Une application d'un théorème de J. Aczél

Par T. BIRSAN (Jassy, Roumanie)

1. Introduction. L'instrument principal de travail utilisé dans cette Note est un théorème de J. Aczél sur la représentation des demi-groupes continus.

La notion de métrique a été généralisée durant le temps dans des sens différents. La théorie des espaces aléatoires, initiée par K. Menger [5], se réjouit d'un intérêt à part. L'idée fondamentale de celui-ci est de remplacer dans l'inégalité triangulaire l'opération d'addition par une fonction $(x, y) \to T(x, y)$, appelée t-norme.

En utilisant cette idée, nous allons introduire les notions de T-métrique et d'espace T-métrique.

Définition. On dit que la fonction d: $X \times X \to R_+$ est une métrique sur X relativement à la t-norme T: $R_+ \times R_+ \to R_+$ (brièvement, d est une *T-métrique*), si elle satisfait aux conditions suivantes:

I $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

II $d(x, y) = d(y, x)$, *pour tous* $x, y \in X$,

III $d(x, z) \leqq T(d(x, y), d(y, z))$, *pour tous* $x, y, z \in X, x \neq y, y \neq z, x \neq z$.

Le triplet (X, d, T) est appelé *espace T-métrique*.

Remarques. 1) La structure de l'espace T-métrique (X, d, T) dépend dans une grande mesure de la t-norme T. Si $T(a, b) = a + b$, alors d est une métrique habituelle sur X. Si $T(a, b) = \max(a, b)$, d est une métrique non-archimédienne sur X. Notons ces deux t-normes par T_{sum} et $T_{\max}$, respectivement. Donnons encore quelques exemples de t-normes [6, 7]: 1^0 $T(a, b) = ab$, 2^0 $T(a, b) = \min(a, b)$, 3^0 $T(a, b) = \alpha a + \beta b (\alpha, \beta > 0)$, 4^0 $T(a, b) = a + b + ab$, 5^0 $T(a, b) = (a^k + b^k)^{\frac{1}{k}}$ $(k > 0)$, etc.

2) Si la t-norme T satisfait aux conditions à la limite

$$T(a, 0) = T(0, a) = a, \quad a \in R_+, \tag{1}$$

(c'est le cas des t-normes T_{sum}, $T_{\max}$ et de celles de 4^0 et 5^0), alors il n'est pas besoin de considérer que les points x, y, z soient distincts dans l'inégalité triangulaire III. À défaut de cette restriction, cette inégalité peut impliquer le fait que la distance d est identiquement nulle (ainsi que l'exemple des t-normes 1^0 et 2^0 le montre).

Dans le language des t-normes, le théorème de J. Aczél [1] s'énonce de la manière suivante:

Théorème A. *Soit* $T: R_+\times R_+\to R_+$ *une t-norme satisfaisant aux conditions suivantes:*

1^0 *T est continue,*

2^0 *T est une opération associative sur* R_+,

3^0 *T est strictement croissante par rapport à chaque variable.*

Alors, il y a une fonction f définie, continue et strictement monotone sur R_+ telle que T a la représentation

$$T(a, b) = f^{-1}(f(a)+f(b)), \quad a, b\in R_+, \tag{2}$$

où f^{-1} est la fonction inverse de f.

Une t-norme qui satisfait aux hypothèses du Th. A s'appelle *stricte*.

Il est facile de préciser la position des t-normes T_{sum} et $T_{\max}$ parmi les autres. En effet, T_{sum} est la t-norme stricte engendrée par la plus simple fonction continue et strictement croissante $f(x)=x$, $x\in R_+$. D'autre part, $T_{\max}$ est le plus petit élément de l'ensemble des t-normes qui vérifient la condition à la limite (1) et sont croissantes par rapport à chaque variable (on sous-entend que $T\leqq T'$ si $T(a, b)\leqq \leqq T'(a, b)$, $a, b\in R_+$). En effet, pour tous $a, b\in R_+$, on a $T(a, b)\geqq T(a, 0)=a$ et $T(a, b)\geqq T(0, b)=b$, donc $T(a, b)\geqq T_{\max}(a, b)$.

2. Métrisation des espaces T-métriques. Soit (X, d, T) un espace T-métrique. On adopte la notation habituelle pour la sphère ouverte par rapport à la T-métrique d, c'est-à-dire $S(x, r)=\{y;\ d(x, y)<r\}$.

