Fehleranalyse des divergenzpunktlosen Verfahrens von allgemeinen Berührungsellipsen

Von VALÉRIA KONTOR (Miskolc)

Zusammenfassung

Die Arbeit befaßt sich mit der Fehlerabschätzung zum divergenzpunktlosen, durch Berührungsellipsen erzeugten Iterationsverfahren von [1]. Anschließend wird der Wert der asymptotischen Fehlerkonstante bestimmt.

Die durch Berührungsellipsen mit einer allgemeinen Gleichung erzeugten gleichungslösenden Iterationen ohne Divergenzpunkt werden in der Arbeit [1] von Zoltán SZABÓ und Magdolna DEUTSCH untersucht. Es wird der Konvergenzsatz dieser Methode bewiesen, dann eine durch Affinität erzeugte Ellipse angewendet und zuletzt die Konvergenzordnung bestimmt.

Im Falle Punkt I. [1] führen wir eine Fehlerabschätzung durch und bestimmen den Wert der asymptotischen Fehlerkonstante.

Es erweist sich als notwendig, die Methode kurz darzulegen.

Es sei die Funktion $f(x)$ in der Gleichung

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

reell, im Intervall $I=[a, b]$ definiert, hier zweimal differenzierbar und

$$\begin{cases} |f(x)| \leqq M \\ |f'(x)| \leqq M_1 \neq 0 \\ |f''(x)| \leqq M_2, \quad x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Von den Iterationsverfahren zur Bestimmung der Nullstelle in I der Gleichung (1) wird gezeigt, daß diese bei Erfüllung der Voraussetzungen (2) in I immer konvergent ist.

Man nehme die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ist der Wert $f(x_0)$ positiv (negativ), dann wird der Ellipsenbogen

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2-x^2} \quad \left(y = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2-x^2}\right)$$

durch Parallelverschiebung an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ der Funktion $f(x)$ so angepaßt, daß dort dann ihre Berührungslinie gemeinsam ist $(x_0 \in I)$. Die Gleichung der so erzeugten Ellipse hat die Form:

$$e(x) = A + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - (x-B)^2}.$$

Die Konstanten A und B resultieren aus den Gleichungen

$$f(x_0) = e(x_0),$$

$$f'(x_0) = e'(x_0),$$

das heißt

$$A + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - (x_0 - B)^2} = f(x_0),$$

$$-\operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{x_0 - B}{\sqrt{a^2 - (x_0 - B)^2}} = f'(x_0).$$

Daraus ergeben sich

$$B = x_0 + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{a^2 f'(x_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_0)}}$$

und

$$A = f(x_0) - \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_0)}}.$$

Man findet also

$$(3) \qquad e(x) = f(x_0) \mp \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_0)}} \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(x - x_0 \mp \frac{a^2 f'(x_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_0)}}\right)^2},$$

wo bei positivem (negativem) Wert von $f(x_0)$ immer das obere (untere) Vorzeichen gewählt wird.

Wegen geometrischer Überlegungen gilt

$$|f(x) \leqq M \leqq b.$$

Lemma 1. *Sind die Bedingungen* (2) *erfüllt und setzt man*

$$b \geqq M,$$

$$\frac{b}{a} \geqq 2{,}2 M_1,$$

$$\frac{b}{a^2} \geqq 2 M_2,$$

dann ist der Wert der durch die Gleichheit (3) *definierten Funktion* $e(x)$ — *innerhalb ihres Definitionsbereiches — bei positivem* $f(x_0)$ *nicht größer, bei negativem* $f(x_0)$ *nicht kleiner als beim Funktionswert* $f(x)$ [1].

Satz 1. *Wenn die Bedingungen* (2) *erfüllt sind, außerdem*

$$b \geqq M$$

$$\frac{b}{a} \geqq 2{,}2 M_1$$

$$\frac{b}{a^2} \geqq 2 M_2$$

und bei einem beliebigen Ausgangspunkt $x_0 \in (a, b) = I$, $f(x_0) \neq 0$ *ist, dann konvergiert die durch die rekursive Formel*

$$x_{n+1} = x_n + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{a^2 f'(x_n)}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_n)}} \pm a \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{|f(x_n)|}{b} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x_n)}}\right]^2} \tag{4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definierte monotone Folge gegen die nächste Nullstelle $\alpha \in I$ *rechts oder links vom Punkt* x_0 *der Funktion* $f(x)$ *abhängig davon, ob das obere oder untere Vorzeichen konsequent in Betracht genommen wurde. Ist* $\alpha \notin I$, *dann verläßt die Folge* $\{x_n\}$ *die Strecke* I [1].

