Amalgame nilpotenter Gruppen der Klasse zwei

Von BERTHOLD J. MAIER (Freiburg)

Wir geben notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von Amalgamen mit vereinigten Untergruppen in der Klasse der nilpotenten Gruppen der Klasse $\leqq 2$. Die Kriterien lassen sich auf das entsprechende Problem für nilpotente Lie-Algebren der Klasse $\leqq 2$ übertragen.

Sind A und B Gruppen in einer Klasse $\mathbf{K}$ von Gruppen mit einer gemeinsamen Untergruppe D, dann heißt eine Gruppe C Amalgam (mit vereinigten Untergruppen) von A mit B über D, falls $C=\langle A, B\rangle \in \mathbf{K}$ und $D \leqq A \cap B$ in C. Wir verlangen also nur, daß sich A und B in C in einer gemeinsamen Obergruppe von D schneiden und nicht genau in D. In der Klasse aller Gruppen existiert das Amalgam mit vereinigter Untergruppe nach einem bekannten Satz von SCHREIER immer. Das Problem stellt sich daher noch für speziellere Klassen von Gruppen (vgl. [5], A. 8 und z.B. [3], [7]—[12]).

Eine Gruppe G heißt nilpotent der Klasse $\leqq 2$, falls $G_2 \leqq Z(G)$, wobei $Z(G)$ das Zentrum von G bezeichnet und G_2 die Kommutatorgruppe von G, d.h. die von allen Kommutatoren $[a, b]=a^{-1}b^{-1}ab$, $a, b \in G$ erzeugte Untergruppe von G. Wir bezeichnen die Klasse aller solcher Gruppen durch $\mathbf{N}_2$.

WIEGOLD [10] gab Bedingungen für die Existenz von Amalgamen in $\mathbf{N}_2$ mit $D=A\cap B$, die allerdings schwer zu handhaben sind. Wir geben Bedingungen für Amalgame mit $D \leqq A \cap B$, die sich im Fall torsionsfreier Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ auf $A_2 \cap D \leqq Z(B)$ und $B_2 \cap D \leqq Z(A)$ reduzieren. Als Folgerung erhalten wir auch eine Bedingung von ALLENBY [1] für den Fall, daß B endlich zyklisch ist.

Die Ergebnisse lassen sich wegen der Korrespondenz von nilpotenten Gruppen und Lie-Algebren leicht auf die letzteren übertragen.

Die Konstruktion des Amalgams gliedert sich in die Schritte:

1. Amalgam von A_2 mit B über $A_2 \cap D$ und von A mit B_2 über $B_2 \cap D$.
2. „Adjunktion" der Kommutatorfaktorgruppe A/A_2B_2 an B.

Wir skizzieren dies für den torsionsfreien Fall, in dem die späteren Hauptprobleme wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln nicht auftreten. Nach MALZEW haben A und B eindeutig bestimmte dividierbare Hüllen und ebenso die gemeinsame Untergruppe D. Wir können also A, B und D als dividierbar voraussetzen, da wegen der Eindeutigkeit dividierbarer Hüllen auch die Untergruppe D richtig amalgamiert wird. Gleichzeitig übertragen sich die angegebenen Bedingungen $A_2 \cap D \leqq Z(B)$ und $B_2 \cap D \leqq Z(A)$, da die Zentren dividierbarer nilpotenter Gruppen dividierbar sind und ebenso die Kommutatorgruppen. An dieser Stelle müssen wir die Forderung

$D=A\cap B$, die im freien Produkt mit amalgamierten Untergruppen in der Klasse aller Gruppen gilt, für das Amalgam in $\mathbf{N}_2$ auf $D\leqq A\cap B$ abschwächen, da die dividierbare Hülle von D, über der dann amalgamiert wird, sowohl nach A als auch nach B hineinreichen kann. Schritt 1 läßt sich nun durch ein direktes Produkt von A_2 mit B über der zentralen Untergruppe $A_2\cap B=A_2\cap D$ erreichen. Wir schreiben für dieses Amalgam $\begin{array}{ccc} A_2 & & B \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & A_2\cap B & \end{array}$. Es kann z.B. in der Form $A_2\times \times B/\{(a, a^{-1})|a\in A_2\cap B\}$ dargestellt werden, wobei A_2 mit der Untergruppe $\{(a, 1)|a\in A_2\}$ und B entsprechend mit $\{(1, b)|b\in B\}$ identifiziert werden. Daß $A_2\cap B$ in A_2 und B zentral ist, wird zum Nachweis benötigt, daß $\{(a, a^{-1})|a\in A_2\cap B\}$ eine zu $A_2\cap B$ isomorphe Untergruppe und ein Normalteiler von $A\times B$ ist (vgl. [4], I. 9.10). Für Schritt 2 können wir jetzt $A_2\leqq Z(B)$ und $B_2\leqq Z(A)$ annehmen (vgl. Korollar 2). Die „Adjunktion" von A/A_2B_2 kann nun sukzessive durch zerfallende Erweiterungen von B mit $\mathbf{Q}^+$ durchgeführt werden, da DA_2B_2/A_2B_2 direkter Faktor sowohl von A/A_2B_2 als auch von B/A_2B_2 ist und diese drei Gruppen alle dividierbar torsionsfrei abelsch sind. Ist z.B. $A=\langle D, a^r|r\in\mathbf{Q}^+\rangle$ mit $A_2D\cap \cap\langle a^r|r\in\mathbf{Q}^+\rangle=1$, dann ist A schon durch die Operation von a auf A_2D festgelegt und diese wiederum durch die induzierte auf DA_2B_2/A_2B_2, da $A_2B_2\leqq Z(A)$. Da DA_2B_2/A_2B_2 direkter Faktor von B/A_2B_2 ist, läßt sich die Operation von a auf D sofort auf B fortsetzen und auch zu einer von ganz $\langle a^r|r\in\mathbf{Q}^+\rangle$ auf B. In der zerfallenden Erweiterung von B mit $\langle a^r|r\in\mathbf{Q}^+\rangle$ ist die Untergruppe $\langle D, a^r|r\in\mathbf{Q}^+\rangle$ dann isomorph zu A, und amalgamiert ist die Untergruppe D.

Wir beginnen mit einigen Hilfssätzen. Der erste klärt die Struktur des Produkts einer Untergruppe mit einer von ihr zentralisierten auf. Wir bezeichnen weiterhin mit $\begin{array}{ccc} U & & W \\ & \diagdown\diagup & \\ & V & \end{array}$ das direkte Produkt von U mit W über einer gemeinsamen zentralen Untergruppe V, mit $\mathbf{C}_W(V)$ den Zentralisator von V in W und mit $\langle X, Y\rangle$ die von X und Y erzeugte Untergruppe, wobei wir im Zweifelsfall angeben, in welcher Obergruppe das Erzeugnis gebildet wird.

Lemma 1. *Seien* $U\leqq G$ *und* $X\leqq C_G(U)$. *Dann gilt* $UX=\langle U, X\rangle\cong \begin{array}{ccc} U & & X \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & U\cap X & \end{array}$ *und der Isomorphismus bildet die Untergruppen* U *und* X *jeweils auf sich ab.*

Beweis. Da $X\leqq C_G(U)$, induzieren die Inklusionen $i_X\colon X\to G$ und $i_U\colon U\to G$ einen Homomorphismus $i\colon U\times X\to G$. Der Kern N von i besteht aus allen (u, x) mit $i_U(u)i_X(x)=1$, also $x=u^{-1}\in U\cap X$ und es gilt $N=\{(u, u^{-1})|u\in U\cap X\}$. Daher induziert i einen Isomorphismus j von $\begin{array}{ccc} U & & X \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & U\cap X & \end{array}=U\times X/N$ auf $\langle U, X\rangle\leqq G$. Da $j\restriction U=i_U$ und $j\restriction X=i_X$, bildet j die Untergruppen U und X jeweils auf sich ab. ∎

Korollar 1. *Seien* $X\leqq Z(A), Z(B)$ *und* $U\leqq A$. *Dann ist die Untergruppe* $\langle U, B\rangle$ *in* $G=\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \diagdown\diagup & \\ & X & \end{array}$ *isomorph zu* $\begin{array}{ccc} U & & B \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & U\cap X & \end{array}$.

Beweis. Da $B \leqq C_G(A) \leqq C_G(U)$ und $U \cap B = U \cap X$, folgt die Behauptung sofort aus Lemma 1. ▮

Nennen wir eine Untergruppe U von G co-zentral, falls $G = \langle U, X \rangle$ mit einer zentralen Untergruppe $X \leqq Z(G)$ gilt, dann beschreibt das folgende Lemma ein direktes Produkt mit vereinigten co-zentralen Untergruppen.

