Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп

Т. Ж. МОЛЛОВ

Пусть G и G' — периодические абелевы группы, H и H' — соответственно их подгруппы, K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп G и G' и KG — групповая алгебра группы G над полем K. Хорошо известно, что в этом случае групповая алгебра KG полупроста. Поле K называется полем второго рода относительно p ([6], стр. 684), если степень $\big(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots): K\big) < \infty$, где ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы в алгебраическом замыкании $\overline{K}$ поля K, $i \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (p — простое число). В противном случае K называетоя полем первого рода относительно p. Говорят, что пары групповых алгебр (KG, KH) и (KG', KH') K-изо морфны, если существует K-изоморфизм алгебры KH на алгебру KH', продолжающйся до K-изоморфизма алгебры KG на алгебру KG'. В статье найдены необходимые и достаточные условия для K-изоморфизма пар (KG, KH) и (KG', KH') полупростых групповых алгебр периодических абелевных групп, т.е. полная система инвариантов пары (KG, KH), когда 1) K — алгебраически замкнутое поле и 2) когда G — абелева p-группа, $p \neq 2$ и K — поле второго рода относительно p. Оказывается, что эта полная система инвариантов состоит из мощности $|G|$ и индекса $(G: H)$ подгруппы H в группе G. С. Д. Бермая [1] доказывает, что когда G счетна и K — алгебраически замкнутое поле, то полная система инвариантов полупростой групповой алгебры KG образуется из мощности $|G|$. Позже Мей [3] получает тот же самый результат, когда периодическая группа G имеет любую мощность.

Отметим несколько предварительных утверждений.

Предложение 1. *Если G и G' — абелевые группы, H и H' — соответственно их подгруппы, K — любое поле и пары алгебр (KG, KH) и (KG', KH') — K-изоморфны, то индекс (G, H) совпадает с индексом $(G': H')$.*

Доказательство. Пусть $\varphi: (KG, KH) \to (KG', KH')$ яавляется K-изоморфизмом пар групповых алгебр. Единичный характер χ группы H над полем K может быть рассмотрен как линейный характер алгебры KH, т.е. χ является K-гомоморфизмом K-алгебры KH на K-алгебру K. Характеру χ алгебры KH можно сопоставить линейный характер χ' алгебры KH', если для каждого элемента $x' \in KH'$ положить

$$\chi'(x') = \chi\big(\varphi^{-1}(x')\big). \tag{1}$$

Так как φ^{-1} и χ — K-гомоморфизмы и χ — характер алгебры KH над K, то χ'—характер алгебры KH'. Докажем, что

$$\varphi(\mathrm{Ker}\,\chi) = \mathrm{Ker}\,\chi' \tag{2}$$

Действительно, пусть a — любой элемент ядра $\mathrm{Ker}\,\chi$. Тогда $\varphi(a)\in\mathrm{Ker}\,\chi'$, так как $\chi'(\varphi(a))=\chi(\varphi^{-1}(\varphi(a)))=\chi(a)=0$, где первое равенство следует из формулы (1), т.е. $\varphi(\mathrm{Ker}\,\chi)\subseteqq\mathrm{Ker}\,\chi'$. Докажем обратное включение. Пусть $a\in\mathrm{Ker}\,\chi'$, т.е. $\chi'(a)=0$. Тогда, ввиду (1), получится

