F(d\mu)$ является разложением единицы на $[-\pi, \pi]^2$ таким что

$$(\mathscr{L}_1^k \mathscr{L}_2^l h, g) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k}(E(d\lambda)\mathscr{L}_2^l h, g) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k + \mu l}(E(d\lambda)F(d\mu)h, g) =$$

$$= \int_{[-\pi,\pi]^2} e^{ik\lambda + il\mu}(H(d\lambda, d\mu)h, g).$$

тем самым лемма доказана.

Пусть теперь $\mathscr{H}_y$ гильбертого пространство значений однородного случайного поля $\{y_{\underline{k}}\}$, т. е. $\mathscr{H}_y$-линейная обалочка величин $y_{\underline{k}}$, $\underline{k} \in \mathbf{Z}^n$. Определим операторы частного запаздывания $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n$ равенством

$$\mathscr{L}_j y_{k_1, k_2 \ldots k_j \ldots k_n} = y_{k_1, k_2 \ldots k_j - 1 \ldots k_n}. \tag{1.3}$$

Из-за свойства однородности поля $\{y_{\underline{k}}\}$ операторы $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n$ изометричны на $\{y_{\underline{k}}, \underline{k} \in \mathbf{Z}^n\}$, и по лемме Розанова ([3] Лемма 4.1) они могут быть продалжены с сохранением изометричности на все пространство $\mathscr{H}_y$. Операторы $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_n$ являются унитарными и поэтому по лемме 1.1 допускают спектральное разложение (1.2). Из (1.2) легко получить нижеследующее спектральное представление поля $\{y_{\underline{k}}\}$

$$y_{\underline{k}} = \underline{\mathscr{L}}^{\underline{k}} y_{\underline{0}} = \mathscr{L}_1^{k_1} \mathscr{L}_2^{k_2} \ldots \mathscr{L}_n^{k_n} y_{\underline{0}}$$

т. е.

$$y_{\underline{k}} = \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\underline{k}, \underline{\lambda})} \Phi(d\underline{\lambda})$$

где $\Phi(d\underline{\lambda}) = H(d\underline{\lambda}) y_{\underline{0}}$ — случайная σ-аддитивная мера. Мера $\Phi(d\underline{\lambda})$ является также случайной спектральной мерой поля $\{y_{\underline{k}}\}$. Аналогично случаю стационарных процессов, спектральное представление ковариационной функции поля $\{y_{\underline{k}}\}$ выражается равенством

$$C(\underline{k}-\underline{l}) = \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\underline{k}-\underline{l},\,\underline{\lambda})} F(d\underline{\lambda}).$$

Здесь $F(d\underline{\lambda}) = M|\Phi(d\underline{\lambda})|^2$ спектральная мера поля $\{y_{\underline{k}}\}$. В случае когда мера F абсолютно непрерывна, так что существует производная

$$f(\underline{\lambda}) = \frac{F(d\underline{\lambda})}{\mu(d\underline{\lambda})}$$

(μ-мера Лебега на $[-\pi, \pi]^n$) будем говорить, что поле $\{y_{\underline{k}}\}$ имеет спектральную плотность $f(\underline{\lambda})$.

2) Важным классом однородных полей являются авторегрессионные поля, естественное обощение авторегрессионных процессов. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим определением: поле $\{y_{\underline{t}}\}$ назовем авторегрессионным порядка $\underline{R}$ если оно удовлетворяет случайному разностному уравнению

$$y_{\underline{t}} = -\sum_{\underline{0}<\underline{r}\leq\underline{R}} a_{\underline{r}} y_{\underline{t}-\underline{r}} + u_{\underline{t}} \tag{1.4}$$

где случайные величины $u_{\underline{t}}$ некоррелированы ($Mu_{\underline{t}}u_{\underline{s}} = \delta_{\underline{t}}^{\underline{s}}\sigma^2$). Что касается порядка $\underline{R}$, он определяется следующим образом:

$$R_j = \max\{r_j | a_{r_1, r_2 \dots r_j \dots r_n} \neq 0\}$$

Перечислим некоротые факты, доказательство которых аналогичны доказательством для случая стационарных процессов. Как и в случае $n=1$ интеграл

$$\int_{[-\pi,\pi]^n} \varphi(\lambda)\Phi(d\underline{\lambda})$$

по случайной мере $\Phi(d\underline{\lambda})$ однородного поля $\{y_{\underline{t}}\}$ определен в среднем квадратичном тогда и только тогда когда $\varphi \in L_F^2$. Рассмотрим линейное преобразование $\varphi \in L_F^2$ однородного поля $\{y_{\underline{t}}\}$

$$X_{\underline{t}} = \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\underline{t},\,\underline{\lambda})}\varphi(\underline{\lambda})\Phi(d\underline{\lambda}). \tag{1.5}$$