Lemma 2. *Sei U co-zentral in G und H, d.h. $G = \langle U, X \rangle$ mit $X \leqq Z(G)$ und $H = \langle U, Y \rangle$ mit $Y \leqq Z(H)$. Dann ist $P = U \times X \times Y / \{(xy, x^{-1}, y^{-1}) \mid x \in U \cap X, y \in U \cap Y\}$ isomorph zu $G_Y = \begin{array}{ccc} G & & Y \\ \diagdown & & \diagup \\ & U \cap Y & \end{array}$ und zu $H_X = \begin{array}{ccc} H & & X \\ \diagdown & & \diagup \\ & U \cap X & \end{array}$, wobei die Isomorphismen die Untergruppen G, Y bzw. H, X jeweils auf sich abbilden.*

Beweis. Nach Lemma 1 gilt $G \cong U \times X / \{(x, x^{-1}) \mid x \in U \cap X\}$ und

$$G_Y = \begin{array}{ccc} G & & Y \\ \diagdown & & \diagup \\ & U \cap Y & \end{array} \cong G \times Y / \{y, y^{-1}) | y \in U \cap Y\}$$

zusammen also

$$G_Y \cong U \times X \times Y / \{(x, x^{-1}, 1), (y, 1, y^{-1}) | x \in U \cap X, y \in U \cap Y\} = P. \quad ▮$$

Korollar 2. *Seien $D \leqq A$, $B \in \mathbf{N}_2$ und $A_2 \cap D \leqq Z(B)$, $B_2 \cap D \leqq Z(A)$. Dann sind die Untergruppen $\langle D, A_2, B_2 \rangle$ in $A' = \begin{array}{ccc} A & & B_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap B_2 & \end{array}$ und in $B' = \begin{array}{ccc} A_2 & & B \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap A_2 & \end{array}$ isomorph und es gilt $A', B' \in \mathbf{N}_2$.*

Beweis. Es ist $\langle D, A_2 \rangle \cong \begin{array}{ccc} D & & A_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap A_2 & \end{array}$ in A und $\langle D, B_2 \rangle \cong \begin{array}{ccc} D & & B_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap B_2 & \end{array}$ in B. Weiter ist $\langle D, A_2, B_2 \rangle \cong \begin{array}{ccc} \langle D, A_2 \rangle & & B_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap B_2 & \end{array}$ in A' und $\langle D, A_2, B_2 \rangle \cong \begin{array}{ccc} \langle D, B_2 \rangle & & A_2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & D \cap A_2 & \end{array}$ in B'. Setzen wir $U = D$, $X = A_2$ und $Y = B_2$, dann gibt Lemma 2 die erste Behauptung. A' und B' liegen in $\mathbf{N}_2$, da $\mathbf{N}_2$ gegen direkte Produkte und Homomorphismen abgeschlossen ist. ▮

Dieses Korollar besagt also, daß wir nach Durchführung von Schritt 1 wieder zwei Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ mit einer isomorphen Untergruppe, $D' = \langle D, A_2, B_2 \rangle$, vor uns haben. D' ist nicht nur Normalteiler von A' und B', sondern umfaßt sogar die jeweiligen Kommutatorgruppen.

In Schritt 2 adjungieren wir im allgemeinen Fall Elemente, die Kommutatorrelationen mit Elementen aus D erfüllen, durch die die Operation von A auf D definiert ist. Hierbei tritt der Fall auf, daß das adjungierte Element Wurzel eines Elements aus D ist. Statt mit zerfallenden Erweiterungen arbeiten wir daher mit nilpotenten Produkten. Diese wurden von Golovin eingeführt (vgl. [10]). Wir geben nur die Definition des hier benötigten Spezialfalls. Sind $A, B \in \mathbf{N}_2$, F das freie Produkt von A mit B und $F_3 = [[F, F], F]$ der dritte Term der absteigenden Zentralreihe von F, dann nennen wir $A(2)B = F/F_3$ das zweite nilpotente Produkt von A mit B. Es gilt $A \cap F_3 = 1 = B \cap F_3$ in F, so daß wir A und B als Untergruppen von $A(2)B$ auffassen können. Also ist $A(2)B \in \mathbf{N}_2$ und ein Amalgam von A mit B über 1. Aus der universellen Eigenschaft von F folgt die folgende von $A(2)B$, auf die wir oft zurückgreifen:

Je zwei Homomorphismen $\psi_A\colon A \to G$ und $\psi_B\colon B \to G$ mit $G \in \mathbf{N}_2$ induzieren eine gemeinsame Fortsetzung $\Psi\colon A(2)B \to G$, so daß $\Psi \restriction A = \psi_A$ und $\Psi \restriction B = \psi_B$.

Das folgende Lemma besagt, daß in $G(2)\langle c \rangle$ mit $G \in \mathbf{N}_2$ und $\langle c \rangle$ unendlich zyklisch nur Elemente aus der Kommutatorgruppe G_2 von G mit c kommutieren. Wir formulieren dies etwas allgemeiner als später benötigt. Ist π eine Menge von Primzahlen, dann nennen wir eine natürliche Zahl n eine π-Zahl, falls alle ihre Primteiler in π liegen. Das Komplement von π in der Menge aller Primzahlen wird auch mit π' bezeichnet. In einer nilpotenten Gruppe $G \geqq U$ bildet die Menge $I(U) = \{x \in G \mid x^n \in U$ für eine π-Zahl $n\}$ eine Untergruppe, den π-Isolator von U in G (vgl. [2] Lemma 2.8). Insbesondere ist $I_\pi(1)$, die Menge der Torsionselemente, deren Ordnung eine π-Zahl ist, eine Untergruppe und sogar einen Normalteiler von G. Es bezeichne $\mathbf{N}_{2,\pi} \subset \mathbf{N}_2$ die Unterklasse der Gruppen aus $\mathbf{N}_2$, deren Torsionsgruppe eine π-Gruppe ist. Ist G eine nilpotente Gruppe ohne π'-Torsionselemente, z.B. $G \in \mathbf{N}_{2,\pi}$, dann gilt für jede Teilmenge S, daß $I_{\pi'}(\mathbf{C}_G(S)) = \mathbf{C}_G(S)$ d.h. Zentralisatoren sind π'-isoliert (vgl. [2] Theorem 0.4, Lemma 2.1).

Lemma 3. *Sei* $G \in \mathbf{N}_{2,\pi}$. *Für* $g \in G$ *sind äquivalent:*

1. $g \in I_{\pi'}(G_2)$.
2. $[c, g] = 1$ *in* $G(2)\langle c \rangle / T_{\pi'}$, *wenn* $\langle c \rangle$ *unendlich zyklisch und* $T_{\pi'}$ *die* π'-*Untergruppe von* $G(2)\langle c \rangle$ *ist.*
3. $g \in Z(H)$ *für alle* $H \in \mathbf{N}_{2,\pi}$ *mit* $G \leqq H$.

Beweis. $1 \to 2$: In $H = G(2)\langle c \rangle / T_{\pi'} \in \mathbf{N}_{2,\pi}$ sind Zentralisatoren π'-isoliert. Gilt $g^q \in G_2$ für eine π'-Zahl q, so $g^q \in H_2 \leqq \mathbf{C}_H(c)$, also auch $g \in \mathbf{C}_H(c)$, und das heißt $[c, g] = 1$.

$2 \to 3$: Sei $G \leqq H \in \mathbf{N}_{2,\pi}$ und $h \in H$ vorgegeben. Dann induzieren id_G und $c \mapsto h$ einen Homomorphismus von $G(2)\langle c \rangle$ nach H. Da H triviale π'-Untergruppe hat, liegt $T_{\pi'}$ im Kern und wir erhalten einen Homomorphismus von $G(2)\langle c \rangle / T_{\pi'}$ nach H, der g festhält und c auf h abbildet. Aus $[c, g] = 1$ folgt daher $[h, g] = 1$. Da $h \in H$ beliebig war, gilt $g \in Z(H)$.

