Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгуппу конечного индекса

С. Д. БЕРМАН (ХАРЬКОВ) — К. БУЗАШИ (ДЕБРЕЦЕН)

Пусть G—группа, содержащая бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса, а KG—групповая алгебра группы G над полем K. В [1] описаны все конечно порождённые KG-модули в случае, когда K—алгебраически замкнутое поле с некоторым ограничением на характеристику (в частности, когда K—поле характеристики нуль).

Пусть C, R, Q обозначают соответственно поле комплексных чисел, поле вещественных чисел и тело кватернионов над полем R. В настоящей статье даётся описание всех R-конечномерных RG-модулей. Все рассматриваемые модули предполагаются левыми и унитарными.

В [2] показано, что групповая алгебра RG разлагается в прямую сумму двухсторонних идеалов, являющихся полными матричными кольцами над некоторыми алгебрами (вещественные алгебры типа E). Существует 15 типов вещественных алгебр типа E. Каждая такая алгебра является скрещенной групповой алгеброй бесконечной циклической группы (a) или бесконечной группы диэдра $\left(D=(a)\cdot(b),\ b^2=1,\ b^{-1}ab=a^{-1}\right)$ над полем C, полем R или телом Q.

Если L означает одно из тел C, R и Q, то будем обозначать через $L(a)$ групповую алгебру бесконечной циклической группы (a) над L.

Согласно [2], вещественные алгебры типа E задаются так:

$$A_1 = R(a); \quad A_2 = C(a); \quad A_3 = Q(a);$$

$A_4=C_1(a)$ скрещенная групповая алгебра бесконечной циклической группы (a) над полем C:

$$\lambda a=a\bar{\lambda},\ \lambda\in C \quad (\bar{\lambda}\text{—сопряженное с } \lambda);$$

$A_5=\{R(a), b\}$, $A_6=\{C(a), b\}$, $A_7=\{Q(a), b\}$ — групповые алгебры бесконечной группы диэдра D соответственно над полями R, C и телом Q;

$$A_8 = \{C_1(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda\in C);$$

$$A_9 = \{R(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda\in R);$$

$$A_{10} = \{R(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda\in R);$$

$$A_{11} = \{C_1(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda\in C);$$

$$A_{12} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{13} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{14} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{15} = \{Q(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda \in Q).$$

Алтебры $A_8, A_{11}, A_{12}, A_{13}$ и A_{14} являются скрещенными групповыми алгебрами бесконечной группы диэдра D над полем C, алгебры A_9, A_{10}— скрещенными групповыми алгебрами группы D над полем R, а алгебра A_{15}—скрещенной групповой алгеброй группы D над телом Q.

Описание всех конечномерных неразложмых R-представлений групп G рассматриваемого типа сводится к такой же задаче для алгебр $A_1, \ldots, A_{15}$ (см. [2]).

Ниже мы даём полное описание всех конечномерных неразложимых A_i-модулей для всех алгебр A_i $(i=1, \ldots, 15)$.

Рассмотрим сначала алгебры $R(a), C(a), Q(a)$ и $C_1(a)$. Алгебры $R(a)$ и $C(a)$—эвклидовы кольца, а $Q(a)$ и $C_1(a)$—эвклидовы справа и слева кольца (см. [2]).

Пусть T—коммутативная область главных идеалов или некоммутативная область левых и правых главных идеалов. Элемент $p \in T$ называется *простым*, если левый идеал $T \cdot p$ яавляется максимальным. Элементы $c, d \in T$ называются *подобными* (обозначение $c \sim d$), если факторы T/Tc и T/Td изоморфны как T—модули. Если T—коммутативное кольцо, то подобиеэл ементов c и d равносильно равенству $(c)=(d)$. Если T—некоммутативное кольцо, то простые элементы $p_1, p_2 \in T$ подобны тогда и только тогда, когда совпадают их границы — максимальные двухсторонние идеалы, содержащиеся соответственно в идеалах Tp_1 и Tp_2. (Глава 3. в [3].)

Пусть теперь $T=R(a), C(a), C_1(a), Q(a)$. Укажем полную систему представителей классов подобных между собой простых элементов в T.

В кольце $C(a)$ каждый простой элемент подобен элементу $a-\alpha$ $(\alpha \in C)$, а в кольце $R(a)$ либо элементу $a-\alpha$ $(\alpha \in R)$, либо элементу $a^2+\alpha a+\beta$, где $x^2+\alpha x+\beta$—неприводимый вещественный полином.

Ввиду [3] каждый простой элемент в кольце $T=Q(a)$ подобен элементу $a-\alpha$ $(\alpha \in R(i)$, $1, i, j, k$—стандартный базис Q над R), причём элементы $a-\alpha_1$ и $a-\alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in R(i))$ подобны тогда и только тогда, когда $\alpha_2=\bar{\alpha}_1$ (сопряённость в поле комплексных чисел $R(i)$). При этом граница левого идеала $T(a-\alpha_1)$ равна $T\left(a^2+(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)a+|\alpha_1|^2\right)$.