$X_{\underline{t}}$-также однородно и имеет спектральное представление

$$X_{\underline{t}} = \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\underline{t},\,\underline{\lambda})}\Phi_x(d\underline{\lambda}).$$

Из соотношения (1.5) сразу видно, что спектральная случайная мера $\Phi_x(d\underline{\lambda})$ поля $x_{\underline{t}}$ представима в виде

$$\Phi_x(d\underline{\lambda}) = \varphi(\underline{\lambda})\Phi(d\underline{\lambda}).$$

Поле $y_{\underline{t}}$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$ тогда и только тогда когда любое поле $X_{\underline{t}}$ получающееся из него линейным преобразованием, имеет спектральную плотность $f_x(\lambda)$. Причем очевидно что

$$f_x(\underline{\lambda}) = |\varphi(\underline{\lambda})|^2 f(\underline{\lambda}). \tag{1.6}$$

Для изучения стохастического разностного уравнения (1.4) удобно его переписать в форме

$$\sum_{0\leqq\underline{r}\leqq\underline{R}} a_{\underline{r}} y^{\cdot}_{\underline{\ }-\underline{r}} = u_{\underline{t}} \quad (a_{\underline{0}} = 1) \tag{1.7}$$

Поскольку случайние величины $U_{\underline{t}}$ некоррелированы, поле $U_{\underline{t}}$ имеет спектральную плотность

$$f_u(\underline{\lambda}) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^n}.$$

Отсюда и из (1.6) вытекает

Лемма 2. *Допустим что авторегрессионное поле* $y_{\underline{t}}$ *однородно. Тогда* $y_{\underline{\ }}$ *имеет спектральную плотность* $f(\underline{\lambda})$ *и*

$$\frac{\sigma^2}{(2\pi)^n} = |P(e^{i\underline{\lambda}})|^2 f(\underline{\lambda})$$

или же

$$f(\underline{\lambda}) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^n |P(e^{i\underline{\lambda}})|^2},$$

где $P(e^{i\underline{\lambda}}) = P(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \dots, e^{i\lambda_n})$ *и* P *алгебраический полином присоединенный к* (1.7) *(характеристический полином поля* (1.7)*) т. е.*

$$P(\underline{x}) = \sum_{\underline{0}\leqq\underline{r}\leqq\underline{R}} a_{\underline{r}} \underline{x}^{\underline{r}} = \sum_{\underline{0}\leqq\underline{r}\leqq\underline{R}} a_{\underline{r}} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}. \tag{1.8}$$

Заметим что, если $f(\underline{\lambda})$ — спектральная плотность авторегрессионного поля $y_{\underline{t}}$, то она неотрицательна и интегрируема по Лебегу на $[-\pi, \pi]^n$.

Зададим пример, когда несмотря на то, что

$$P(e^{i\underline{\lambda}_0}) = 0 \quad \underline{\lambda}_0 \in [-\pi, \pi]^n$$

спектральная плотность $f(\underline{\lambda})$ интегрируема.

Пусть $n \geqq 5$ и

$$P(e^{i\underline{\lambda}}) = 1 - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k \cdot 2}$$

в этом случае

$$P(e^{i\underline{\lambda}})|_{\underline{\lambda}=\underline{0}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\lambda_k} P(e^{i\underline{\lambda}})|_{\underline{\lambda}=\underline{0}} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

и

$$P(e^{i\underline{\lambda}}) = -\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 + o\left(\sum_{1}^{n} \lambda_k^2\right), \quad \underline{\lambda} \in O_{\underline{0},\underline{\varepsilon}} = \{-\underline{\varepsilon} \leqq \underline{\lambda} \leqq \underline{\varepsilon}\}$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{O_{\underline{0},\varepsilon}} |P(e^{i\underline{\lambda}})|^{-2}\, d\underline{\lambda} \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \int_{O_{\underline{0},\varepsilon}} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)^2}\, d\underline{\lambda} < \infty.$$

3) В настоящем пункте обсуждается вопрос представимости авторегрессионного поля $y_{\underline{t}}$ в форме скальзящего среднего, в смысле сходимости в среднем квадратическом:

(1.9)
$$y_{\underline{t}} = \sum_{\underline{0}-\underline{q}} f_{\underline{q}} u_{\underline{t}-\underline{q}},$$