$3 \to 1$: Wir verfahren indirekt und konstruieren zu $g \notin I_{\pi'}(G_2)$ eine Gruppe $H \geqq G$ in $\mathbf{N}_{2,\pi}$, so daß $g \notin Z(H)$. Ist ${}^-\colon G \to G/I_{\pi'}(G_2)$ die kanonische Projektion, dann gilt $G \times \bar{G} \in \mathbf{N}_{2,\pi}$ und $\psi\colon (f, \bar{h}) \mapsto (f, \bar{f}\bar{h})$ definiert einen Automorphismus von $G \times \bar{G}$. Falls $\bar{G}$ beschränkten Exponenten e hat, so ist e eine π-Zahl und $o(\psi) = e$, andernfalls ist $o(\psi) = \infty$. Die zerfallende Erweiterung H von $G \times \bar{G}$ mit $\langle \psi \rangle$ liegt daher in $\mathbf{N}_{2,\pi}$. In H gilt

$$[(g, 1), \psi] = (g, 1)^{-1}(g, 1)^{\psi} = (g^{-1}, 1)(g, \bar{g}) = (1, \bar{g}) \neq (1, 1),$$

da $\bar{g} \neq 1$ für $g \notin I_{\pi'}(G_2)$. Also ist g „$=$" $(g, 1) \notin Z(H)$. ∎

Die π'-Untergruppe $T_{\pi'}$ in $H = G(2)\langle c \rangle$ zu $G \in \mathbf{N}_{2,\pi}$ und $\langle c \rangle$ unendlich zyklisch ist nicht trivial, falls $G_2 \neq I_{\pi'}(G_2)$, liegt aber in der Kommutatorgruppe von H. Letzteres gilt, da $T_{\pi'}$ im Kern $[G, c]$ des von den Identitäten induzierten Homomorphismus $H \to G \times \langle c \rangle$ liegt. Ist $g \notin G_2$, aber $g^q \in G_2$ für eine π'-Zahl q, dann gilt $[c, g]^q = [c, g^q] = 1$ in H und aus der Konstruktion in $3 \to 1$ mit G/G_2 statt $G/I_{\pi'}(G_2)$ ergibt sich $[c, g] \neq 1$, so daß $[c, g] \in T_{\pi'} \neq 1$.

Das nächste Lemma gibt Bedingungen an, unter denen bei der „Adjunktion" von A/A_2B_2 in Schritt 2 des allgemeinen Falles eine zu A isomorphe Untergruppe entsteht.

Da wir uns nicht auf $\mathbf{N}_2$ einschränken, wo alle Kommutatoren zentral sind, schreiben wir $[x, y, z]$ für $[[x, y], z]$. Dann gelten die Beziehungen:

$$x^y = y^{-1}xy = x[x, y]$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$$

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$$

Lemma 4. *Seien* $A_2 \leqq U \leqq A$, $A/U = \langle a_1U \rangle \times \ldots \times \langle a_nU \rangle$ *für* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *und* $n_i = o(a_iU)$ *mit* $n_i < \infty$ *für* $1 \leqq i \leqq t$, $n_i = \infty$ *für* $t < i \leqq n$. *Es seien* $\varphi: U \to B$ *und* $\varphi_i: \langle a_i \rangle \to B$ *Homomorphismen sowie* $b_i = a_i\varphi_i$, $i = 1 \ldots n$. *Unter folgenden Bedingungen induzieren* φ *und die* φ_i *einen Homomorphismus* $\Phi: A \to B$ *mit* $\Phi \restriction U = \varphi$ *und* $\Phi \restriction \langle a_i \rangle = \varphi_i$, $i = 1 \ldots n$:

1.a) $[g, a_i]\varphi = [g\varphi, b_i]$; *b)* $[g, a_i^{-1}]\varphi = [g\varphi, b_i^{-1}]$, $g \in U$, $1 \leqq i \leqq n$.

2.a) $[a_i, a_j]\varphi = [b_i, b_j]$; *b)* $[a_i, a_j^{-1}]\varphi = [b_i, b_j^{-1}]$, $1 \leqq i, j \leqq n$.

3. $(a_i^{n_i})\varphi = b_i^{n_i}$, $1 \leqq i \leqq t$.

Sind in A *und* B *alle von zwei Elementen erzeugte Untergruppen nilpotent, so folgen 1.b) und 2.b) schon aus 1.a) bzw. 2.a).* Φ *ist injektiv, falls* φ *und der von den* φ_i *von* A/U *nach* $A\Phi/U\Phi$ *induzierte Homomorphismus injektiv sind.*

Beweis. Jedes $x \in A$ läßt sich in der Form $x = \prod_{i=1}^{n} a_i^{k_i} \cdot g$ mit $k_i \in \mathbf{Z}$, $g \in U$ schreiben. Gilt $0 \leqq k_i < n_i$ für $1 \leqq i \leqq t$, so ist diese Darstellung eindeutig. Daher ist Φ auf A durch $x\Phi = \prod_{i=1}^{n} b_i^{k_i} \cdot g\varphi$ wohldefiniert. Offensichtlich ist $\Phi \restriction U = \varphi$ und wegen 3 auch $\Phi \restriction \langle a_i \rangle = \varphi_i$, $1 \leqq i \leqq n$.

Wir zeigen jetzt, daß $[g, a_i^m]\varphi = [g\varphi, b_i^m]$ für $g \in U$, $1 \leqq i \leqq n$ und alle $m \in \mathbf{Z}$ gilt. Nach 1 ist das richtig für $m = \pm 1$. Gilt diese Behauptung bereits für $m \geqq 1$, so ergibt sich für $m+1$ mit 1.a) aus $[g, a_i^{m+1}] = [g, a_i][g, a_i^m][g, a_i^m, a_i]$ sowie

$$[g, a_i^m, a_i]\varphi = [[g, a_i^m]\varphi, b_i] = [g\varphi, b_i^m, b_i], \quad \text{daß}$$

$$[g, a_i^{m+1}]\varphi = ([g, a_i][g, a_i^m][g, a_i^m, a_i])\varphi = [g\varphi, b_i][g\varphi, b_i^m][g\varphi, b_i^m, b_i] = [g\varphi, b_i^{m+1}].$$

Analog folgt die Behauptung für $-m-1$ aus der für $-m$ mit Hilfe von 1.b). Es folgt aber 1.b) schon aus 1.a), falls $\langle g, a_i \rangle \leqq A$ und $\langle g\varphi, b_i \rangle \leqq B$ nilpotent der Klasse c sind: es ist nämlich $[g, a^{-1}] = [a, g]^{a^{-1}} = [a, g][a, g, a^{-1}]$; schreiben wir $[\mu x, y]$ für den μ-fach iterierten rechts(!) geklammerten Kommutator $[\ldots[x, [x, y]]\ldots]$, dann folgt induktiv $[g, a_i^{-1}] = \prod_{\mu=1}^{c-1} [\mu a_i, g]$, da $[ca_i, g] = 1$ in der nilpotenten Gruppe $\langle g, a_i\rangle$ der Klasse c; mit 1.a) folgt dann $[g, a_i^{-1}]\varphi = = \prod_{\mu=1}^{c-1} [\mu a_i, g]\varphi = \prod_{\mu=1}^{c-1} [\mu b_i, g\varphi] = [g\varphi, b_i^{-1}]$, also 1.b).

Ebenso folgt 2.b) aus 2.a), wenn $\langle a_i, a_j\rangle$ und $\langle b_i, b_j\rangle$ nilpotent sind. Wie oben folgt aus 1 und 2, daß $[a_i^l, a_j^m]\varphi = [b_i^l, b_j^m]$ für $1 \leqq i, j \leqq n$ und $l, m \in \mathbf{Z}$. Wir zeigen jetzt durch Induktion über j, daß $\Phi \upharpoonright \langle a_j, \ldots, a_n, U\rangle$ ein Homomorphismus ist mit $(*)_j$: $[g, a_i^m]\varphi = [g\Phi, b_i^m]$ für $g \in \langle a_j, \ldots, a_n, U\rangle$, $1 \leqq i \leqq n$, $m \in \mathbf{Z}$. Für $j = n+1$ gilt dies nach dem bereits gezeigten und, da $\Phi \upharpoonright U = \varphi$ als Homomorphismus vorausgesetzt ist. Sei jetzt bereits bewiesen, daß $\Phi \upharpoonright \langle a_{j+1}, \ldots, a_n, U\rangle$ ein Homomorphismus mit $(*)_{j+1}$ ist, und setzen wir zur Vereinfachung $a = a_j$, $b = b_j$ und $A' = = \langle a_{j+1}, \ldots, a_n, U\rangle$. Elemente $x, y \in \langle a, A'\rangle$ haben dann die Form $x = a^k g$, $y = a^m h$ mit $k, m \in \mathbf{Z}$ bzw. $0 \leqq k, m < n_j$, falls $j \leqq t$, und $g, h \in A'$. Dann gilt $xy = a^k g a^m h = = a^{k+m} g[g, a^m]h = a^r(a^s g[g, a^m]h)$, wobei $k+m = r+s$ und $n_j | s$, $0 \leqq r < n_j$, falls $j \leqq t$, bzw. $s = 0$, falls $t < j$ und $n_j = \infty$. Mit dieser Wahl von r und s gilt $a^s g[g, a^m]h \in A'$ und weiter

$$(xy)\Phi = b^r(a^s g[g, a^m]h)\Phi = b^r b^s g\Phi[g, a^m]\Phi h\Phi =$$
$$= b^{r+s} g\Phi[g\Phi, b^m]h\Phi = b^k g\Phi \cdot b^m h\Phi = x\Phi\, y\Phi.$$