Théorème 1. *Si la t-norme T satisfait aux conditions:*

1^0 *T est croissante par rapport à chaque variable,*

2^0 $\inf_{x>0} T(x, x)=0$,

alors l'espace T-métrique (X, d, T) est métrisable.

Démonstration. Notons $U_\varepsilon=\{(x, y);\ d(x, y)<\varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon>0$. Etant donné $n\in N^*$, il y a $m\in N^*$, $m>n$, tel que $T\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)<\frac{1}{n}$. Alors, $U_m^2\subset U_n$. On vérifie aussi aisément les autres conditions pour que la famille d'ensemble $\{U_n;\ n\in N^*\}$ soit un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur X. Ce système étant dénomrable, il résulte que (X, d, T) est métrisable.

Remarque. Dans les hypothèses du Th. 1, pour tout $x\in X$, l'ensemble des sphères $S(x, r)$, $r>0$, est un système fondamental de voisinages du point x, dans la topologie induite sur X par l'uniformité définie ci-dessus. En général, les sphères ouvertes $S(x, r)$ ne sont pas des ensembles ouverts par rapport à cette topologie. De plus, la distance d peut ne pas être fonction continue de ses variables (même séparément!).

Exemple. Soient les ensembles $M_1=\{(a, b);\ a\geqq 0, b\geqq 0\}$, $M_2=\{(a, b);\ a<0, b>0\}$, $M_3=\{(a, b);\ a\leqq 0,\ b\leqq 0\}-\{(0, 0)\}$, $M_4=\{(a, b);\ a>0,\ b<0\}$ et la fonction

$d\colon R\times R\to R_+$, définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} d_0(x, y), & x, y\in M_i, \\ \dfrac{1}{2}\big(d_0(x, 0)+d_0(y, 0)\big), & x\in M_i, \quad y\in M_j, \quad i\neq j, \end{cases}$$

où $i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$ et d_0 est la métrique euclidienne du plan R^2. La fonction $T\colon R_+\times R_+\to R_+$ définie par $T(a, b)=2(a+b)$ est une t-norme continue, strictement croissante par rapport à chaque variable et $T(0, 0)=0$. On vérifie facilement que (R^2, d, T) est un espace T-métrique. Soient $x_n=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $y_n=\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$, $n\in N^*$, deux suites qui tendent vers $(0, 0)$ par rapport à d. On constate que $d(x_n, 1)$ tend vers $\sqrt{2}$, tandis que $d(y_n, 1)$ tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, la fonction $d(\cdot, 1)$ n'est pas continue.

Le Théorème A de J. Aczél nous permet de construire d'une manière très simple une métrique sur X équivalente à la T-métrique d.

Théorème 2. *Soit (X, d, T) un espace T-métrique dont la t-norme T est stricte, vérifie la condition à la limite* (1) *et se représente sous la forms* (2). *Alors, la fonction $f\circ d$ (ou $-f\circ d$, au cas où f est strictement décroissante) est une métrique sur X qui induit la même topologie et la même structure uniforme comme la T-métrique d.*

Démonstration. D'abord, on établit que $f(0)=0$. En effet, grâce aux relations (1) et (2), ce fait résulte de

$$f(a) = f\big(T(a, 0)\big) = f\big(f^{-1}(f(a)+f(0))\big)= f(a)+f(0).$$

Alors, $f\circ d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$, et $f\circ d(x, y)=f\circ d(y, x)$, pour tous $x, y\in X$. De même, en vertu de (2), on peut écrire l'inégalité triangulaire III sous la forme:

$$d(x, z) \leqq f^{-1}\big(f(d(x, y))+f(d(y, z))\big), \quad x, y, z\in X, \quad x\neq y, \quad x\neq z, \quad y\neq z,$$

d'où

$$f\circ d(x, z) \leqq f\circ d(x, y)+f\circ d(y, z), \quad x, y, z\in X.$$

Par conséquent, $f\circ d$ est une métrique sur X. Notons maintenant $U'_\delta=\{(x, y);\ f\circ d(x, y)<\delta\}$. On a $U_\varepsilon=U'_{f(\varepsilon)}$. Il résulte d'ici que les structures uniformes engendrées par la T-métrique d et la métrique $f\circ d$ coincïdent.

Corollaire. *Dans les hypothèses du Th.* 2. *la T-métrique d est une fonction continue sur $X\times X$.*

Démonstration. En effet, $f\circ d$ étant une métrique sur X, elle est continue sur $X\times X$. La continuité de d résulte de l'égalité $d=f^{-1}\circ(f\circ d)$.