Согласно [3] каждый простой элемент в кольце $C_1(a)$ полобен элементу $a-\alpha$ $(\alpha \in C)$, или элементу $a^2+\alpha$ $(\alpha \in C)$, где α не является отрицательным вещественным числом. В кольце $T=C_1(a)$ имеют место равенства

$$(1') \qquad (a-\alpha)(a-\bar{\alpha}) = (a-|\alpha|)(a+|\alpha|),$$

$$(2') \qquad (a^2+\alpha)(a^2+\bar{\alpha}) = a^4+(\alpha+\bar{\alpha})a^2+\alpha \cdot \bar{\alpha}.$$

Так как элементы в правых частях равенств (1′) и (2′) лежат в центре кольца T, то из (1′) и (2′) вытекает, что простые элементы $a-\alpha_1$ и $a-\alpha_2$ в $C_1(a)$ подобны тогда и только тогда, когда $|\alpha_1|=|\alpha_2|$, а простые элементы

$a^2+\alpha_1$ и $a^2+\alpha_2$ в $C_1(a)$ подобны тогда и только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2$ или $\alpha_1=\bar{\alpha}_2$. Отсюда, в частности, вытекает, что каждый элемент $a-\alpha\in C_1(a)$ подобен элементу $a-|\alpha|$.

Из приведённых выше формул для границ простых элементов $p=a-\alpha\in \in Q(a)(\alpha\in R(i))$ и простых элементов p вида $a-\alpha$, $a^2+\alpha\in C_1(a)$ следует, что для таких элементов $p\in T=Q(a)$, $C_1(a)$ граница левого идеала Tp^m равна (q^m), где (q)—граница левого идеала Tp.

ЛЕММА 1. *Пусть T одно из колец $R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$. Конечномерный над R T-модуль M неразложим тогда и только тогда, когда $M\cong T/Tp^m$, где p—простой элемент в T. Модули T/Tp_1^m и T/Tp_2^m, где p_1, p_2—простые, изоморфны тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 подобны.*

Доказательство. Каждый неразложимый конечномерный над R T-модуль M изоморфен фактормодулю T/Tc, где $0\subset(c)\subset T$. Пусть $c=p_1\cdot\ldots\cdot p_r$—разложение элемента c в произведение простьх элементов кольца T. Согласно [3] модуль T/Tc неразложим тогда и только тогда, когда простые элементы $p_1,\ldots,p_r$ имеют одну и ту же границу (q) и граница идеала Tc равна (q^r). При этом неразложимые конечномерные над R модули T/Tc_1 T/Tc_2 изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают границы левых идеалов Tc_1 и Tc_2.

Как было показано выше, каждый простой элемент p в $T=Q(a)$, $C_1(a)$ подобен соответственно элементу $a-\alpha\in Q(a)$ $(\alpha\in R(i))$ или элементу $a-\alpha$, $a^2+\alpha\in C_1(a)$. В силу прыведённых выше формул для границ этих элементов p граница идеала Tp^m равна (q^m), где (q)—граница идеала Tp.

Это завершает доказательство утверждения леммы для $T=Q(a)$, $C_1(a)$. Для $T=R(a), C(a)$ оно очевидно в силу теорем о конечнопорождённых модулях над коммутативной областью главных идеалов.

Пусть $T=R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$. Каждая из алгебр A_i $(i=5, 6, \ldots, 15)$ содержит одну из алгебр T в качестве подалгебры, причём на T действует R-автоморфизм φ порядка 2, зависящий от алгебры: $\varphi(x)=b^{-1}xb$, $x\in T$.

Очевидно, для любого простого элемента $p\in T$ элемент $p'=\varphi(p)$ также являтся простым.

ЛЕММА 2. *Для алгебры $A_i(5\leqq i\leqq 13,\ i\neq 7)$ простой элемент $p\in T$ подобен элементу $p'=\varphi(p)$ тогда и только тогда, когда*

1. *Для алгебр A_5 и A_9: $(p)=(a\pm 1)$ или $(p)=(a^2+\alpha a+1)$, $\alpha\in R$.*
2. *Для A_{10}: $(p)=(a^2+1)$.*
3. *Для A_6: $(p)=(a\pm 1)$, а для A_{12}, A_{13}: $(p)=(a-\alpha)$, где $|\alpha|=1$, $\alpha\in C$.*
4. *Для A_8: $(p)=(a\pm 1)$ или $(p)=(a^2+\alpha)$, где $|\alpha|=1$, $\alpha\notin(+\infty, 0]$, $\alpha\in C$.*
5. *A_{11}: $(p)=(a^2+\alpha)$, $|\alpha|=1$, $\alpha\notin(-\infty, 0]$, $\alpha\in C$.*
6. *В алгебре A_{14} ни один из простых элементов $p\in T=C(a)$ не подобен элементру p'.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для алгебр A_5, A_6, A_9 $A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ условие $p\sim p'$ означает совпадение идеалов Tp и Tp'.

1. Пусть $A=A_5, A_9$. Тогда $T=R(a)$. Если $p=a-\alpha$, то $p'=a^{-1}-\alpha$ и равенство главных идеалов $(p)=(p')$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha=\pm 1$, т.е. когда $(p)=(a\pm 1)$. Пусть $p=a^2+\alpha a+\beta$, где $x^2+\alpha x+\beta$

неприводимый вещественный полином. Если $(a^2+\alpha a+\beta)=(a^{-2}+\alpha a^{-1}+\beta)$, то $\frac{1}{\beta}=1$, $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha$ и $(p)=(a^2+\alpha a+1)$.