Hier ging 3 beim zweiten Gleichheitszeichen ein mit $(a^s)\Phi = (a^s)\varphi_j = b^s$ und $(*)_{j+1}$ beim dritten mit $[g, a^m]\Phi = [g\Phi, b^m]$. Damit ist $\Phi \upharpoonright \langle a_j, \ldots, a_n, U\rangle$ als Homomorphismus nachgewiesen und wir zeigen jetzt noch $(*)_j$. Ist weiter $x = a^k g$ mit $g \in A'$ und $0 \leqq k < n_j$, falls $j \leqq t$, dann ist $[a^k g, a_i^m]\varphi = [(a^k g)\Phi, b_i^m]$ für $1 \leqq i \leqq n$ und $m \in \mathbf{Z}$ zu zeigen. Hier gilt jetzt

$$[a^k g, a_i^m]\varphi = ([a^k, a_i^m][a^k, a_i^m, g][g, a_i^m])\varphi =$$
$$= [b^k, b_i^m][b^k, b_i^m, g\Phi][g\Phi, b_i^m] = [b^k g\Phi, b_i^m] = [(a^k g)\Phi, b_i^m],$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen $[a^k, a_i^m]\varphi = [b^k, b_i^m]$ nach dem vorausgehenden hatten sowie $[a^k, a_i^m, g]\varphi = \big[[a^k, a_i^m]\varphi, g\Phi\big] = [b^k, b_i^m, g\Phi]$ aus $(*)_{j+1}$ mit $[a^k, a_i^m] \in A_2 \leqq U \leqq A'$. Damit ist die Induktion durchgeführt und Φ ein Homomorphismus.

Die Behauptung zur Injektivität folgt jetzt leicht, da der durch Φ von A/U nach $A\Phi/U\Phi$ induzierte Homomorphismus mit dem von den φ_i, $i = 1 \ldots n$ induzierten übereinstimmt. ∎

Das folgende Lemma reduziert das Amalgamierungsproblem in allen Varietäten $\mathbf{K}$ auf das von endlich erzeugten Untergruppen. Eine Varietät $\mathbf{K}$ besteht aus all den Gruppen, in denen ein bestimmtes System von Identitäten von allen Elementen trivial erfüllt wird. Z.B. wird durch die Gleichung $[x, y, z] = 1$ die Klasse $\mathbf{N}_2$ definiert, durch $\big[[u, v], [x, y]\big]$ die Klasse der metabelschen Gruppen und durch x^n die Klasse der Gruppen vom Exponenten n. Wir bemerken noch, daß Varietäten abgeschlossen sind gegen Untergruppen, homomorphe Bilder und direkte Produkte und damit auch gegen die Vereinigung aufsteigender Ketten.

Lemma 5. *Seien A und B Gruppen aus der Varietät $\mathbf{K}$ mit gemeinsamer Untergruppe D. Dann existiert ein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{K}$, falls für je endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_m \in A$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ ein Amalgam von $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ mit $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ über $\langle \alpha_1, \ldots, a_m\rangle \cap \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ in $\mathbf{K}$ existiert.*

Aus modelltheoretischer Sicht folgt dies mit der Diagrammethode direkt aus dem Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik der ersten Stufe. Wir geben dennoch einen algebraischen Beweis.

BEWEIS. Wir setzen $A'=\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, $B'=\langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ und $D'=A'\cap D\cap B'$. Nach WIEGOLD ([10] Theorem 4.6) folgt aus der Existenz eines Amalgams von A' mit B' über D' in $\mathbf{K}$ die Existenz eines freien solchen Amalgams F in $\mathbf{K}$. Für alle Elemente $a_{m+1}, \ldots, a_{m+m''}\in A$ und $b_{n+1}, \ldots, b_{n+n''}\in B$ existiert ebenso ein freies Amalgam F'' in $\mathbf{K}$ von $\langle a_1, \ldots, a_{m+m''}\rangle$ mit $\langle b_1, \ldots, b_{n+n''}\rangle$ über $\langle a_1, \ldots, a_{m+m''}\rangle\cap D\cap\langle b_1, \ldots, b_{n+n''}\rangle$ und dann ein Homomorphismus $\pi'': F\to F''$, der A' und B' jeweils identisch abbildet. Wir betrachten jetzt die Vereinigung N aller Kerne solcher Homomorphismen von F in die freien Amalgame in $\mathbf{K}$ von endlich erzeugten Obergruppen von A' und B' in A bzw. B. Die Untergruppe N ist ein Normalteiler von F und schneidet A' und B' jeweils trivial, da das für alle erzeugenden Kerne gilt und je zwei von ihnen in einem dritten enthalten sind. Daher ist F/N ein Amalgam in $\mathbf{K}$ von A' mit B' über D'. Sei jetzt F'/N' zu $\langle a_1, \ldots, a_{m+m'}\rangle\geqq A'$ und $\langle b_1, \ldots, b_{n+n'}\rangle\geqq B'$ analog gebildet wie F/N. Wir wollen zeigen, daß die Identitäten auf A' und B' eine Einbettung von F/N in F'/N' induzieren. Zunächst wird durch die beiden Abbildungen ein Homomorphismus von F nach F' und damit auch einer von F nach F'/N' induziert. Ist nun π_1 der kanonische Homomorphismus von F' in ein weiteres freies Amalgam F'' in $\mathbf{K}$ von $\langle a_1, \ldots, a_{m+m'+m''}\rangle$ mit $\langle b_1, \ldots, b_{n+n'+n''}\rangle$ über $\langle a_1, \ldots, a_{m+m'+m''}\rangle\cap \cap D\cap\langle b_1, \ldots, b_{n+n'+n''}\rangle$ und π' der von F in F' sowie π'' der von F in F'', so folgt aus $\pi''=\pi'\pi_1$, daß $\mathrm{Kern}\,(\pi'')=\pi'^{-1}(\mathrm{Kern}\,(\pi_1))$ und damit $\pi'(\mathrm{Kern}(\pi''))\leqq \leqq N'$. Wir zeigen jetzt noch, daß N bereits von den Kernen solcher π'' wie eben erzeugt wird. Ist nämlich $\pi^0: F\to F^0$ ein anderer Homomorphismus, so wählen wir ein geeignetes F'' wie eben und erhalten einen Homomorphismus $\pi_0: F^0\to F''$, für den wieder $\pi''=\pi^0\pi_0$ und damit $\mathrm{Kern}\,(\pi^0)\leqq\mathrm{Kern}\,(\pi'')$ gilt. Damit haben wir $\pi'(N)\leqq N'$ gezeigt, so daß π' den gewünschten Homomorphismus von F/N nach F'/N' induziert, der A' und B' jeweils festhält. Nach der obigen Gleichung $\mathrm{Kern}\,(\pi'')=\pi'^{-1}(\mathrm{Kern}\,(\pi_1))$ ist dieser Homomorphismus injektiv und daher eine Einbettung. Wir haben damit ein gerichtetes System von Amalgamen in $\mathbf{K}$ für alle endlich erzeugten Untergruppen von A und B. Das gesuchte Amalgam von A mit B über D ist der direkte Limes dieses Systems in $\mathbf{K}$. ▮

Wir können jetzt den Hauptsatz beweisen.