$$\chi(\varphi^{-1}(a)) = 0. \tag{3}$$

Так как φ — изоморфизм алгебры KH на KH', то $a=\varphi(b)$, где $b\in KH$. Покажем, что $b\in\mathrm{Ker}\,\chi$, откуда будет следовать, что $a\in\varphi(\mathrm{Ker}\,\chi)$ или, что $\mathrm{Ker}\,\chi'\subseteqq\varphi(\mathrm{Ker}\,\chi)$. Действительно, ввиду (3), получится $0=\chi(\varphi^{-1}(a))=$ $=\chi(\varphi^{-1}(\varphi(b)))=\chi(b)$, т.е. $\chi(b)=0$ или $b\in\mathrm{Ker}\,\chi$, чем формула (2) установлена. Пусть $\langle\mathrm{Ker}\,\chi\rangle$ и $\langle\mathrm{Ker}\,\chi'\rangle$ — идеалы соответственно алгебр KG и KG', порожденные идеалами $\mathrm{Ker}\,\chi$ и $\mathrm{Ker}\,\chi'$. Так как $\langle\mathrm{Ker}\,\chi\rangle$ порождается елементами $h-1$, где h пробегает группу H, то $K(G/H)\cong KG/\langle\mathrm{Ker}\,\chi\rangle\cong$ $\cong\varphi(KG)/\varphi(\langle\mathrm{Ker}\,\chi\rangle)\cong KG'/\langle\mathrm{Ker}\,\chi'\rangle$, где первый изоморфизм — хорошо известный факт (см. [1]), вторый изоморфизм устанавливается тривиально, а последний следует из (2). Этам установлена формула

$$K(G/H) \cong KG'/\langle\mathrm{Ker}\,\chi'\rangle. \tag{4}$$

В теории скрещенных групповых алгебр известно, что фактор-алгебра $KG'/\langle Ker\,\chi'\rangle$ K-изоморфна скрещенной групповой алгебре $(G'/H', K, \{\chi'(h')\})$ группы G'/H' и поля K с системами факторов $\{\chi'(h')\}$ Тогда из (4) получается

$$K(G/H) \cong (G'/H', K, \{\chi'(h')\}). \tag{5}$$

Из (5) получается $(G\colon H)=(G'\colon H')$, так как алгебра $K(G/H)$ имеет групповой базис с мощностью $(G\colon H)$, а скрещенная групповая алгебра $(G'/H', K, \{\chi'(h')\})$ — базис с мощностью $(G'\colon H')$, и из K-изомофризма двух скрещенных групповых алгебр над одним и тем же полем K вытекает, что мощности их базисов совпадают.

Лемма 2. *Если G — периодическая абелева группа и H — ее подгруппа, то G можно представить как объединение возрастающей последовательности*

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots \subset G_\beta = G \tag{6}$$

таких своих подгрупп G_α, что выполняются следующие две условия: $(*)$ индекс $(G_\alpha\colon H)$ — конечное число, если α — конечное порядковое число и $(G_\alpha\colon H)=|\alpha|$, если α — бесконечное порядковое число;
$(**)$ для каждого порядкового числа α, $\alpha\leqq\beta$, имеет место $(G_{\alpha+1}\colon G_2)=p_{\alpha+1}$, где $p_{\alpha+1}$ — некоторое простое число.

Доказательство Положим $H=G_0$. Допустим, что уже построены все группы G_γ, где $\gamma<\alpha$ и $\alpha\geqq\beta$. Пусть α — непредельное порядковое число. Тогда G_α построим следующим образом: выбираем такой элемент $g_\alpha\in G\setminus G_{\alpha-1}$, что $g_\alpha^{p_\alpha}\in G_{\alpha-1}$, где p_α — некоторое простое число. Очевидно такой элемент g_α существует, и G_α строится как подгруппа группы G, порожденная подгруппой $G_{\alpha-1}$ и элементом g_α. Если α — предельное порядковое число, то положим $G_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$. Таким образом, последовательность (6) вообще так построена, что группы G_α удовлетворяют условию $(**)$. Докажем, что выполняется условие $(*)$. Для $\alpha=0$ условие $(*)$ выполняется тривиально. Допустим, что условие $(*)$ выполняется для всех групп G_γ, для которых $\gamma<\alpha\leqq\beta$. Рассмотрим следующие случаи: 1) существует $\alpha-1$ и 2) $\alpha-1$ не существует.