2. Пусть $A=A_{10}$. Тогда $T=R(a)$. Если $p=a-\alpha$, $\alpha\in R$ то $p'=-a^{-1}-\alpha$ и равенство $(a-\alpha)=(-a^{-1}-\alpha)$ эквивалентно равенству $\alpha^{-1}=-\alpha$, что невозможно. Пусть $p=a^2+\alpha a+\beta$, где $x^2+\alpha x+\beta$ неприводимый над R полином. Тогда $p^1=a^{-2}-\alpha a^{-1}+\beta$ и равенство $(p)=(p')$ выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\beta}=\beta$, $\alpha=-\frac{\alpha}{\beta}$. Отсюда $\beta=1$, $\alpha=0$. Следовательно, $p=a^2+1$.

3. Пусть $A=A_6$. Тогда для $p=a-\alpha\in C(a)$ имеем $p'=a^{-1}-\alpha$ и равенство $Tp=Tp'$ эквивалентно условию $\alpha=\pm 1$.

Пусть $A=A_{12}, A_{13}$. Тогда при $p=a-\alpha\in C(a)$ имеем $p'=a^{-1}-\bar{\alpha}$, а равенство $(p)=(p')$ равносильно услоьию $\alpha^{-1}=\bar{\alpha}$ или $|\alpha|=1$.

4. Пусть $A=A_8$. Если $p=a-\alpha$, $\alpha\in R$, то $p'=a^{-1}-\alpha$ и $p\sim p'$ в $C_1(a)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^2=1$, т.е. $\alpha=\pm 1$.

Пусть $p=a^2+\alpha$, $\alpha\in C$, $\alpha\notin(-\infty, 0]$. Тогда $p'=a^{-2}+\alpha$ и подобие элементов p и p' в $C_1(a)$ равносильно условию $\alpha^{-1}=\bar{\alpha}$, т.е. $|\alpha|=1$.

5. Лусть $A=A_{11}$. Тогда $T=C_1(a)$. Если $p=a-\alpha$, $\alpha\in R$, то $p'=-a^{-1}+\alpha$ и из $p\sim p'$ вытекало бы, что $\alpha=-\alpha$, что невозможно. Пусть $p=a^2+\alpha$, где $\alpha\notin(-\infty, 0]$. Тогда $p'=a^{-2}+\bar{\alpha}$ и подобие элементов p и p' равносильно равенству $\bar{\alpha}^{-1}=\alpha$ или $\bar{\alpha}^{-1}=\bar{\alpha}$, которые эквивалентны условию $|\alpha|=1$.

6. Пусть $A=A_{14}$. Тогда $T=C(a)$ и можно положить $p=a-\alpha$ $(\alpha\in C)$, $p'=-\alpha^{-1}+\alpha$. Если $(p)=(p')$, то $\alpha=-(\bar{\alpha})^{-1}$, что невозможно. Следовательно, $p\not\sim p'$. Лемма доказана.

Перед тем, как приступить к описанию конечномерных над R модулей над алгебрами A_i, сделаем некоторые общие замечания о представлениях алгебр.

Пусть A—конечном ернаяалгебра с единицей над полем K, а φ—автоморфизм этой алгебры конечного порядка n. Скрещенное произведение $B=(A, \varphi, C)$, где c—обратимый элемент алгебры A, определяется так же, как скрещенное произвение поля с его автоморфизмом. Алгебра B состоит из всевозможных линейных комбинаций

$$u = x_1+x_2\varphi+\ldots+x_{n-1}\varphi^{n-1}, \quad x_i\in A,$$

где $\varphi^n=c$. По определению

$$x_1+x_2\varphi+\ldots+x_{n-1}\varphi^{n-1} = y_1+y_2\varphi+\ldots+y_{n-1}\varphi^{n-1}; \quad x_i, y_j\in A$$

тогда и толко тогда, когда $x_i=y_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$.

Операции над элементами $u\in B$ определяются естественным образом с учётом соотношений $x\varphi=\varphi x^{\varphi}$, $\varphi^n=c$.

Пусть M—A-модуль. Тогда можно образовать индуцированный B-модуль

$$M^B = M\dotplus\varphi M\dotplus\ldots\dotplus\varphi^{n-1}M, \tag{1}$$

состоящий из всевозможных формальных линеных комбинаций

$$y_1+\varphi y_2+\ldots+\varphi^{n-1}y_{n-1} \quad (y_i\in M,\ i = 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Каждая из подпостранств $\varphi^i M$ является A-модулем в силу соглашения

$$u(\varphi^i x) = \varphi^i(u^{\varphi^i} x), \quad u \in A.$$

Действие оператора φ на элементы (2) определяются очевидным образом. Если $B=(A, \varphi, c)$, $\varphi^n = c$, то в случае, когда характеристика поля K не делит число n, имеет место теорема, аналогичная известной теореме Хигмана в теории индуцированных представлений конечных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждый конечномерный над K B-модуль M является компонентой индуцированного модуля N^B, где N—некоторый неразложимый A-модуль.*

Предложение I можно доказать, дословно воспроизводя рассуждения, которые применяются в доказательстве теоремы Хигмана [4].