Remarque. Les hypothèses du Th. 2 ne sont pas suffisantes pour assurer la continuité uniforme de la T-métrique.

Exemple. Soient $d(x, y)=e^{|x-y|}-1$, $(x, y)\in R\times R$, et $T(a, b)=a+b+ab$, $(a, b)\in R_+\times R_+$. Alors, T est une t-norme stricte satisfaisant à la condition (1) et ayant une représentation (2) avec une fonction f donnée par $f(x)=\ln(1+x)$,

$x \in R_+$. De même, d est une T-métrique sur R et $f \circ d(x, y) = |x-y|$. Mais, d n'est pas continue uniformément sur $R \times R$, car ni l'application partielle $d(x, 0) = e^{|x|} - 1$ n'est continue uniformément sur R.

3. Théorèmes de point fixe. Les espaces T-métriques dont la t-norme est stricte sont les plus proches de ceux métriques. Notons $d_1 = f \circ d$ et supposons que f est une fonction strictement croissante (dans le cas où f est strictement décroissante on procède d'une manière analogue). Grâce aux propriétés de la fonction f, les espaces (X, d, T) et $(X, d_1,)$ ont les mêmes suites convergentes et suites de Cauchy. Au particulier, ils sont complets dans le même temps.

Théorème 3. *Soit (X, d, T) un espace T-métrique complet, la t-norme T étant stricte. Soient les applications $U, V : X \to X$ telles que on a*

$$d(Ux, Vy) \leqq h(d(x, y),\ d(x, Ux),\ d(y, Vy)), \quad x, y \in X, \tag{3}$$

où la fonction $h\colon R_+^3 \to R_+$ est supérieure semicontinue, croissante par rapport à chaque de ses variables, et vérifie la condition $h(t, t, t) < t$, $t > 0$. Alors les applications U et V ont un point commun qui est unique.

Démonstration. Écrivons la relation (3) sous la forme

$$f(d(Ux, Vy)) \leqq f(h(f^{-1}(f(d(x, y))),\ f^{-1}(f(d(x, Ux))),\ f^{-1}(f(d(y, Vy))))).$$

où bien

$$d_1(Ux, Vy) \leqq H(d_1(x, y),\quad d_1(x, Ux),\quad d_1(y, Vy)), \quad x, y \in X, \tag{4}$$

la fonction $H\colon R_+^3 \to R_+$ étant définie par

$$H(u, v, w) = f(h(f^{-1}(u),\ f^{-1}(v),\ f^{-1}(w))). \tag{5}$$

Évidemment, H conserve les propriétés de la fonction h. Par conséquent, relativement à l'espace métrique complet (X, d_1) et aux applications U et V qui staisfont à la relation (4), on peut appliquer un théorème de [8] et on obtient le résultat désiré.

Théorème 4. *Soit (X, d, T) un espace T-métrique compact, T une t-norme stricte, et $U\colon X \to X$ une application continue qui satisfait à la condition*

$$d(Ux, Uy) < h(d(x, y),\quad d(x, Ux),\quad d(y, Uy)), \quad x, y \in X, \quad x \neq y, \tag{6}$$

où $h\colon R_+^3 \to R_+$ est croissante par rapport à chaque variable et $h(t, t, t) \leqq t$, pour tout $t > 0$. Alors U a un point fixe unique.

Démonstration. De même que dans le Th. 3, on met la relation (6) sous la form,

$$d_1(Ux, Uy) < H(d_1(x, y),\quad d_1(x, Ux),\quad d_1(y, Uy)), \quad x, y \in X, \quad x \neq y, \tag{7}$$

où la fonction H est donnée par (5) et vérifie les mêmes conditions que h. Il s'agit maintenant de démontrer que l'application U de l'espace compact (X, d_1) dans lui même, continue et satisfaisant à (7), a un point fixe unique.