1) Пусть существует $\alpha-1$. Если α — конечное порядковое число, то $(G_\alpha: H)=(G_\alpha: G_{\alpha-1})\dots(G_1: H)=p_\alpha\dots p_1$, где $p_1, \dots, p_\alpha$ — простые числа, и второе равенство следует из того, что выполняется условие $(**)$ для групп G_α. Следовательно, $(G_\alpha: H)$ — конечное число, т.е. условие $(*)$ выполнено. Пусть α — бесконечное порядсовое число. Тогда порядковое число $\alpha-1$ бесконечно и $(G_\alpha: H)=(G_\alpha: G_{\alpha-1})(G_{\alpha-1}: H)=p_\alpha|\alpha-1|=|\alpha-1|=|\alpha|$, где второе равенство следует из индуктивного предположения, а четвертое выполняется ввиду того, что $|\alpha-1|$ — бесконечное кардинальное число.

2) Пусть $\alpha-1$ не существует. Так как $G_\alpha=\bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma$, то $G_\alpha\big|H=\bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma\big|H$. Следовательно, $(G_\alpha: H)=\sup\{(G_\gamma: H)\}_{\gamma<\alpha}=\sup\{|\gamma|\}_{\gamma<\alpha}=|\alpha|$. Этим установлено свойство $(*)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если G — периодическая абелева группа и K — алгебраически замкнутое поле, то группа $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG является полной.*

Доказателство. Докажем, что если n — любое натуральное число, то из каждого элемента группы $V(KG)$ извлекается корень n-ой степени в $V(KG)$. Действительно, пусть $x\in V(KG)$. Тогда $x\in KF$, где F — некоторая конечная подгруппа группы G. Так как KF — конечномерная полупростая алгебра, то KF разлагается в прямую сумму минимальных идеалов $I_i=KFe_i$, каждый из которых порождается соответственно единственным минимальным идемпотентом e_i, $i=0, 1, \dots, s$, т.е. $KF=I_0\oplus I_1\oplus\dots\oplus I_s$. Если e_0 соответствует единичному характеру группы F, то $xe_0=e_0$ и $x=e_0+xe_1+\dots+xe_s$. Так как каждый идеал I_i изоморфен алгебраически замкнутому полю K, то из каждый компоненты xe_i елемента x извлекается корень n-ой степени в $V(KF)\subseteqq V(KG)$. Лемма доказана.

Аналогично лемме 3 можно сформулировать следуещее утверждение.

Лемма 3′. *Если G — абелева p-группа и K — поле второго рода относительно p, причем при $p=2$ имеет место $K=K(\varepsilon_2)$, то силовская p-подгруппа $S(KG)$ группы $V(KG)$ является полной.*

Доказательство аналогично лемме 3, но его можно получить как прямое следствие теоремы 1 статьи [4] и предложения 11 статьи [5].

Лемма 4. *Пусть G — периодическая абелева группа, H — такая ее подгруппа, что G/H — циклическая группа порядка p для некоторого простого числа p и K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G. Если H' — любой групповой базис алгебры KH, то алгебра KG обладает базисом, разлагающимся в прямое* *произведение* $H'\times\langle c\rangle$, *где* $\langle c\rangle$ — *циклическая подгруппа группы* $V(KG)$ *нормированных единиц алгебры* KG *и порядок группы* $\langle c\rangle$ *равняется* p.

Доказательство. Пусть $G/H=\langle aH\rangle$. Так как мощность $|G/H|=p$, то существует элемент f группы H, такой что

$$a^p = f. \tag{7}$$

Ввиду того, что $H\subseteq V(KH)$ и группа $V(KH)$, в силу леммы 3, полна, то существует такой элемент t группы $V(KH)$, что $f=t^p$. Из этого равенства и из (7), полагая

$$c = at^{-1}, \tag{8}$$

получается, что $c^p=1$, $c\in V(KH)$ и что порядок элемента c равен p. Так как $KH=KH'$ и $a^i\notin H$ для $0<i<p$, то $c^i=a^it^{-i}\notin H$, т.е. $H'\cap\langle c\rangle=1$ или существует прямое произведение $H'\times\langle c\rangle$. Группа $G'=H'\times\langle c\rangle$ является K-порождающим множеством алгебры KG, ввиду того, что для каждого элемента $g\in G$ существует такой элемент $h\in H$, что $g=a^sh=c^st^sh\in K(H'\times\langle c\rangle)$, где s — целое неотрицательное число и второе равенство следует из (8). Покажем, что G' — линейно независимое множество над K. Любой элемент группы G', ввиду (8), имеет вид xa^jt^{-j}, где $x\in H'$. Допустим, что существуют такие элементы $\alpha_{x_j}\in K$, что