Hauptsatz. *Zu* $A, B\in\mathbf{N}_2$ *mit gemeinsamer Untergruppe* $D\leqq A, B$ *existiert ein Amalgam von* A *mit* B *über* D *in* $\mathbf{N}_2$ *genau dann, wenn*

(1) $$A_2\cap D \leqq Z(B) \quad \textit{und} \quad B_2\cap D\leqq Z(A)$$

und

(2) $$\textit{für} \quad k>0,\ q_i>0,\ x_i\in A \quad \textit{und} \quad x_i'\in A_2 \quad \textit{mit} \quad x_i^{q_i}x_i'\in D,$$

$$y_i\in B \quad \textit{und} \quad y'\in B_2 \quad \textit{mit} \quad y_i^{q_i}y_i'\in D \quad (1\leqq i\leqq k) \quad \textit{sowie} \quad d\in D \quad \textit{gilt}$$

$$\prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i^{q_i}y_i'] = d \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k}[x_i^{q_i}x_i', y_i] = d.$$

Bemerkung. In (2) wird das Produkt auf der linken Seite in A berechnet und auf der rechten in B. Dies ist möglich, da $y_i^{q_i} y_i' \in D \leqq A$ vorausgesetzt ist. Betrachten wir zur Veranschaulichung von (2) den Fall $k=1$ mit $x \in A$, $x' \in A_2$, $y \in B$, $y' \in B_2$ und $x^q x'$, $y^q y' \in D$. Existiert ein Amalgam C in $\mathbf{N}_2$, so gilt $x', y' \in C_2$ und $[x, y]$ ist in C definiert. Es gilt dann $[x, y^q y'] = [x, y^q] = [x, y]^q = [x^q, y] = [x^q x', y]$. Die Bedingung (2) sorgt also im einfachsten Fall dafür, daß Elemente aus D, die im Amalgam eine gemeinsame Wurzel erhalten, in D zusammenfallen. Auf dieser Bedingung wird auch Schritt 2 der Konstruktion beruhen. Vor Schritt 1 werden wir die zu amalgamierende Untergruppe D durch Hinzunahme solcher Kommutatoren $[x, y^q y']$ und $[x^q x', y]$ aus A_2 bzw. B_2 vergrößern, was im oben skizzierten torsionsfreien Fall beim Übergang zu den divisiblen Hüllen implizit durchgeführt wird, da diese Kommutatoren Wurzeln von Elementen aus D sind:

$$[x, y^q y']^q = [x^q, y^q y'] = [x^q x', y^q y'] = [x^q x', y^q] = [x^q x', y]^q.$$

Beweis. Ist C ein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$, dann gilt $A_2 \cap D \leqq C_2 \cap D \leqq Z(C) \cap D \leqq Z(B)$ und damit (1). Die Bedingung (2) erhält man aus der Bemerkung, da in C schon alle Faktoren der Produkte übereinstimmen. Wir zeigen jetzt, daß (1) und (2) auch hinreichend für die Existenz eines Amalgams sind. $D^A = \langle d^a \mid d \in D, a \in A \rangle$ ist der von D in A erzeugte Normalteiler.

Schritt 0: Es gibt eine Obergruppe D^0 von D in D^A und in D^B, so daß
(3) Für $q > 0$, $a \in A$, $a' \in A_2$ mit $a^q a' \in D^0$ und $b \in B$, $b' \in B_2$ mit $b^q b' \in D^0$ gilt $[a, b^q b'] = [a^q a', b] \in D^0$.

Hiermit wird (2) also auf den Fall in der Bemerkung vereinfacht. Aus (3) folgt offensichtlich $(2(D^0))$, d.h. (2) mit D ersetzt durch D^0. Umgekehrt folgt (3) aus $(2(D^0))$, wenn für alle a, a', b, b' wie in (3) schon $a_0 = [a, b^q b'] \in D^0$ und $b_0 = [a^q a', b] \in D^0$ gilt. Wir wollen daher a_0 und b_0 zu D hinzunehmen und dann identifizieren, was nach der Bemerkung im Amalgam ohnehin zu geschehen hätte. Wir zeigen zuerst, daß die beiden Gruppen $D_A^0 = \langle D, a_0 \rangle \leqq D[A, D] = D^A$ und $D_B^0 = \langle D, b_0 \rangle \leqq D[B, D] = D^B$ isomorph sind. Nach (2) gilt $a_0^k \in D$ genau dann, wenn $b_0^k \in D$, und, falls $a_0^k \in D$, so ist $a_0^k = b_0^k$. Es gilt also $D \cap \langle a_0 \rangle = \langle a_0^k \rangle = \langle d \rangle$ mit $d \in D$ und $k = \circ(a_0) \bmod D$ genau dann, wenn $D \cap \langle b_0 \rangle = \langle b_0^k \rangle = \langle d \rangle$ und $k = \circ(b_0) \bmod D$. Da $a_0 \in A_2 \leqq Z(A)$ und ebenso $b_0 \in B_2 \leqq Z(B)$, folgt aus Lemma 1, daß $D_A^0 \cong \begin{array}{ccc} D & & \langle a_0 \rangle \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & \langle d \rangle & \end{array}$ sowie $D_B^0 \cong \begin{array}{ccc} D & & \langle b_0 \rangle \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & \langle d \rangle & \end{array}$, genauer $D_A^0 \cong D_B^0$, wobei D identisch auf D und a_0 auf b_0 abgebildet wird. Wir identifizieren jetzt D_A^0 und D_B^0 längs diesem Isomorphismus, im wesentlichen also a_0 mit b_0, und schreiben D^0 für beide Untergruppen.

Wir zeigen jetzt noch $(2(D^0))$. $x_i^{q_i} x_i' \in D^0$ heißt, daß es $a_i \in \langle a_0 \rangle$ gibt mit $x_i^{q_i} x_i' a_i \in D$, und $y_i^{q_i} y_i' \in D^0$, daß es $b_i \in \langle b_0 \rangle$ gibt mit $y_i^{q_i} y_i' b_i \in D$, und $d \in D^0$, daß $d = d' a_0^n = d' b_0^n$ mit $d' \in D$ und einem $n \in \mathbf{Z}$. Da $x_i' a_i \in A_2$, $y_i' b_i \in B_2$ und $a_0 = [a, b^q b']$, gilt nach (2)

$$\prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i^{q_i} y_i' b_i] \cdot a_0^{-n} = d' \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k} [x_i^{q_i} x_i' a_i, y_i] \cdot b_0^{-n} = d'.$$

Da $a_0 \in A_2$ und b_i mit einem Element aus $\langle a_0 \rangle$ identifiziert wurde, gilt $[x_i, b_i] = 1$

und analog $[a_i, y_i]=1$, da $a_i'' \in {}''\langle b_0\rangle \leqq B_2$. Damit und mit $a_0''={}''b_0$ folgt dann

$$\prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i^{q_i} y_i'] = d' a_0^n = d \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{k}[x_i^{q_i} x_i', y_i] = d' b_0^n = d.$$

Da (2) abgeschlossen ist gegen die Vereinigung aufsteigender Untergruppen D, erhalten wir (3) aus (2), wenn wir den eben durchgeführten Schritt $D \to D^0$ genügend oft wiederholen. Dabei bleibt auch (1) erhalten, da wir nur Elemente aus den Kommutatorgruppen hinzunehmen und dann identifizieren.

Schritt 1: Es gibt $A' \geqq A$ und $B' \geqq B$ in $\mathbf{N}_2$ mit $D^0 \leqq D' \leqq A', B'$ sowie

(4) $A_2' = D_2' = B_2'$ und

(5) Für $q > 0$, $a \in A'$ und $b \in B'$ mit $a^q, b^q \in D'$ gilt $[a, b^q]=[a^q, b]$.

Nach Schritt 0 gelte o.B.d.A. (1) und (3) für A, B, D. Wir nehmen jetzt nicht nur A_2 und B_2 zu D hinzu, sondern erweitern A und B so, daß die Kommutatorgruppe von D' mit denen von A' und B' übereinstimmt. Dann vereinfacht sich (3) zu (5), wobei die linke und rechte Seite der Gleichung zwar in A bzw. B berechnet werden, wegen (4) aber beide in D' liegen. Nach (1) können wir die direkten Produkte A^0 von A mit B_2 über $D \cap B_2$ und B^0 von B mit A_2 über $D \cap A_2$ bilden. Nach Korollar 2 sind die Untergruppen $\langle D, A_2, B_2\rangle$ in A^0 bzw. in B^0 isomorph, wobei D, A_2 und B_2 auf sich abgebildet werden. Die Untergruppe $\langle A_2, B_2\rangle$ ist jeweils zentral, da die eine Untergruppe die Kommutatorgruppe ist und die andere direkt amalgamiert ist. Wir wählen jetzt $U \in \mathbf{N}_2$ mit $U_2 = Z(U) \cong \cong \langle A_2, B_2\rangle$ und $Z(U)$ isoliert in U. Die Gruppe U läßt sich z.B. durch Amalgamierung zentraler Untergruppen ausgehend von $\langle A_2, B_2\rangle$ und oberen 3×3-Matrizen über $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ mit Einsen auf der Hauptdiagonalen leicht gewinnen. A' sei dann das direkte Produkt von A^0 mit U über $\langle A_2, B_2\rangle$ und analog B' das von B^0 mit U über $\langle A_2, B_2\rangle$. Wir setzen D' gleich der Untergruppe $\langle D, U\rangle$, die in A' und in B' nach Korollar 1 isomorph zu

$$\begin{array}{ccc} D & & U \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & D\cap U & \end{array}$$

ist. Dann folgt aus $U_2 \cong \langle A_2, B_2\rangle$ und $[A^0, U]=1=[B^0, U]$, daß $A_2' = A_2^0 U_2 = \langle A_2, B_2\rangle = B_2^0 U_2 = = B_2' = D_2'$, also (4).