Мы используем предложение I для нахождения всех неразложимых R-конечномерных A_i-модулей. где A_i—алгебры типа $E\,(i=5, 6, \ldots, 15)$. Каждая из таких алгебр является скрещенным произведением алгебры $T=R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$ с автоморфизмом φ второго порядка: $\varphi(x)=b^{-1}xb$, $x \in T$. Поэтому, ввиду предложения I, и леммы 1 имеет место

ЛЕММА 3. *Каждый неразложимый конечномерный над R A_i-модуль M есть компонента индуцированного A_i-модуля*

$$M^* = M \dotplus bM, \tag{3}$$

где

$$M \cong T/Tp^m$$

неразложимый T-модуль, описанный в лемме 1.

Замечание 1. Легко видеть, что модуль M^* в лемме 3 как A-модуль изоморфен фактор-идеалу A/Ap^m, и поэтому, задача описания всех неразложимых A-модулей сводится к разложению фактор-модулей A/Ap^m. Далее, слагаемые M и bM в (3) являются неразложимыми T-модулями, и поэтому, прямое разложение модуля A/Ap^m может содержать не более двух слагаемых.

Заметим, что подмодуль bM в сумме (3) является неразложимым T-модулем, изоморфным модулю $T/T(p')^m$, где $p'=b^{-1}pb$.

Мы можем теперь указать простой достаточный признак неразложимости модуля M^*.

ЛЕММА 4. *Если $M=T/(p^m)$ и простые элементы p и p' кольца T не подобны, то модуль M^* неразложим.*

Доказательство. В условиях леммы модуль M^*, рассматриваемый как T-модуль, является прямой суммой двух подмодулей

$$M \cong T/(p^m), \quad bM \cong T/(p')^m,$$

причём слагаемые M и bM модуля M^* как T-модуля определены абсолютно однозначно в силу условия $p \not\sim p'$ и леммы 1. Следовательно, любой A_i-модуль N, $0 \subset N \subset M^*$, являющийся прямым слагаемым модуля M^*, совпадает с одним из модулей M, bM, а тогда $N=M$, что невозможно.

ЛЕММА 5. *Пусть* $A=A_i$ $(5\leqq i\leqq 15,\ i\neq 9, 13)$. *Если в обозначениях леммы* I *идеал* Ap *является двусторонним идеалом кольца* A, *то модуль* M^* (*см.* (3)) *разлагается в прямую сумму двух* A*-подмодулей*

$$M^* = \{(1+b),\ M\} \dotplus \{(1-b),\ M\} = M_1 \dotplus M_2.$$

Модули M_1 *и* M_2 *не изоморфны тогда и только тогда, когда* $(p)=(a+1)$ *или* $(p)=(a-1)$ *и при этом* $b\lambda=\lambda b$ *для всех* $\lambda\in R, C, Q$ *(соответственно).*

Доказательство. Вусловиях леммы M^* можно отождествить с фактор-кольцом $B=A/(p^m)$, рассматриваемым как A-модуль. Так как $1=e_1+e_2$, где $e_1=\frac{1}{2}(1+b)$, $e_2=\frac{1}{2}(1-b)$—идемпотенты, то

$$B = Be_1 \dotplus Be_2. \tag{4}$$

Слагаемые (4) неразложимы, так как каждый из модулей Be_i как T-модуль изомпрфен подулю T/Tp^m.

Если для некоторого $\lambda\in R, C, Q$ (соответственно), $\lambda_1 b=b\lambda$, $\lambda\neq\lambda_1$, то $(1-b)\lambda(1+b)=(\lambda-\lambda_1)(1+b)$, $(\lambda-\lambda_1)\neq 0$, что доказывает изоморфизм $B(1-b)\cong$ $\cong B(1+b)$. Пусть $Tp\neq(a+1), (a-1)$. Тогда

$$(1-b)a(1+b) = (a-a^{-1})(1+b) = a^{-1}(a^2-1)(1+b) \neq 0,$$

ибо $(p)\neq(a+1), (a-1)$ и $B(1+b)\cong T/(p^m)$. Значит, $B(1-b)\cong B(1+b)$.

Пусть, наконец, $p=(a+1)$ или $p=(a-1)$ и $b\lambda=\lambda b$ соответственно для всех $\lambda\in R, C, Q$. Тогда фактор-алгебра $A/(p)$ изоморфна групповой алгебре $K(b)$, где $K=R, C, Q$, а (b)—циклическая группа второго порядка. Эта алгебра имеет два неизоморфных неприводимых модуля, соответствующих идеалам

$$K(b)(1+b) = \{\lambda(1+b)\},\quad K(b)(1-b) = \{\lambda(1-b)\},\quad \lambda\in K.$$

Так как (p)—радикал алгебры $A/(p^m)$, то, в силу известных теорем теории артиновых алгебр, число неизоморфных неразложимых модулей в разложении $A/(p^m)$ равно числу её неприводимых неизоморфных модулей, т.е. двум. Лемма доказана.