$$\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{x\in H'}\alpha_{xj}xa^jt^{-j}=0 \quad \text{или} \quad \sum_{j=0}^{p-1}a^jt^{-j}\sum_{x\in H'}\alpha_{xj}x=0.$$

Так как a^jH образуют различные смежные классы группы G по подгруппе H для $j=0, 1, \ldots, p-1$, то из последнего равенства следует $a^jt^{-j}\sum\limits_{x\in H'}\alpha_{xj}x=0$ и, ввиду обратимости элемента a^jt^{-j}, что $\sum\limits_{x\in H'}\alpha_{xj}x=0$. Так как H' — групповой базис алгебры KH, то $\alpha_{xj}=0$ для каждого $x\in H'$ и для $j=0, 1, \ldots, p-1$. Следовательно, $H'\times\langle c\rangle$ — групповой базис алгебры KG. Лемма доказана.

Аналогичным образом, используя лемму 3′, получается следующее утверждение.

Лемма 4′. *Пусть* G — *абелева* p-*группа*, H — *такая ее подгруппа, что* G/H —*циклическая группа порядка* p *и* K — *поле второго рода относительно* p, *причем при* $p=2$ *имеет место* $K=K(\varepsilon_2)$. *Если* H' — *любой групповой базис алгебры* KH, *то алгебра* KG *обладает групповым базисом* $G'=H'\times\langle c\rangle$, *где* $\langle c\rangle$ —*цикл ическая подгруппа группы* $V(KG)$ *и порядок группы* $\langle c\rangle$ *равняется* p.

Предложнеие 5. *Если* G — *периодическая абелева группа,* H — *ее подгруппа и* K — *алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы* G, *то групповая алгебра* KG *обладает групповым базисом* $H\times A$, *где* A — *подгруппа группы* $V(KG)$ *нормированных единиц алгебры* KG, A — *прямое произведение циклических групп простых порядков и мощность* $|A|=(G\colon H)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2, группа G можно представить как объединение возрастающей последовательности (6) таких своих подгрупп G_α, что выполнены условия $(*)$ и $(**)$ леммы 2. Доказательство проводится методом индукции в интервале $[0, \beta]$. Если порядковое число α интервала $[0, \beta]$ равняется нулью, то утверждедие тривиально для G_0. Допустим, что для всех $\gamma<\alpha$ построен групповой базис F_γ алгебры KG_γ, $F_0=H$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $F_\gamma=H\times A_\gamma$, $A_\gamma\subseteqq V(KG_\gamma)$, A_γ — прямое произедение циклических групп простых порядков, и $|A_\gamma|=(G_\gamma: H)$;

в) если γ — непредельное порядковое число, то $A_\gamma=A_{\gamma-1}\times\langle t_\gamma\rangle$ и порядок $O(t_\gamma)$ элемента t_γ — некоторое простое число;

с) если γ — пределное порядковое число, то $A_\gamma=\bigcup\limits_{\delta<\gamma} A_\delta$.

Построим групповой базис F_α алгебры KG_α, удовлетворяющий условиям а), в) и с).