Zum Nachweis von (5) sei $a' \in A'$ mit $a'^q \in D'$. Dann gilt $a' = ab''u$ mit $a \in A$, $b'' \in B_2$ und $u \in U$. Da alle drei Elemente kommutieren, gilt $a'^q = a^q b''^q u^q = = da^* b''^q u^q$ mit $d \in D$, $a^* \in A_2$. Daraus folgt $a^q a^{*-1} \in D$. Entsprechend folgt aus $b' = ba''v \in B'$ und $b'^q \in D'$, daß $b^q b^{*-1} \in D$ mit den analogen Bezeichnungen $b \in B$, $a'' \in A_2$, $v \in U$, $b^* \in B_2$ wie eben. Damit gilt in $A'[a', b'^q] = [ab''u, b^q a''^q v^q] = = [a, b^q][u, v^q] = [a, b^q b^{*-1}][u, v]^q$ und in B' $[a'^q, b'] = [a^q b''^q u^q, ba''v] = [a^q, b][u^q, v] = = [a^q a^{*-1}, b][u, v]^q$. Da die rechten Seiten nach (3) gleich sind folgt die Gleichheit der linken und (5).

Schritt 2: Es gelte (4) und (5) für A, B, D. Nach Lemma 5 genügt es unter der Annahme $A = \langle a_1, \ldots, a_k, D\rangle$ die Existenz eines Amalgams von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$ zu zeigen. Dazu konstruieren wir eine Obergruppe von B mit den in Lemma 4 gegebenen Eigenschaften. Sei $\circ(a_i D) = q_i$ und $a_i^{q_i} = g_i^{-1} \in D$ $(1 \leqq i \leqq k)$ — wobei $q_i = 0$, falls $\circ(a_i D) = \infty$ —, $[a_i, a_j] = z_{ij}^{-1} \in D_2$ $(1 \leqq j < i \leqq k)$ und $[a_i, d] =$

$=z_{id}^{-1}\in D_2$ $(1\leq i\leq k,\ d\in D)$; die z_{ij} und z_{id} liegen in D_2, da $A_2=D_2$ nach (4). Es sei jetzt $H\in\mathbf{N}_2$ das zweite nilpotente Produkt von B mit den unendlich zyklischen Gruppen $\langle c_1\rangle, \ldots, \langle c_k\rangle$ und N der von den Elementen

$$x_i=c_i^{q_i}g_i,\ (1\leq i\leq k),\quad [c_i, c_j]z_{ij},\ (1\leq j<i\leq k),\quad [c_i, d]z_{id},\ (1\leq i\leq k,\ d\in D)$$

erzeugte Normalteiler in H. Als erstes zeigen wir $N\cap B=1$. Ein Element $h\in N$ ist ein Produkt von Konjugierten der Erzeugenden. Da bis auf die x_i alle Erzeugenden zentral in H sind, hat h die Form

$$h=\prod_{\mu=1}^{m}(x_{\sigma_\mu}^{\delta_\mu})^{h_\mu}\cdot\prod_{1\leq j<i\leq k}([c_i,\ c_j]z_{ij})^{n_{ij}}\cdot\prod_{i=1}^{k}\prod_{d}^{*}([c_i, d]\,z_{id})^{n_{id}},$$

wobei $m\geq 0$, $\sigma_\mu\in\{1, \ldots, k\}$, $\delta_\mu=\pm 1$, $h_\mu\in H$, $(1\leq\mu\leq m)$ und n_{ij}, $n_{id}\in\mathbf{Z}$ für $1\leq j<i\leq k$ und endlich viele $d\in D$. Wir bearbeiten zunächst den ersten Faktor und ordnen die x_i lexikographisch:

$$\prod_{\mu=1}^{m}(x_{\sigma_\mu}^{\delta_\mu})^{h_\mu}=\prod_{\mu=1}^{m}x_{\sigma_\mu}^{\delta_\mu}[x_{\sigma_\mu},\ h_\mu^{\delta_\mu}]=\prod_{i=1}^{k}x_i^{m_i}\cdot\prod_{1\leq j<i\leq k}[x_i,\ x_j]^{m_{ij}}\cdot\prod_{i=1}^{k}[x_i,\ h_i'],$$

wobei $m_i=\Sigma\{\delta_\mu|\sigma_\mu=i,\ 1\leq\mu\leq m\}$, $m_{ij}=\Sigma\{\delta_\mu\delta_\nu|\sigma_\mu=i,\ \sigma_\nu=j,\ 1\leq\mu<\nu\leq m\}$, da $x^\delta y^{\delta'}=y^{\delta'}x^\delta[x^\delta,\ y^{\delta'}]=y^{\delta'}x^\delta[x,\ y]^{\delta\delta'}$ im Fall einer Vertauschung, und

$$h_i'=\Pi\{h_\mu^{\delta_\mu}|\sigma_\mu=i,\ 1\leq\mu\leq m\},$$

da

$$\Pi\{[x_i,\ h_\mu^{\delta_\mu}]|\sigma_\mu=i,\ 1\leq\mu\leq m\}=[x_i,\ \Pi\{h_\mu^{\delta_\mu}|\sigma_\mu=i,\ 1\leq\mu\leq m\}].$$

Aus $x_i=c_i^{q_i}g_i$ erhalten wir ohne Berücksichtigung der Indizes $x^m=(c^q g)^m=$ $=c^{qm}g^m[g,\ c^q]^{\binom{m}{2}}$. Die Formel $(xy)^m=x^m y^m[y,\ x]^{\binom{m}{2}}$, falls $\langle x,\ y\rangle\in\mathbf{N}_2$, ist wohlbekannt für $m\geq 0$ und läßt sich für $-m$ wie folgt einsehen:

$$(xy)^{-m}=(y^{-1}x^{-1})^m=y^{-m}x^{-m}[x^{-1},\ y^{-1}]^{\binom{m}{2}}=$$
$$=x^{-m}y^{-m}[y^{-m},\ x^{-m}][x,\ y]^{\binom{m}{2}}=x^{-m}y^{-m}[y,\ x]^{m^2-\binom{m}{2}}=x^{-m}y^{-m}[y,\ x]^{\binom{-m}{2}}.$$

Für die Terme im zweiten Faktor gilt für $1\leq j<i\leq k$

$$[x_i,\ x_j]^{m_{ij}}=[c_i^{q_i}g_i,\ c_j^{q_j}g_j]^{m_{ij}}=[c_i,\ c_j]^{q_iq_jm_{ij}}[c_i,\ g_j]^{q_im_{ij}}[c_j,\ c_i]^{-q_jm_{ij}}[g_i,\ g_j]^{m_{ij}}.$$

Schreiben wir $h_i'=\prod_{j=1}^{k}c_j^{l_{ij}}b_ih_i''$ mit $l_{ij}\in\mathbf{Z}$, $b_i\in B$ und $h_i''\in H_2$, dann gilt für die Terme im dritten Faktor für $1\leq i\leq k$

$$[x_i,\ h_i']=\left[c_i^{q_i}g_i,\ \prod_{j=1}^{k}c_j^{l_{ij}}b_ih_i''\right]=\prod_{j=1}^{k}([c_i,\ c_j]^{q_il_{ij}}[c_j,\ g_i]^{-l_{ij}})\cdot[c_i,\ b_i]^{q_i}[g_i,\ b_i].$$

Für den zweiten Faktor von h erhalten wir $\prod_{j<i}[c_i,\ c_j]^{n_{ij}}z_{ij}^{n_{ij}}$ und für den dritten $\prod_i[c_i,\ d_i]z_i$ mit $d_i=\prod_d^{*}d^{n_{id}}$ sowie $z_i=\prod_d^{*}z_{id}^{n_{id}}$. Sammeln wir die Terme aus allen

fünf Umformungen, so ergibt sich für $h \in N$

$$h = \prod_i c_i^{q_i m_i} g_i^{m_i} [g_i, c_i]^{q_i \binom{m(i)}{2}} .$$

$$\cdot \prod_{j<i} [c_i, c_j]^{q_i q_j m_{ij}} [c_i, g_j]^{q_i m_{ij}} [c_j, g_i]^{-q_j m_{ij}} [g_i, g_j]^{m_{ij}}$$

$$\cdot \prod_{i,j} [c_i, c_j]^{q_i l_{ij}} [c_j, g_i]^{-l_{ij}} \cdot \prod_i [c_i, b_i]^{q_i} [g_i, b_i] \cdot$$

$$\cdot \prod_{j<i} [c_i, c_j]^{n_{ij}} z_{ij}^{n_{ij}} \cdot \prod_i [c_i, d_i] z_i .$$