Определение. Пусть $A=A_i$ $(i=5, 6, \ldots, 15)$, а $T=R(a), C(a), Q(a), C_1(a)$— соответствующая алгебре A подалгебра. Будем называть простой элемент $p\in T$ соответственно *элементом первого, второго или третьего рода,* если для любого натурального m модуль A/Ap^m (см. (3) и замечание 1) или неразложим, или разлагается в прямую сумму двух неразложимых модулей, которые соответственно изоморфны или неизоморфны.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $A=A_i$ $(i=5, 6, 9, 10, 12, 13, 14)$. *Каждый простой элемент* $p\in T$ *является элементом первого, второго или третьего рода. Для алгебр* A_i $(i=5, 6, 10, 12, 14)$ *элемент* $p\in T$ *является элементом первого рода тогда и только тогда, когда* $Tp\neq Tp'$. *При* $(p)=(p')$ *для алгебр* A_{12}, A_{14} *элемент* p*—второго рода, а для алгебр* A_5, A_6, A_{10} *при* $(p)=(p')$ *элемент* p*— второго рода, если* $Tp\neq T(a+1), T(a-1)$, *и третьего рода при* $Tp=T(a+1)$, $T(a-1)$. *Для* A_9, A_{13} *каждый простой элемент* $p\in T$*—первого рода. Характеризация простых элементов* $p\in T$, *удовлетворяющих условиям* $Tp\neq Tp'$ *или* $Tp=Tp'$ *дана в лемме* 2.

Доказательство. Так как для рассматриваемых алгебр A_i кольцо T—коммутативное эвклидово кольцо, то при $(p)\neq(p')$ модуль $B=A/Ap^m$ неразложим по лемме 4, и элемент p—первого рода. При $Tp=Tp'$ идеал Ap^m—двухсторонний идеал алгебры A. В этом случае модуль B изоморфен фактор-кольцу A/Ap^m как A-модулю. Теперь утверждение теоремы для алгебр A_i $(i=5, 6, 10, 12, 14)$ вытекает из леммы 5.

Пусть $A=A_9, A_{13}$ и $Tp=Tp'$. При $A=A_9$ тогда $(p)=(a\pm 1)$ или $(p)=$ $=(a^2+\alpha a+1)$, $(T=R(a))$. Нетрудно показать, что в первом случае фактор-алгебра A/Ap изоморфна полю C, а во втором — телу Q. Отсюда следует неразложимость фактор-кольца $B=A/Ap^m$ в прямую сумму левых идеалов, ибо $L=Ap/Ap^m$ — радикал алгебры B, и A/L — тело.

Пусть $A=A_{13}$ и $(p)=(p')$, $p\in C(a)$. Тогда, в силу леммы 2, $(p)=(a-\alpha)$, $|\alpha|=1$. В этом случае фактор-алгебра A/Ap изоморфна телу Q, а фактор-алгебра A/Ap^m неразложима в прямую сумму левых идеалов ввиду той же аргументаций, которая выше была проведена для A_9. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $A=A_8, A_{11}$. Для алгебры A_8 каждый простой элемент $p\in C_1(a)$ третьего рода подобен элементам $a+1, a-1$; а каждый элемент p второго рода—элементам $a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha\neq -1$. Остальные простые $p\in C_1(a)$—первого рода. Если $A=A_{11}$, то простые элементы $p\sim a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha\neq -1$ являются элементами второго рода, а остальные простые $p\in C_1(a)$—первого рода.*

Доказательство. Пусть $A=A_8$. В силу леммы 4 нужно исследовать только такие простые $p\in C_1(a)$, что $p\sim p'=b^{-1}pb$. По лемме 2 все такие простые p подобны элементам $a\pm 1$ и $a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha\neq -1$. Рассмотрим сначала случай $p=a\pm 1$. Положим $N=Tp^m$ и пусть

$$M_1=\{N,(1+b)\},\quad M_2=\{N,(1-b)\}$$

левые идеалы алгебры A, порождённые соответственно N и $(1+b)$, N и $(1-b)$. Покажем, что имеет место прямое разложение

$$M^*=A/Ap^m=M_1/Ap^m\dotplus M_2/Ap^m. \tag{4}$$

В доказателстве мы существенно используем то обстоятельство, что

$$b^{-1}(Ap^m)b=Ap^m. \tag{5}$$

Прежде всего установим, что имеют место строгие включения $M_i\subset A$ $(i=1, 2)$. Действительно, каждый элемент вида $x(1\pm b)$, где $x\in A$, очевидно, записываестя в виде $\lambda(1\pm b)$, где $\lambda\in C_1(a)$. Предположим, что

$$(\lambda_0+\lambda_1 b)p^m+\lambda_2(1\pm b)=1,$$

где $\lambda_i\in T$. Тогда

$$\lambda_0 p^m+\lambda_2=1,\quad \lambda_1 bp^m\pm\lambda_2 b=0. \tag{6}$$

Из второго равенства (6) в силу соотношения $b^{-1}(Ap^m)b=Ap^m$ получаем, что $\lambda_2\in Ap^m$, а тогда первое равенство (6) даёт противоречие. Предположим теперь, что

$$x_1(1+b)+x_2(1-b)\in Ap^m. \tag{7}$$

Тогда по-предыдущему можно считать $x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in C_1(a)$. Из (7) следует, что

$$x_1+x_2 \in Ap^m, \quad x_1 b - x_2 b \in Ap^m,$$

и, снова используя равенство (5), получим, что также $x_1-x_2 \in Ap^m$, откуда $x_1, x_2 \subset Ap^m$, что в силу (5) даёт $x_1(1+b) \in Ap^m$, $x_2(1-b) \in Ap^m$. Следовательно, разложение (4) — нетривиальное прямое разложение модуля M^*.