где $u_{\underline{t}}$ некоррелированы, а $\sum_{\underline{0}\leqq\underline{q}} |f_{\underline{q}}|^2 < \infty$. С этой целью обратимся к операторам частного запаздывания $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \dots, \mathscr{L}_n$ (см. (1.3)). Используя эти операторы, разностное уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\Big(\sum_{\underline{0}\leqq\underline{r}\leqq\underline{R}} a_{\underline{r}} \underline{\mathscr{L}}^{\underline{r}}\Big) y_{\_} = u_{\underline{t}}.$$

Поставим вопрос: когда существует такой обратный оператор и оператору

$$\sum_{\underline{0}\leqq\underline{r}\leqq\underline{R}} a_{\underline{r}} \underline{\mathscr{L}}^{\underline{r}}$$

который представимый в виде

$$\sum_{\underline{0}\leqq\underline{q}} f_{\underline{q}} \underline{\mathscr{L}}^{\underline{q}}\ ?$$

Этот вопрос равносильен вопросу: когда обратный полимон тригонометрического полинома $P(e^{i\underline{x}})$ (см. (1.8)) может быть представлен в виде

$$P^{-1}(e^{i\underline{x}}) = \sum_{\underline{0}\leqq\underline{q}} f_{\underline{q}} e^{i(\underline{q},\,\underline{x})},$$

где $\sum_{\underline{0}\leqq\underline{q}} |f_{\underline{q}}|^2 < \infty$?

Рассмотрим следующие три случая:

А) По лемме Винера ([4] лемма 11.6) если $P(e^{i\underline{x}}) \neq 0$ для произвольного $\underline{x} \in R^n$ тогда

$$P^{-1}(e^{i\underline{x}}) = \sum_{\underline{q}\in Z^n} f_{\underline{q}} e^{i(\underline{q},\,\underline{x})}, \quad \sum_{\underline{q}} |f_{\underline{q}}| < \infty.$$

А это озночает, что

$$y_{\underline{t}} = \sum_{\underline{q}\in Z^n} f_{\underline{q}} u_{\underline{t}-\underline{q}}.$$

Используя это замечание и лемму 1.2 приходим к следующей теореме:

Теорема 1. *Авторегрессионное поле* $y_{\underline{t}}$, (1.7) *однородно тогда и только тогда если*

$$\int_{[-\pi,\,\pi]^n} |P(e^{i\underline{\lambda}})|^2\, d\underline{\lambda} < \infty.$$

Для того, чтобы авторегрессионное поле было однородным достаточно чтобы $P(e^{i\underline{x}}) \neq 0$, $\underline{x} \in R^n$.

Замечание. Теорема 1. верна и для случая $|R|=\prod_{j=1}^{n}(R_j+1)=\infty$, при ограничении

$$\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}\leq\underline{R}}|a_{\underline{r}}|<\infty.$$

Б) Случай $\sum_{\underline{0}<\underline{r}\leq\underline{R}}|a_{\underline{r}}|<1$ — более простой.

Заметим, что условие А. т. е. $P(e^{i\underline{x}})\neq 0$, $\underline{x}\in R^n$ выполняется и в случаем Б. Из этого следует, что поле может быть представимо в виде

$$y_{\underline{t}}=\sum_{\underline{q}\in Z^n}f_{\underline{q}}u_{\underline{t}-\underline{q}}.$$

В случае Б) докажем ещё, что $f_{\underline{q}}=0$ при $\underline{q}\not\geq 0$. Множество А функций вида $F(\underline{x})=\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}}a_{\underline{r}}e^{i(\underline{r},\underline{x})}$ где $\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}}|a_{\underline{r}}|<\infty$ с нормой $\|F\|=\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}}|a_{\underline{r}}|$ является коммутативной алгеброй Банаха с единицей 1 и элемент

$$T(\underline{x})=1+\sum_{\underline{0}<\underline{r}\leq\underline{R}}a_{\underline{r}}e^{i(\underline{r},\underline{x})}=1+T_1(x)$$

обратим если

$$\|T_1\|=\sum_{\underline{0}<\underline{r}\leq\underline{R}}|a_{\underline{r}}|<1 \quad (\text{см. [4], 10.7})$$

Лемма 3. При $\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}\leq\underline{R}}|a_{\underline{r}}|<1$, авторегрессионное поле $y_{\underline{t}}$, (1.7) представимо в форме скалзящего спреднего т. е.