Zum Nachweis von $N \cap B = 1$ betrachten wir jetzt das Bild von $h \in N \cap B$ unter verschiedenen Homomorphismen, die durch solche auf B und auf den $\langle c_i \rangle$ auf H induziert werden. Da $h \in B$ vorausgesetzt ist, wird h dabei immer wie ein Element von B abgebildet. Aus $c_i \mapsto 1 \in B$ und id_B erhalten wir

$$h = h_1 = \prod_i g_i^{m_i} \cdot \prod_{j<i} [g_i, g_j]^{m_{ij}} \cdot \prod_i [g_i, b_i] \cdot \prod_{j<i} z_{ij}^{n_{ij}} \cdot \prod_i z_i .$$

Aus $c_i \mapsto u_i \in X \leqq B \times X$ und $\mathrm{id}_B \colon B \to B \times X$ mit einer abelschen Gruppe X erhalten wir $h = \prod_i u_i^{q_i m_i} \cdot h_1$, also wegen $h = h_1$ dann $\prod_i u_i^{q_i m_i} = 1$. Da X und die $u_i \in X$ beliebig gewählt werden können, folgt $m_i = 0$ für alle $1 \leqq i \leqq k$. Damit fällt in h und in h_1 der erste Faktor weg und h ist zentral in H. Da $h = h_1$, ist das Produkt h_2 der restlichen Faktoren in h gleich 1, also

$$1 = h_2 = \prod_{j<i} [c_i, c_j]^{q_i q_j m_{ij} + q_i l_{ij} - q_j l_{ji} + n_{ij}} \cdot \prod_{j<i} [c_i, g_j]^{q_i m_{ij}} [c_j, g_i]^{-q_j m_{ij}}$$

$$\cdot \prod_{i,j} [c_j, g_i]^{-l_{ij}} \cdot \prod_i [c_i, b_i]^{q_i} [c_i, d_i],$$

und h_2 wird von jedem Homomorphismus von H auf 1 abgebildet. Wählen wir für feste $j < i$ Elemente $u, v \in X \in \mathbf{N}_2$ mit $[u, v]$ von unendlicher Ordnung, dann gilt für den durch $c_i \mapsto u$, $c_j \mapsto v$, $c_l \mapsto 1$ $(l \neq i, j)$ und $B \to 1$ definierten Homomorphismus von H nach X, daß $h_2 \mapsto 1 = [u, v]^{q_i q_j m_{ij} + q_i l_{ij} - q_j l_{ji} + n_{ij}}$ und

$$(\#) \qquad q_i q_j m_{ij} + q_i l_{ij} - q_j l_{ji} + n_{ij} = 0 \quad \text{für alle} \quad j < i.$$

Damit ist der erste Faktor von h_2 gleich 1.

Sei jetzt $\langle c \rangle$ unendlich zyklisch und i fest. Durch $c_i \mapsto c$, $c_j \mapsto 1$ $(j \neq i)$ und $\mathrm{id}_B \colon B \to B(2) \langle c \rangle$ wird h_2 abgebildet auf

$$1 = \prod_{j<i} [c, g_j]^{q_i m_{ij}} \cdot \prod_{j>i} [c, g_j]^{-q_i m_{ji}} \cdot \prod_j [c, g_j]^{-l_{ji}} \cdot [c, b_i]^{q_i} [c, d_i] =$$

$$= \Big[c, \prod_{j<i} g_j^{q_i m_{ij}} \cdot \prod_{j>i} g_j^{-q_i m_{ji}} \cdot \prod_j g_j^{-l_{ji}} \cdot b_i^{q_i} d_i\Big].$$

Aus Lemma 3 folgt, daß die zweite Komponente des Kommutators in $D_2 = B_2$ liegt. Nun liegen die g_j und d_i in D, so daß auch $b_i^{q_i} \in D$. Wenden wir (5) auf

a_i und b_i an, so erhalten wir $[a_i, b_i^{q_i}]=[a_i^{q_i}, b_i]=[g_i^{-1}, b_i]$ wegen $a_i^{q_i}=g_i^{-1}$. Damit gilt in A

$$1=[a_i, \prod_{j<i} g_j^{q_i m_{ij}} \cdot \prod_{j>i} g_j^{-q_i m_{ji}} \cdot \prod_j g_j^{-l_{ji}} b_i^{q_i} d_i]=$$

$$=\prod_{j<i}[a_i, a_j]^{-q_i q_j m_{ij}} \cdot \prod_{j>i}[a_i, a_j]^{q_i q_j m_{ji}} \cdot \prod_j [a_i, a_j]^{q_j l_{ji}} \cdot [g_i^{-1}, b_i][a_i, d_i],$$

und zwar für alle $i=1 \dots k$. Multiplizieren wir alle diese Terme, so folgt

$$1=\prod_{j<i}[a_i, a_j]^{-2q_i q_j m_{ij}+q_j l_{ji}-q_i l_{ij}} \cdot \prod_i [g_i^{-1}, b_i][a_i, d_i].$$

Nun ist nach $(\#)$ $-q_i q_j m_{ij}-q_i l_{ij}+q_j l_{ji}=n_{ij}$ für $j<i$, so daß aus $[a_i, a_j]^{-q_i q_i m_{ij}+n_{ij}}=[g_i, g_j]^{-m_{ij}} \cdot z_{ij}^{-n_{ij}}$ und $[a_i, d_i]=\prod_d^{*} [a_i, d]^{n_{id}}=z_i^{-1}$ dann

$$1=\Big(\prod_{j<i}[g_i, g_j]^{m_{ij}} z_{ij}^{n_{ij}} \cdot \prod_i [g_i, b_i] z_i\Big)^{-1}=h^{-1}$$

folgt, und die Behauptung $N \cap B=1$ gezeigt ist.

Setzen wir $G=H/N \in \mathbf{N}_2$, dann wird B also durch die Projektion $^{-}\colon H \to H/N$ in G eingebettet. Wir müssen noch zeigen, daß die Untergruppe $\langle \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_k, D\rangle$ in G zu A isomorph ist. Da $\bar{c}_i^{q_i}=g_i^{-1}=a_i^{q_i}$, wird durch $a_i \mapsto \bar{c}_i$ ein Homomorphismus $\varphi_i\colon \langle a_i\rangle \to G$ definiert. Nach Konstruktion von N gelten die Bedingungen 1—3 von Lemma 4 für $A_2 \leqq D \leqq A$, $\varphi\colon D \to H \to G$ und die φ_i $(1 \leqq i \leqq k)$, so daß ein Homomorphismus Φ von A nach G existiert, der φ und die φ_i fortsetzt. Φ ist injektiv, falls zusätzlich die von den φ_i induzierte Abbildung von A/D nach $A\Phi/D\Phi$ injektiv ist. Hierzu betrachten wir den durch $c_i \mapsto a_i D$ $(1 \leqq i \leqq k)$ und $B \to 1$ induzierten Homomorphismus von H auf A/D. Sein Kern umfaßt N und B, so daß wir einen Homomorphismus von G/B auf A/D erhalten, der $\bar{c}_i B$ auf $a_i D$ abbildet. Nun ist $G/B \geqq A\Phi \cdot B/B \cong A\Phi/A\Phi \cap B=A\Phi/D\Phi$, und $A\Phi/D\Phi$ wird immer noch surjektiv auf A/D abgebildet. Da die Hintereinanderschaltung $a_i D \mapsto a_i \Phi D\Phi=\bar{c}_i D\Phi \mapsto a_i D$ die Identität auf A/D liefert, ist die erste Abbildung injektiv. Nach Lemma 4 ist Φ eine Einbettung von A in G, die D identisch auf die Untergruppe $D \leqq B \leqq G$ abbildet. Damit ist G ein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$. ∎

Korollar 3. *Sind A und B aus $\mathbf{N}_2$ mit gemeinsamer Untergruppe D^0 und ist D^0 ein Normalteiler in A oder B, so sind* (1) *und* (3) *notwendig und hinreichend für die Existenz eines Amalgams in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D^0.*

Beweis. Da (3) aus (2) folgt, genügt es noch (2) zu zeigen. Ist D^0 ein Normalteiler in A, dann liegen die Faktoren auf der linken Seite des Produkts in (2) bereits alle in D^0 und sind nach (3) gleich denen auf der rechten. ∎

Wir betrachten noch einige Spezialfälle, in denen sich die Bedingungen (1) und (2) des Hauptsatzes weiter reduzieren lassen.