Пусть, далее, $p=a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha \neq -1$. Тогда $ab(Ap)ab=Ap$ и, следователсно,

$$ab(Ap^m)ab = Ap^m. \tag{8}$$

Положим $\hat{N}=Tp^m$ и обозначим соответственно через $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ левые идеалы алгебры A, породённые соответственно $\hat{N}$ и $(1+ab)$, $\hat{N}$ и $(1-ab)$. Тодга имеет место прямое разложение

$$M^* = A/Ap^m = \hat{M}_1/Ap^m \dotplus \hat{M}_2/Ap^m. \tag{9}$$

Формула (9) доказывается точно такими же рассуждениями, как ранее формула (4) с использованием вместо (5) формулы (8).

Покажем, что слагаемые (4) не изоморфны как A-модули. Для этого сначала установим этот факт при $m=1$. Так как $p=a\pm 1$, то в этом случае модуль A/Ap—двумерное пространство над C, а слагаемые M_i/Ap—одномерные пространства. Предположим, что существует A-изоморфизм θ: $M_1/Ap \to M_2/Ap$. Положим

$$e_1 = \frac{1}{2}(1+b), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1-b). \tag{10}$$

Тогда

$$\Theta(e_1+Ap) = \delta e_2 + Ap, \quad \delta \in C.$$

Так как в силу (10) $e^2=e_1, e_1 e_2=0$, то

$$\Theta(e_1+Ap) = \Theta[e_1(e_1+Ap)] = e_1(\delta e_2 + Ap) = Ap,$$

что даёт противоречие.

Пусть теперь m—произвольное натуральное число. Легко видеть, что каждый из модулей $M_1/Ap^m, M_2/Ap^m$ как T-модуль изоморфен цепному T-модулю T/Tp^m. Отсюда следует, что каждый из подмодулей $M_1'= =Ap^{m-1}e_1+Ap^m/Ap^m$, $M_2'=Ap^{m-1}e_2+Ap^m/Ap^m$ определён в M_1/Ap^m и M_2/Ap^m абсолютно однозачно. Далее,

$$Ap^{m-1} = Ap^{m-1}e_1 \dotplus Ap^{m-1}e_2$$

и

$$A/Ap \cong Ap^{m-1}/Ap^m \cong M_1' \dotplus M_2'.$$

Если существьует изоморфизм

$$\Theta\colon\ M_1/Ap^m \to M_2/Ap^m,$$

то $\theta(M_1') \cong \theta(M_2')$, что ввиду (10) противоречит доказанному неизоморфизму слагаемых (4) при $m=1$.

Исследуем теперь разложение (9). В силу (8) имеем

$$(1+ab)a(1-ab) = (a-a^{-1})(1-ab) = a^{-1}(a^2-1)(1-ab) \equiv$$
$$\equiv a^{-1}(-\alpha-1)(1-ab) \pmod{A(a^2+\alpha)},\quad |\alpha|=1,\ \alpha\neq -1.$$

Значит

$$(1+ab)\cdot A(1-ab) = A(1-ab)$$

и отображение

$$\Theta[(1+ab)+Ap^m] = (1+ab)a(1-ab)+Ap^m$$

определяет A-изоморфизм модуля $\hat{M}_1/Ap^m$ на $\hat{M}_2/Ap^m$.

Пусть $A=A_{11}$. По лемме 2 простые $p\in C_1(a)$, для которых $p\sim p'$, с точностью до подобия совпадают с элементами $p=a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha\neq -1$. Тогда имеет место формула (8), и, дословно повторяя рассуждения для алгебры A_8 при $p=a^2+\alpha$, поличим для $A=A_{11}$ формулу типа (9), где слагаемые в правой части изомпрфны. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $A=A_7, A_{15}$. Для алгебры $A=A_7$ каждый простой элемент $p=a-\alpha\in Q(a)$ третьего рода подобен элементу $a\pm 1$. Остальные простые p—первого рода. Для алгебры $A=A_{15}$ простые $p\sim a-\alpha$, $|\alpha|=1$— второго рода, а остальные простые — первого рода.*