1) Пусть α — предельное порядковое число. Положим $A_\alpha=\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma$ и $F_\alpha=H\times A_\alpha$. Тогда, ввиду индуктивного предположения для F_γ, $\gamma<\alpha$, получится

$$F_\alpha = H\times A_\alpha = H\times\Big(\bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma\Big) = \bigcup_{\gamma<\alpha}(H\times A_\gamma) = \bigcup_{\gamma<\alpha} F_\gamma, \quad \text{т.е.} \quad F_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} F_\gamma.$$

Так как $G_\alpha=\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} G_\gamma$ и, согласно индуктивному предположению, $KG_\gamma=KF_\gamma$ для каждого $\gamma<\alpha$, то

$$KG_\alpha = K\Big(\bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma\Big) = \bigcup_{\gamma<\alpha} KG_\gamma = \bigcup_{\gamma<\alpha} KF_\gamma = K\Big(\bigcup_{\gamma<\alpha} F_\gamma\Big) = KF_\alpha.$$

K-линейная незавнисимость элементов группы F_α вытекает из того, что элементы каждого базиса F_γ являются K-линейно независимыми. Следовательно, F_α — групповой базис алгебры KG_α. По построению условие с) выполнено для F_α. Докажем условие а). Так как, по индуктивному предположению, $A_\gamma\subseteqq V(KG_\gamma)$ и G_α — объединение возрастающей последовательности подгрупп G_γ, $\gamma<\alpha$, то

$$A_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma \subseteqq \bigcup_{\gamma<\alpha} V(KG_\gamma) = V\Big(K\Big(\bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma\Big)\Big) = V(KG_\alpha),$$

т.е. $A_\alpha\subseteqq V(KG_\alpha)$. Если γ — непредельное порядковое число, $\gamma<\alpha$, то, по индуктивному предположению, $A_\gamma=A_{\gamma-1}\times\langle t_\gamma\rangle$, где $O(t_\gamma)=p_\gamma$ — некоторое простое число. Следовательно, A_γ удовлетворяет условиям леммы 15 статьи [5], откуда вытекает, что $A_\alpha=A_0\times\prod\limits_\gamma\langle t_\gamma\rangle=\prod\limits_\gamma\langle t_\gamma\rangle$, где γ пробегает все непредельные порядковые числа между 0 и α, т.е. A_α разлагается в прямое произведение циклических прупп простых порядков и $A_\alpha=|\alpha|=(G_\alpha: H)$, где последнее равенство следует из леммы 2. Этим условие а) доказано для группы F_α.

2) Пусть α — непредельное порядковое число. Тодга $(G_\alpha: G_{\alpha-1})=p_\alpha$ для некоторого простого числа p_α. Согласно индуктивному предположению, алгебра $KG_{\alpha-1}$ обладает групповым базисом $F_{\alpha-1}=H\times A_{\alpha-1}$, причем $F_{\alpha-1}$ удовлетворяет условиям а), в) и с). Из леммы 4 следует, что алгебра KG_α

имеет групповой базис $F_\alpha = F_{\alpha-1} \times \langle t_\alpha \rangle = (H \times A_{\alpha-1}) \times \langle t_\alpha \rangle$, где $\langle t_\alpha \rangle \subseteqq V(KG_\alpha)$ и $O(t_\alpha) = p_\alpha$. Положим $A_\alpha = A_{\alpha-1} \times \langle t_\alpha \rangle$. Этим выполнено условие в) для группы F_α. Покажем, что для группы F_α выполняется условие а). Действительно, $F_\alpha = H \times A_\alpha$ и так как $A_{\alpha-1} \subseteqq V(KG_{\alpha-1})$, $\langle t_\alpha \rangle \subseteqq V(KG_\alpha)$, то $A_\alpha \subseteqq V(KG_\alpha)$. Так как группа $A_{\alpha-1}$, ввиду индуктивного предположения, разлагается в прямое произведение цикличеких групп простых порядков и $O(t_\alpha) = p_\alpha$, то $A_\alpha = A_{\alpha-1} \times \langle t_\alpha \rangle$ разлагается в прямое произведение циклических групп простых порядков. Кроме того из последного равенства следует, что $|A_\alpha| = |A_{\alpha-1}| O(t_\alpha) = (G_{\alpha-1}: H) p_\alpha = (G_{\alpha-1}: H)(G_\alpha: G_{\alpha-1}) = (G_\alpha: H)$, где второе равенство вытекает из индуктивного предположения для $A_{\alpha-1}$. Таким образом, условие а) выполнено для группы F_α. Предложение доказано.