Satz 1. *Sind A und B torsionsfrei in $\mathbf{N}_2$ mit gemeinsamer Untergruppe D, so ist* (1) *notwendig und hinreichend für die Existenz eines torsionsfreien Amalgams in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D.*

Beweis. Wir zeigen, daß (2) für torsionsfreie Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ immer erfüllt ist. Mit den Bezeichnungen aus (2) sei $q=\prod_{i=1}^{k} q_i$ und $r_i=q/q_i$. Gilt nun in A, daß $\Pi[x_i, y_i^{q_i}y_i']=d\in D$, so folgt weiter

$$d^q = \prod [x_i^{q_i}, y_i^{q_i}y_i']^{r_i} = \prod [x_i^{q_i}x_i', y_i^{q_i}y_i']^{r_i}.$$

Da die Komponenten des Kommutators auf der rechten Seite in D liegen, gilt diese Gleichung auch in B. Wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln in B, folgt daraus $d=\Pi[a_i^{q_i}a_i', b_i]$ in B. Damit ist (2) gezeigt und nach dem Hauptsatz existiert ein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$. Die Faktorgruppe nach der Torsionsgruppe ist dann ein torsionsfreies Amalgam von A mit B über D. ∎

Satz 2. *1. Sind A, B aus $\mathbf{N}_2$ mit gemeinsamer Untergruppe D, und ist D co-zentral in B, dann existiert ein Amalgam in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D genau dann, wenn*

$(*)$ *für $q>0$, $a\in A$ mit $a^q\in A_2D$ und $b\in B\setminus D$ mit $b^q\in D$ gilt $[a, b^q]=1$.*

2. Sind A, B aus $\mathbf{N}_2$ mit gemeinsamer Untergruppe D, und ist D zentral in B, dann existiert ein Amalgam in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D genau dann, wenn (1) und für $q>0$, $a\in A$ mit $a^q\in A_2D$ und $b\in B$, $b'\in B_2$ mit $b^qb'\in D$ gilt $[a, b^qb']=1$.

Beweis. Die Behauptung 2 folgt sofort aus Korollar 3 und der Zentralität von D in B. Entsprechend ist zu 1 wieder (3) zu zeigen. Da D co-zentral in B ist, gilt $B=\langle D, Z\rangle$ mit $Z\leqq Z(B)$ sowie $B_2=D_2$. Jedes $b\in B$ hat die Form $b=dz$ mit $d\in D$, $z\in Z\setminus D$. Gilt $b^qb'\in D$ für dieses b und ein $b'\in B_2$, so folgt $d^qz^qb'\in D$ und $z^q\in D$. Sei $a\in A$ und $a'\in A_2$ mit $a^qa'\in D$. In A gilt nun $[a, d^qb']=$ $=[a^qa', d]$ und nach $(*)$ gilt $[a, z^q]=1=[a^qa', z]$ so daß

$$[a, b^qb'] = [a, d^qz^qb'] = [a, d^qb'][a, z^q] = [a^qa', d][a^qa', z] = [a^qa', dz] = [a^qa', b],$$

und (3) ist gezeigt. Es gilt auch (1), da $A_2\cap D\leqq Z(D)\leqq Z(B)$ und $B_2\cap D=D_2\leqq$ $\leqq Z(A)$. Nach dem Hauptsatz existiert daher das Amalgam in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D. ∎

Korollar 4. *Sind A, B aus $\mathbf{N}_2$ mit gemeinsamer Untergruppe D, dann existiert ein Amalgam in $\mathbf{N}_2$ von A mit B über D, falls*

1. B abelsch und $(*)$ gilt oder

2. B zyklisch, $B=\langle b\rangle$, $D=\langle b^r\rangle$ und für $a\in A$ mit $a^r\in A_2D$ gilt $[a, b^r]=1$.

Allenby [1] gab für endlich zyklisches B und die schärfere Forderung $D=A\cap B$ die äquivalente Bedingung

"*Für $a\in A$ mit $a^r\in A_2DA^{\circ(B)}$ gilt $[a, b^r]=1$*", *wobei* $A^n=\langle a^n | a\in A\rangle$.

Wir haben bisher nur über Amalgame von Gruppen gesprochen. Entsprechend kann man Amalgame anderer Strukturen definieren.

Korollar 5. *Seien L und M nilpotente Lie-Algebren der Klasse zwei von Primzahlcharakteristik $p\neq 2$ mit gemeinsamer Unteralgebra N. Dann existiert eine* *nilpotente Lie-Algebra der Klasse zwei, die* L *und* M *über* N *amalgamiert, genau dann, wenn*

$(1)_{Lie}$ $[L, L] \cap N \leqq Z(M)$ *und* $[M, M] \cap D \leqq Z(L)$ *und*

$(2)_{Lie}$ *für* $k>0$, $q_i \neq 0$, $x_i \in L$ *und* $x_i' \in [L, L]$ *mit* $q_i x_i + x_i' \in N$ *sowie* $y_i \in M$ *und* $y_i' \in [M, M]$ *mit* $q_i y_i + y_i' \in N$ $(1 \leqq i \leqq k)$ *gilt für* $d \in N$

$$\sum_{i=1}^{k} [x_i, q_i y_i + y_i'] = d \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} [q_i x_i + x_i', y_i] = d.$$

Hierbei bezeichnet [ ] die Lie Multiplikation und $Z(M) = \{z \in M \mid [x, z] = 0$ für alle $x \in M\}$ das Zentrum von M.

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem Hauptsatz und der Korrespondenz zwischen nilpotenten Lie-Ringen und nilpotenten Gruppen (vgl. [6], Theorem II. 4.6). $p>2$ wird benötigt, da in der Übersetzung $[L, L]$ und $[M, M]$ 2-dividierbar sein müssen. Der Fall $p=2$ läßt sich ebenso behandeln, falls $[L, L]$ und $[M, M]$ als abelsche Gruppen mit der Addition Rang höchstens 1 haben. Im torsionsfreien Fall erhalten wir aus Satz 1 (vgl. [6], Theorem II. 4.15).

Korollar 6. *Sind* L *und* M *nilpotente Lie-Algebren der Klasse zwei über* $\mathbf{Q}$ *mit gemeinsamer Unteralgebra* N, *dann existiert eine nilpotente Lie-Algebra der Klasse zwei über* $\mathbf{Q}$, *die* L *und* M *über* N *amalgamiert, genau dann, wenn* $(1)_{Lie}$ *gilt.*

Diese Aussage gilt auch für torsionsfreie nilpotente Lie-Ringe, da diese sich in entsprechende Lie-Algebren über $\mathbf{Q}$ einbetten lassen.

Literaturverzeichnis

[1] R. B. J. T. ALLENBY, On amalgams of nilpotent groups, *J. London Math. Soc.* **43** (1968), 707—713.
[2] G. BAUMSLAG, Lecture notes on nilpotent groups, AMS, *Providence*, 1971.
[3] G. HIGMAN, Amalgams of *p*-groups, J. Algebra **1** (1964), 301—305.
[4] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Springer, *Berlin*, 1967.
[5] A. G. KUROSCH, Gruppentheorie I/II, 2. Aufl., Akademie-Verlag, *Berlin*, 1970/72.
[6] M. LAZARD, Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **71** (1954), 101—190.
[7] B. J. MAIER, Existenziell abgeschlossene lokal endliche *p*-Gruppen, *Arch. Math.* **37** (1981), 113—128.
[8] B. H. NEUMANN, On amalgams of periodic groups, *Proc. Roy. Soc. (London)* A **255** (1960), 477—489.
[9] L. RIBES, On amalgamated products of profinite groups, *Math. Z.* **123** (1971), 357—364.
[10] J. WIEGOLD, Nilpotent products of groups with amalgamations, *Publ. Math. (Debrecen)* **6** (1959), 131—168.
[11] J. WIEGOLD, Some remarks on generalized products of groups, *Math. Z.* **75** (1961), 57—78.
[12] J. WIEGOLD, Soluble embeddings of group amalgams, *Publ. Math. (Debrecen)* **12** (1965), 227—230.

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 9. August 1982.)