Доказательство. Пусть $A=A_7$. Алгебра A является групповой алгеброй бесконечной группы диэдра над телом кватернионов Q. Пусть $1, i, j, k$—стандартный базис тела Q над полем R. Как было показано выше, каждый простой элемент $p\in Q(a)$ подобен элементу $a-\alpha$, $\alpha\in R(i)$. Предположим, что $a\neq\pm 1$. Покажем, что в этом случае фактор-модуль A/Ap^m неразложим. Доказательство проведём индукцией по числу m. Пусть $m=1$. Очевидно, произвольный элемент $x\in A$ удовлетворяет сравнению

$$x\equiv \mu_0+\mu_1 b \pmod{Ap},$$

где $\mu_0, \mu_1\in Q$. Если $\mu_0=\pm\mu_1$, то $\mu_0+\mu_1 b$ — обратимый элемент групповой алгебры $Q(b)$ циклической группы второго порядка (b) над телом Q. Значит, остаётся рассмотреть случай, когда $\mu_0=\pm\mu_1\neq 0$. Имеем

$$a(1\pm b) = a\pm ba^{-1}\equiv \alpha\pm b\alpha^{-1} \pmod{Ap}.$$

Следовательно,

$$\alpha(1\pm b)-a(1\pm b)\equiv\pm(\alpha-\alpha^{-1})b \pmod{Ap},$$

где элемент $(\alpha-\alpha^{-1})b$ обратим в $Q(a)$, ибо $\alpha\neq\alpha^{-1}$. Итак, если $x\not\equiv 0 \pmod{Ap}$, то $(p, x)=(1)$, т.е. A/Ap — простой A-модуль.

Предположим, что для всех $m\leqq n$, $n>1$ уже доказано, что модуль A/Ap^m— цепной, причём все его подмодули имеют вид

$$(11)\qquad Ap^m,\ Ap+Ap^m/Ap^m,\ \ldots,\ Ap^{m-1}+Ap^m/Ap^m.$$

Рассмотрим фактор-модуль A/Ap^{n+1}. Покажем, что он — цепной, причём все его подмодули имеют вид (11) при $m=n+1$. Если $x=yp$ то в силу индуктивного предположения $(y, p^n)=Ap^i$ $(0\leqq i\leqq n)$ и, следовательно, $(x, p^{n+1})=$ $=Ap^{i+1}$.

Предположим, что $x \not\equiv 0 \pmod{Ap}$, и покажем, что $(x, p^{n+1})=(1)$. По предположению индукции для некоторого $y \in A$ $yx=1+zp^n$ и, значит, идеал $I=(x, p^{n+1})$ содержит элемент $1+(\mu_0+\mu_1 b)p^n$, а тогда и элемент

$$(12) \qquad p^n+p^n(\mu_0+\mu_1 b)\,p^n = [1+p^n(\mu_0+\mu_1 b)]\,p^n \quad (\mu_i \in Q),$$

что в результате дальнейшей редукции элемента (12) по $\bmod\, p^{n+1}$ приводит к элементу

$$[1+p(\gamma_0+\gamma_1 b)]\,p^n \in I \quad (\gamma_i \in Q).$$

Покажем, что

$$z = 1+p(\gamma_0+\gamma_1 b) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\; Ap).$$

Предположим, что

$$(13) \qquad 1+(a-\alpha)(\gamma_0+\gamma_1 b) = (\lambda_0+\lambda_1 b)(a-\alpha), \quad (\gamma_0, \gamma_1 \in Q;\ \lambda_0, \lambda_1 \in Q(a))$$

Из (13) вытекает, что $\lambda_0=\gamma_0$ и

$$1+(a-\alpha)\gamma_0 = \gamma_0(a-\alpha),$$

откуда

$$(14) \qquad 1 = \alpha\gamma_0-\gamma_0\alpha, \quad (\alpha \in R(i),\ \gamma_0 \in Q).$$

Покажем, что равенство (14) противоречиво. В самом деле, элемент γ_0 можно записать в виде $\gamma_0=\beta_1+\beta_2 j$ где $\beta_1, \beta_2 \in R(i)$. Тогда из (14) имеем

$$1 = \alpha(\beta_1+\beta_2 j)-(\beta_1+\beta_2 j)\alpha,$$

то есть

$$1 = \alpha\beta_2 j-\beta_2 j\alpha = (\alpha\beta_2-\beta_2\bar{\alpha})j, \quad (\alpha, \beta_2 \in R(i)).$$

Последнее равенство невозможно.

Итак, идеал $I=(x, p^{n+1})$ содержит элемент (12) вида $zp^n, z \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, Ap)$. Теперъ, в силу индуктивного предположения, $(zp^n, p^{n+1})=Ap^n$ и, снова применяя предположение индукции, получим, что $(x, p^n)=(1)$, и тогда $I=(1)$. Индукция завершена. Мы получили, что каждый модуль $A/Ap^m, p=a-\alpha, \alpha \neq \pm 1$—цепной и, в частности, неразложимый модуль.