1. Die Fehlerabschätzung

Man nehme $L_i = \dfrac{M_i}{m_1}$ $(i = 1, 2)$, wo die Werte von M_i die oberen Grenzen im Bedingungssystem (2), sowie m_1 die untere Grenze ist, das $(= m_1)$ in Sätzen der Fehlerabschätzung [3, 4] vorkommt und die Bedingungen der Relationen

$$0 < m_1 \leqq |f'(x)|, \quad x \in [x_0, \alpha] \subset I \tag{5}$$

erfüllt. Es kann nun gezeigt werden, daß bei einfachen Nullstellen und bei (5) auch die Fehlerabschätzungen der tangentialen Ellipse die Form

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqq K |x_n - \alpha|^2$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqq K_1 |x_{n+1} - x_n|^3 + K_2 |x_{n+1} - x_n|^2$$

haben, wo die Konstanten von der Methode abhängig sind.

Satz 2. *Wenn die Bedingungen des Satzes* 1 *erfüllt sind, sowie* $b \geqq 2$ *ist, ferner wenn von einem beliebigen Ausgangspunkt* $x_0 \in I$ *ausgehend die durch die Iterationsformel* (4) *erzeugte Punktfolge* $\{x_n\}$ *gegen eine einfache Nullstelle* $\alpha (\in I)$ *der Funktion* $f(x)$ *konvergiert und die Relationen* (5) *bestehen, dann sind für den Fehler* ε_{n+1} *der Approximation* x_{n+1} *die folgenden Abschätzungen gültig:*

1° $$|\varepsilon_{n+1}| \leqq \left(\frac{1}{a} \cdot N + L_2\right) \cdot |\varepsilon_n|^2$$

2° $$|\varepsilon_{n+1}| \leqq \left(\frac{N}{a} L_2 \cdot |d_n|^3 + \left(\frac{N}{a} + 2 L_1 L_2\right) \cdot |d_n|^2\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei

$$\varepsilon_n = \alpha - x_n, \quad d_n = x_{n+1} - x_n, \quad N = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + M_1^2}}{m_1}$$

ist. (Vgl. mit [3] und [4].)

Beweis. Aus der Formel (4) läßt sich der Wert von $f(x_n)$ ableiten:

$$f(x_n) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2}} - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \left(x_{n+1} - x_n - \frac{a^2 f'}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2}}\right)^2},$$

$$f' = f'(x_n).$$

Man nehme

$$g' = \frac{f'(x_n)}{b}$$

$$f(x_n) = b\left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 g'^2}} - \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - \left(d_n - \frac{a^2 g'}{\sqrt{1 + a^2 g'^2}}\right)^2}\right).$$

Bei $\sigma = \frac{a \cdot |g'|}{\sqrt{1 + a^2 g'^2}}$ ist

$$\sqrt{1 - \sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 g'^2}}.$$

Wir erhalten

$$f(x_n) = b \cdot \left(\sqrt{1 - \sigma^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{d_n}{a} - \sigma\right)^2}\right).$$

Wird der Mittelwertsatz angewendet, so gilt

$$f(\alpha) - f(x_n) = (\alpha - x_n) \cdot f'(\xi), \quad x_n < \xi < \alpha,$$

d.h.

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} \quad (\text{falls } f(x_n) \neq 0 \text{ ist}).$$

Daraus ergibt sich (im Fall $f(x_0) > 0$, $x_0 < \alpha$)

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n = b \cdot \frac{\sqrt{1 - \sigma^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{d_n}{a} + \sigma\right)^2}}{|f'(\xi)|} - d_n$$

$$\varepsilon_{n+1} = b \cdot \frac{\frac{d_n^2}{a^2} + \frac{2 d_n \cdot \sigma}{a}}{|f'(\xi)| \cdot \left(\sqrt{1 - \sigma^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{d_n}{a} + \sigma\right)^2}\right)} - d_n$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2}}{a^2 m_1} \cdot d_n^2 + \left(\frac{2|g'|}{|f'(\xi)|} - 1\right) \cdot d_n.$$

Aufgrund der Bedingung $b \geqq 2$ ist das zweite Glied der rechten Seite nicht größer als

$$(6) \qquad \left(\left|\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\right| - 1\right) \cdot d_n = \frac{f'(\xi) - f'(x_n)}{|f'(\xi)|} \cdot d_n = \frac{f''(\eta) \cdot (\xi - x_n)}{|f'(\xi)|} \cdot d_n \leqq$$

$$\leqq \frac{M_2}{m_1}(\xi - x_n) \cdot d_n = L_2(\xi - x_n) \cdot d_n, \quad \eta \in (x_n, \xi).$$