Dans ce but, soit $\varphi(x) = d_1(x, Ux)$, $x \in X$. Dans nos hypothèses, il y a $z \in X$ tel que $\varphi(z) = \inf\{\varphi(x); x \in X\}$. Si $Uz = U^2z$, alors il résulte que $\varphi(z) = 0$, d'où

$Uz=z$ et, donc, z est un point fixe de U. La supposition que $Uz\neq U^2z$ nous conduit à une absurdité. En effet, on a

$$\varphi(Uz)=d_1(Uz,U^2z)<H\big(d_1(z,Uz),\ d_1(z,Uz),\ d_1(Uz,U^2z)\big). \tag{8}$$

Dans le cas où $d_1(Uz,U^2z)\leqq d_1(z,Uz)$, on obtient

$$\varphi(Uz)<H\big(\varphi(z),\ \varphi(z),\ \varphi(z)\big), \tag{9}$$

donc $\varphi(Uz)<\varphi(z)$, ce qu'il est absurde. Dans le cas où $d_1(Uz,U^2z)>d_1(z,Uz)$ la relation (8) nous donne que $\varphi(Uz)<d_1(Uz,U^2z)$, donc $\varphi(Uz)<\varphi(Uz)$. Absurde

Pour démontrer l'unité du point fixe, on suppose, par contraire, qu'il y a deux points fixes z_1 et z_2. Par suite,

$$d_1(z_1,z_2)=d_1(Uz_1,Uz_2)<H\big(d_1(z_1,z_2),\ d_1(z_1,Uz_1),\ d_1(z_2,Uz_2)\big)=$$
$$=H\big(d_1(z_1,z_2),\ 0,0\big)\leqq d_1(z_1,z_2),$$

d'où $d_1(z_1,z_2)<d_1(z_1,z_2)$. Absurde. Le théorème est complètement démontré.

Remarque. Si $T=T_{\text{sum}}$, $U=V$, $h(u,v,w)=\alpha u$, $0<\alpha<1$, alors le Th. 3 devient le théorème de point fixe de S. BANACH. Si $T=T_{\text{sum}}$ et $h(u,v,w)=u$, on obtient le théorème de point fixe de M. EDELSTEIN [3].

4. Remarques finales. C.-H. LING [4] a remplacé l'hypothèse 3⁰ du Th. A par une autre moins restrictive, mais en ajoutant des conditions supplémentaires pour qu'une représentation de la forme (2) soit possible. Il est avantageux de considérer que les fonctions qui interviennent ci-dessous prennent leurs valeurs dans $\bar{R}_+=[0,+\infty]$.

Théorème B [4]. *Soit* T: $\bar{R}_+\times\bar{R}_+\to\bar{R}_+$ *une fonction qui vérifie les conditions:*

1^0 *T est continue.*

2^0 *T est une opération associative sur* $\bar{R}_+$,

3^0 *T est croissante par rapport à chaque variable,*

4^0 *0 (zéro) est unité à gauche, i.e. T vérifie la condition à la limite* $T(0,a)=a$, *pour tout* $a\in\bar{R}_+$,

5^0 $T(a,a)>a$, *quel que soit* $a\in R_+$, $a\neq 0$.

Alors il existe une fonction f définie, continue, et strictement croissante sur $\bar{R}_+$ *telle que T a la représentation*

$$T(a,b)=f^{-1}\big(f(a)+f(b)\big),\quad a,b\in\bar{R}_+, \tag{10}$$

où $f^{(-1)}$: $\bar{R}_+\to\bar{R}_+$ *est définie par*

$$f^{(-1)}(x)=\begin{cases} f^{-1}(x), & x\in[0,f(+\infty)],\\ +\infty, & x\in[f(+\infty),+\infty].\end{cases}$$

Une t-norme vérifiant les conditions 1^0—5^0 s'appelle *archimédienne* [4].

Il est facile à voir que les théorèmes suivants: Th. 2 et son Corollaire, Th. 3 et Th. 4, restent valables si, dans leurs énoncés, on considère des t-normes archimédiennes au lieu de celles strictes.

Bibliographie

[1] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. Soc. Math. France,* **76** (1948), 59—64.
[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Topologie générale, *Paris,* 1966.
[3] M. Edelstein, On fixed and periodic points under contractive mappings, *J. London Math. Soc.* **37** (1962), 74—79.
[4] C.-H. Ling, Representation of associative functions, *Publ. Math. (Debrecen),* **12** (1965), 189—212.
[5] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **28** (1942), 535—537.
[6] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.,* **10** (1960), 313—334.
[7] B. Schweizer, A. Sklar, Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publ. Math. (Debrecen),* **8** (1961), 169—186.
[8] S. P. Singh, B. A. Meade, On common fixed point theorems, *Bull. Austral. Math. Soc.,* **16** (1977), 49—53.

(Reču le 13 décembre 1982.)