Пусть $p=a\pm 1$. Тогда Ap^m—двухсторонний идеал алгебры A. Фактор-алгебра $B=A/Ap^n$ разлагается в прямую сумму двух левых идеалов

$$(15) \qquad B = B(e_1+Ap^n) \dotplus B(e_2+Ap^n),$$

в соответствии с разложением единицы $1=e_1+e_2;\ e_1=\dfrac{1}{2}(1+b),\ e_2=\dfrac{1}{2}(1-b)$. Слагаемые в прявой части (15) не изоморфны для $A=A_7$. Пусть

$$A = A_{15} = \{Q(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad a\lambda = \lambda a, \quad b\lambda = \lambda b, \quad b^2 = -1, \quad (\lambda \in Q).$$

Для доказательства теоремы нужно исследовать только простые $p=a-\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha \in R(i)$, для которых $p \sim p'=a-\alpha^{-1}$. Пусть, как и раньше, $1, i, j, k$ стандартный базис Q над R. Тогда $(jb)^2=1$ и

$$(16) \qquad (jb)(Ap)jb = Ap, \quad p = a^2+\alpha, \quad \alpha \in R(i), \quad |\alpha| = 1.$$

Положим

$$M_1 = \{Ap^m, (1+jb)\}, \quad M_2 = \{Ap^m, (1-jb)\}.$$

Тогда с помощью (16) можно доказать прямое разложение

$$A/Ap^m = M_1/Ap^m \dotplus M_2/Ap^m \tag{17}$$

точко таким же путём, каким для алгебры A_8 доказана формула (4) с использованием (5).

Слагаемые в правой части (17) не изоморфны. В самом деле,

$$(1+jb)\,i\,(1-jb) = 2i\,(1-jb).$$

Это соотношение позволяет построить A-изоморфизм

$$\Theta\colon\ M_1/Ap^m \to M_2/Ap^m$$

по формуле

$$\Theta[(1+jb)+Ap^m] = (1+jb)\,i\,(1-jb)+Ap^m.$$

Теорема доказана.

С помощью теорем 1, 2, 3 можно получить теперь полное описание всех неразложимых R-конечномерных A-модулей для $A=A_i$ $(i=1, 2, \ldots, 15)$. Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $A=A_i$ $(i=1, 2, \ldots, 15)$, *а* $T=R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$— *соответствующая алгебре* A *подалгебра. Будем обозначать через* M—*неразложимые над* R *конечномерные* A-*модули. При* $i=1, \ldots, 4$ *модули* M *описываются леммой* 1. *Пусть* $i=5, \ldots, 15$. *Каждый модуль* M *изоморфен прямому слагаемому фактор-модуля* A/Ap^m, *где* $p\in T$—*простой элемент. Описание с точностью до изоморфизма компонент модуля* A/Ap^m *дано в теоремах* 1, 2, 3. *Если* $m\neq n$, *то неразложимые модули, возикающие в разложении модуля* A/Ap_1^m, *не изоморфны слагаемым в разложении* A/Ap_2^n. *Если* $m=n$, *то неразложимая компонента* M_1 *модуля* $A/(p_1^n)$ *изоморфна некоторой неразложимой компоненте модуля* $A/(p_2^n)$ *тогда и только тогда когда выполняется одно из условий* $p_1\sim p_2$, $p_1'\sim p_2'=b^{-1}p_1b$.

Доказательство. Согласно замечанию 1 к лемме 3

$$A/(p_1^n) = T(p_1^n)+bT/(p_1^n). \tag{18}$$

Таким образом, $A/(p_1^n)$ как T-модуль разлагается в сумму модулей, изоморфных $T/(p_1^n)$ и $T/(p_1'^n)$, причём эти модули цепные с длиной композиционного ряда n. Так как для конечно порождённых T-модулей имеет место теорема Круля—Шмидта, то отсюда вытекает, что при $m\neq n$, слагаемые модуля $A/(p_1^n)$ не могут быть изоморфны слагаемым модуля $A/(p_2^m)$. Пусть $m=n$ и некоторая наразложимая компонента M_2 модуля $A/(p_2^n)$ изоморфна как A-модуль неразложимой компоненте M_1 модуля $A/(p_1^n)$. Тогда M_1 и M_2 изоморфны и как T-модули и, значит они как T-модули одновременно либо цепные, либо прямые суммы двух цепных модулей. В любом случае в силу леммы 1 и (18) выполняется одно из узловий $p_1\sim p_2$ или $p_2\sim p_1'$. Если $p_1\sim p_2$, то, очевидно, имеет место изоморфизм прямых разложений модулей $A/(p_1^n)$ и $A/(p_2^n)$. Пусть $p_2\sim p_1'=b^{-1}p_1b$. Тогда по лемме 4 модуль $A/(p_1^n)$—неразложим и в силу

$$A/(p_1^n)\cong A/(p_1'^n)\cong A/(p_2^n).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [5], в частности, описаны все неразложимые конечномерные представления бесконечной группы диэдра D над произдольным полем K, характеристика которого не совпадает с числом 2. Эти резултаты дают, в частности, утверждения настоящей статьи об алгебрах A_5 и A_6. Мы включили их в эту работу для полноты изложения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 163—170.

[2] С. Д. Берман — К. Бузаши, О мдулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica* **16** (1981), 455—470.

[3] N. Jacobson, The Theory of Rings. *Amer. Math. Soc. New York* 1943.

[4] Ч. Кэртис — И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. *Изд. Наука,* 1969.

[5] С. Д. Берман — К. Бузаши, О представлениях бесконечной группы диэдра. *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1981), 173—187.

(Поступило 20. VII. 1982 г.)