Weil $|d_n| \leqq |\varepsilon_n|$ und $|\xi - x_n| < |\varepsilon_n|$ ist, gilt

$$\left(\left|\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\right| - 1\right) \cdot d_n \leqq L_2 \cdot |\varepsilon_n|^2.$$

Aus den vorher gesagten folgt also, daß

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqq \frac{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2}}{a^2 m_1} \cdot d_n^2 + L_2 \cdot |\varepsilon_n|^2 \leqq \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + M_1^2}}{m_1} |\varepsilon_n|^2 + L_2 \cdot |\varepsilon_n|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{a} \cdot N + L_2\right) \cdot |\varepsilon_n|^2$$

ist, wobei

$$N = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + M_1^2}}{m_1} \quad \text{und} \quad L_2 = \frac{M_2}{m_1}$$

ist.

Wir wollen die Ungl. (6) eingehender studieren:

$$\xi - x_n < \varepsilon_n = \frac{f(x_n)}{|f'(\xi)|} = \frac{b}{|f'(\xi)|} \cdot \frac{\frac{d_n^2}{a^2} + \frac{2 d_n \sigma}{a}}{\sqrt{1 - \sigma^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{d_n}{a} + \sigma\right)^2}} \leqq$$

$$\leqq \frac{b}{a^2 m_1} \cdot \frac{d_n^2 + 2a \cdot d_n \cdot \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2}}{a^2 m_1} d_n^2 + \frac{2|f'|}{m_1} \cdot d_n \leqq$$

$$\leqq \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + M_1^2}}{a \cdot m_1} \cdot d_n^2 + \frac{2M_1}{m_1} \cdot d_n = \frac{N}{a} \cdot d_n^2 + 2L_1 d_n$$

wobei $L_1 = M_1/m_1$ ist. Daraus folgt:

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqq \frac{\sqrt{b^2+a^2f'^2}}{a^2 m_1} \cdot d_n^2 + \left(\frac{2|g''|}{|f'(\xi)|} - 1\right) \cdot d_n \leqq \frac{1}{a} \cdot N \cdot |d_n|^2 +$$

$$+ L_2(\xi - x_n) \cdot |d_n| \leqq \frac{1}{a} \cdot N \cdot |d_n|^2 + L_2\left(\frac{N}{a} \cdot |d_n|^2 + 2L_1 \cdot |d_n|\right) \cdot d_n =$$

$$= \frac{N}{a} \cdot L_2 \cdot |d_n|^3 + \left(\frac{N}{a} + 2L_1 L_2\right) \cdot |d_n|^2.$$

Man erhält also

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqq K|\varepsilon_n|^2,$$

und $|\varepsilon_{n+1}| \leqq K_1 \cdot |d_n|^3 + K_2 \cdot |d_n|^2$, wobei $K = \frac{1}{a} \cdot N + L_2$, $K_1 = \frac{1}{a} N L_2$ und $K_2 = \frac{N}{a} + 2L_1 L_2$ ist. In den anderen Fällen kann der Beweis ähnlich durchgeführt werden.

2. Die asymptotische Fehlerkonstante

Satz 3. *Die Fehlerkonstante der Methode der allgemeinen Berührungsellipse ist von der Gestalt:*

$$C = \left|\frac{b^{-2} \cdot \delta^{3/2} + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot a^2 f''(\alpha)}{2a^2 f'(\alpha)}\right|,$$

wobei $\delta = b^2 + a^2 f'^2(\alpha)$ *ist.* (Vgl. mit [3] und [4].)

Beweis. Es ist bekannt, daß sich der Wert der asymptotischen Fehlerkonstante eines beliebigen Iterationsverfahrens $x_{n+1} = F(x_n)$ der Ordnung p durch die Formel

$$C = \frac{1}{p!}|F^{(p)}(\alpha)|$$

ausdrücken läßt [2, 5]. Es gilt nach dem Kapitel IV der Arbeit [1] $p = 2$.