Аналогичным образом, изпользуя леммы 2 и 4′, доказывается следующее утверждение.

Пeдложенне 5′. *Если G — абелева p-группа, H — ее подгруппа, K — поле второго рода относительно p (с характеристикой, отличной от p), причем при $p=2$ имеет место $K=K(\varepsilon_2)$, то групповая алгбра KG обладает базисом $H \times A$ где A — подгруппа группы $V(KG)$ нормированных единиц алгебры KG, A — прямое произведение циклических групп простых порядков и $|A| = (G: H)$.*

Из предложений 5 и 5′, полагая $H=1$, получается следующее утверждение.

Следствие 6. *Пусть G — периодическая абелева группа, K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G и, или* а) *K — алгебраически замнутое поле, или* в) *G — абелева p-группа и K — поле второго рода относительно p, причем при $p=2$ имеет место $K=K(\varepsilon_2)$. Тогда групповая алгебра KG обладает групповым базисом, разлагающимся в прямое произведение циклических групп $\langle t_\gamma \rangle$ простых порядков, причем в случая* в) *$\langle t_\gamma \rangle$ — p-группа.*

Теорема 7. *Пусть G и G' — периодические абелевы группы, H и H' — соответственно их подгруппы и K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп G и G'. Имеет место K-изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG', KH')$ пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда $|H| = |H'|$ и $(G: H) = (G': H')$.*

Доказательство. Если $(KG, KH) \cong (KG', KH')$, то из предложение 1 следует $(G: H) = (G': H')$. Кроме того, из $KH \cong KH'$ вытекает $|H| = |H'|$.

Пусть, обратно, $|H| = |H'|$ и $(G: H) = (G': H')$. Ввиду предложения 5 групповая алгебра KG обладает групповым базисом $H \times A$, $|A| = (G: H)$, а алгебра KG' — базисом $H' \times A'$, $|A'| = (G': H')$. Тогда $KG = K(H \times A) \cong KH \otimes_K KA$ и $KG' = K(H' \times A') \cong KH' \otimes_K KA'$. Однако из $|H| = |H'|$ следует, что существует K-изоморфизм θ алгебры KH на алгебру KH' [3]. Аналогично, ввиду предложения 1, из $|A| = (G: H) = (G': H') = |A'|$ вытекает, что существует K-изоморфизм φ алгебры KA на алгебру KA'. Тогда тензорное произведение $\theta \otimes \varphi$ являетоя изоморфизмом алгебры $KH \otimes_K KA \cong KG$ на алгебру $KH' \otimes_K KA' \cong KG'$, т.е. существует изоморфизм алгебры KG на алгебру KG', продолжающий изоморфизм $\theta: KH \to KH'$.

Теорема 8. *Если G и G' — абелевы p-группы, H и H' — соответственно их подгруппы, K — поле, характеристика которого не равна p и поле K — поле* *второго рода относительно* p, *причем при* $p=2$ *имеет место* $K=K(\varepsilon_2)$, *где* ε_2 — *первообразный корень четвертой степени из* 1 *в алгебраическом замыкании поля* K, *то существует* K-*изоморфизм* $(KG, KH)\cong(KG', KH')$ *пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда* $|H|=|H'|$ *и* $(G: H)=(G': H')$.

Доказательство аналогично теореме 7, используя предложение 1, предложение 5′ и факт, что полная система инвариантов указанной групповой алгебры KG образуется из мощности $|G|$ (см. теорему 1 статьи [2] и предложение 2 работы [5]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.

[2] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Об изоморфизме полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Доклады БАН*, **35** (1982), 869—871.

[3] W. May, Invariants for kommutative group algebras III. *J. Math.* **15** (1971), 525—531.

[4] Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН* 35, 1982, 1619—1622.

[5] Т. Ж. Моллов. Мультипликативные группы полупростых групповых алгебр. Сердика Българско математическо списание *(в печати)*,

[6] D. S. Passman, The algebraic structure of group rings. *New York*, Interscience 1977.

(Поступило 27 XII. 1982 г.)