$$y_{\underline{t}}=\sum_{\underline{0}\leq\underline{q}}f_{\underline{q}}u_{\underline{t}-\underline{q}}.$$

В) Переходим теперь к общему случаю. Обозначим соответственно $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}^n_+$ множества точек n-мерного компрексного пространства и n-мерного вещественного пространства с неотрицательными координатами. Очевидно, что функция $G(z)=1/z$ голоморфна при $z\neq 0$, $z\in\mathbf{C}^1$, и функция

$$P(\underline{z})=\sum_{\underline{0}\leq\underline{r}\leq\underline{R}}a_{\underline{r}}\underline{z}^{\underline{r}}$$

целая. Поэтому функция $(G\circ P)(\underline{z})=1/P(\underline{z})$ голоморфна в области $\mathbf{C}_n\setminus T_0$, где $T_0=\{\underline{z}\in\mathbf{C}^n|P(\underline{z})=0\}$. Рассмотрим отображение $\alpha(\underline{z})=(|z_1|,|z_2|,\ldots,|z_n|)$ $2n$-мерного пространства в n-мерный абсаюятный октант $\mathbf{R}^n_+$ и пусть множество

$$K=\{\underline{z}\in\mathbf{C}^n|\alpha(\underline{z})<(1,1,\ldots 1)\}\cup\{\alpha(\underline{z})=(1,1,\ldots 1\},$$

т. е. оно является объединением полицилиндра и тора. Если полином $P(\underline{z})$ не обращается в нуль на множестве K, тогда K принадлежит области голоморфности H функции $G\circ P$. Отсюда следует, что функция $G\circ P$ представляется в H рядом тейлора с центром $\underline{O}$ и этот ряд сходится обсолютно и равнемерно на всей области Рейнхарта ($\bar{K}\subset H_0\subset H$). Так что

$$(G\circ P)(e^{i\underline{x}})=\sum_{\underline{0}\leq\underline{q}}f_{\underline{q}}e^{i(\underline{q},\underline{x})},\quad \sum_{\underline{0}\leq\underline{q}}|f_{\underline{q}}|<\infty.$$

Теорема 2. *Авторегрессионное поле $y_{\underline{t}}$ является полем скользящего среднего тогда и только тогда когда*

$$K \cap T_0 = \emptyset.$$

Справедливость следующих лемм нетрудно устанавить:

Лемма 4. *Разностное уравнение*

$$\sum_{\underline{0} \leqq \underline{r} \leqq \underline{R}} a_{\underline{r}} f_{\underline{q}-\underline{r}} = \delta_{\underline{0}}^{\underline{q}}$$

коэффициентов с начальными данными $f_{\underline{q}} = 0$, $\underline{q} \not\geqq \underline{0}$ *имеет единственное решение* $f_{\underline{q}}$, $\underline{q} \geqq \underline{0}$, *которое представимо в виде*

$$f_{q_1, q_2, \ldots, q_n} = \sum_{\left\{ \begin{matrix} \beta_{\underline{r}} \in Z \\ \beta_{\underline{r}} \geqq 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \sum\limits_{\underline{0} < \underline{r} \leqq \underline{R}} r_j \beta_{\underline{r}} = q_j \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \right\}} \frac{\left(\sum\limits_{\underline{0} < \underline{r} \leqq \underline{R}} \beta_{\underline{r}} \right)!}{\prod\limits_{\underline{0} < \underline{r} \leqq \underline{R}} \beta_{\underline{r}}!} \prod_{\underline{0} < \underline{r} \leqq \underline{R}} (-a_{\underline{r}})^{\beta_{\underline{r}}}.$$

Лемма 5. *Если случайные величины и независимы тогда* $y_{\underline{t}}$ *и* $u_{\underline{s}}$, $\underline{s} \in N_{\underline{t}}$ *тоже независимы, где* $N_{\underline{t}} = \{\underline{s} \mid \underline{s} \not\leqq \underline{t}\}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $y_{\underline{t}}$ зависит лишь от случайных величин u_s, $\underline{s} \leqq \underline{t}$.

Литература

[1] А. М. Яглом, Second order homogeneus random fields *Fourth Berkeley Simposium on Math. Stat v. 2*, p. 593. *Berkeley*, 1961.
[2] Э. Хеннан, Многомерные временные ряды *М. Мир* 1974.
[3] Ю. А., Розанов, Стационарные случайные процессы *М. Физматгиз*, 1963.
[4] У. Рудин, Функциональный анализ *М. Мир*, 1975.

(Поступила: 2.1.1981.)