Es ist also

$$C = \frac{1}{2}|F''(\alpha)|.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$s = \operatorname{sign}(f(x_0))$$

ein. Da

$$\operatorname{sign}(f'(\alpha)) = -s$$

ist, besteht die Gleichheit:

$$|f'(\alpha)| = -s \cdot f'(\alpha).$$

Die Grundfunktion für die Methode der Berührungsellipsen ist

$$F(x) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{a^2 f'(x)}{\sqrt{b^2+a^2f'^2(x)}} + a \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{|f(x)|}{b} - \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2f'^2(x)}}\right]^2},$$

das heißt

$$F(x) = x + s \cdot a^2 \cdot \frac{g'(x)}{H(x)} + a \cdot G(x),$$

wobei

$$G(x) = \sqrt{1 - \left[|g(x)| - \frac{1}{H(x)}\right]^2},$$

$$H(x) = \sqrt{1 + a^2 g'^2(x)},$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{b}$$

ist. Man bilde die Ableitungen

$$F'(x) = 1 + s \cdot a^2 \cdot \frac{g'' \cdot H - g' \cdot H'}{H^2} + a \cdot G'$$

und

$$F''(x) = s \cdot a^2 \cdot H^{-3}[H(g''' \cdot H - g' \cdot H'') - 2H'(g'' \cdot H - g' \cdot H')] + a \cdot G'',$$

wobei

$$G' = -\frac{1}{G} \cdot \left(|g| - \frac{1}{H}\right) \cdot \left(s \cdot g' + \frac{H'}{H^2}\right)$$

und

$$G''(\alpha) =$$

$$= \left[\frac{H^2}{a^2 \cdot g'^2}\left\{\frac{a \cdot |g'|}{H}\left[\left(\frac{s \cdot g''}{H} - \frac{2H'^2 - H \cdot H''}{H^4}\right) - \left(s \cdot g' + \frac{H'}{H^2}\right)^2\right] - \frac{G'}{H}\left(s \cdot g' + \frac{H'}{H^2}\right)\right\}_{x=a}\right] =$$

$$= \frac{s}{a \cdot g'}\left(\frac{H^3}{a^2} + s \cdot g'' - \frac{a^2 \cdot g' \cdot g'''}{H^3} + \frac{3a^4 \cdot g'^2 \cdot g''^2}{H^5}\right)\Bigg|_{x=\alpha}$$

gilt.

Aus den vorher gesagten geht hervor, daß

$$F''(\alpha) = \frac{s \cdot a^2}{H^2}\left(g''' \cdot H - \frac{3a^2 \cdot g' \cdot g''^2}{H} - \frac{a^2 \cdot g'^2 \cdot g'''}{H} + \frac{3a^4 \cdot g'^3 \cdot g''^2}{H^3}\right) +$$

$$+ \frac{s}{g'}\left(\frac{H^3}{a^2} + s \cdot g'' - \frac{a^2 \cdot g' \cdot g'''}{H^3} + \frac{3a^4 \cdot g'^2 \cdot g''^2}{H^5}\right) = \frac{s \cdot H^3 + a^2 \cdot g''}{a^2 \cdot g'},$$

mithin

$$s \cdot F''(\alpha) = \frac{H^3 + s \cdot a^2 \cdot g''}{a^2 \cdot g'}$$

ist.

Der Wert der Fehlerkonstante lautet also:

$$C = \frac{1}{2} F''(\alpha) = \left|\frac{b^{-2} \cdot (b^2 + a^2 f'^2)^{3/2} + s \cdot a^2 \cdot f''}{2 \cdot a^2 f'}\right|,$$

das heißt

$$C = \left|\frac{b^{-2} \cdot \delta^{3/2} + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot a^2 \cdot f''(\alpha)}{2 \cdot a^2 \cdot f'(\alpha)}\right|,$$

wobei

$$\delta = b^2 + a^2 \cdot f'^2(\alpha)$$

ist. Im Fall

$$F(x) = x + s \cdot a^2 \cdot \frac{g'(x)}{H(x)} - a \cdot G(x)$$

kann die Behauptung auf ähnliche Weise bewiesen werden.

Literatur

[1] M. Deutsch—Z. Szabó, Érintőellipszisekkel generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációkról (Über die durch Berührungsellipsen erzeugten, stets konvergenten Iterationsmethoden zur Lösung nicht-linearer Gleichungen), *Mat. Lapok* **24** (1973), 397—408 *(Ungarisch)*.

[2] A. Ralston, A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, Inc., 1965.

[3] Z. Szabó, Mindig konvergens iterációs eljárások nemlineáris egyenletek megoldására (Stets konvergente Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen, Dissertation), *Kandidátusi disszertáció, KLTE Mat. Int. Debrecen,* 1979 *(Ungarisch,* Zusammenfassung: Deutsch*)*.

[4] Z. Szabó, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I—III, *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233; **21** (1974), 285—293; **27** (1980), 185—200.

[5] J. F. Traub, Iterative methods for the solution of equations, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1964.

(Eingegangen am 1, Dezember 1982.)