$$a_i^{-1}(j_1, \ldots, j_{i-1})a_m(l_1, \ldots, l_{m-1})a_i(j_1, \ldots j_{i-1}) = \tag{2}$$

$$= \begin{cases} a_m(l_1, \ldots, l_{i-1}, l_i+1, l_{i+1}, \ldots, l_{m-1}) \\ \text{если} \quad l_s = j_s; \quad s = 1, 2, \ldots, i-1, \\ a_m(l_1, \ldots, l_{m-1}) \\ \text{если} \quad l_s \neq j_s \quad \text{для некоторого} \quad 1 \leqq s \leqq i-1; \end{cases}$$

$$1 \leqq i < m \leqq k; \quad 1 \leqq l_s \leqq p^{n_{s_1}}; \quad s_1 = 1, 2, \ldots, m-1; \quad 1 \leqq j_{s_2} \leqq p^{n_{s_1}};$$
$$s_2 = 1, 2, \ldots, i-1.$$

Введём следующие обозначения:

$$x_m = a_1 \cdot a_2(1) \ldots a_m(1, 1, \ldots, 1); \quad x_{k-1} = x \tag{3}$$

Вводя аналогичные [3] обозначения:

$$y_j(1) = x_{j-1}^{-1} a_j(1, \ldots, 1) x_{j-1}; \quad y_j(i) = x_{j-1}^{-1} y_j(i-1) x_{j-1} \tag{4}$$

легко получаем, что

$$y_j\Big(\sum_{i=1}^{j-1} p^{n_i}\Big) = y_j(1).$$

Очевидно, что элементы

$$y_k(1), y_k(2), \ldots, y_k(q); \quad q = p^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i}$$

являются упорядочением (в лексикографическом порядке) следующего базиса группы A_k:

$$a_k(j_1, \ldots, j_{k-1}); \quad j_s = 1, 2, \ldots, p^{n_s}; \quad s = 1, 2, \ldots, k-1.$$

3. Класс нильпотентности группы G

Лемма 1. *Порядок элементов* x_m $(m=1, 2, \ldots, k)$ *равен*

$$p^{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i}.$$

Доказательство

Доказательство проводится индукцией по числу m. При $m=1$ утверждение очевидно, т.к. порядок элемента $x_1 = y_1(1) = a_1$ равен p^{n_1}.

Пусть теперь порядок элемента $x_j = y_1(1) y_2(1) \cdot \ldots \cdot y_j(1)$ равен l. Тогда равенство

$$x_{j+1}^l = x_j y_{j+1}(1) y_{j+1}(2) \cdot \ldots \cdot y_{j+1}(l) = e$$

выполняется лишь тогда, когда $l = \sum\limits_{i=1}^{j} p^i \cdot s_1$ для некоторого $s_1 \geqq 1$.

Следовательно,

$$y_{j+1}(1) y_{j+1}(2) \cdot \ldots \cdot y_{j+1}(l) = \big(y_{j+1}(1) \cdot y_{j+1}(2) \cdot \ldots \cdot y_{j+1}(p^{n_1 + \cdots + n_j})\big)^{s_1} = e$$

и порядок элемента $y_{j+1}(1)$ очевидно равен $p^{n_{j+1}}$, и так $s_1 = p^{n_{j+1}}$ и $l = \sum_{i=1}^{j+1} p^{n_i}$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. *В сплетении G выполняется*

$$[A_k, G, \ldots, G] = [A_k, x, \ldots, x],$$

где правая и левая стороны равенства представляют собой подгруппы G, порождённые многократными коммутаторами с одинаковым числом членов.

Доказательство

Так как A_k коммутативный нормальный делитель G, то $[A_k, G] = [A_k, A_k \cdot K] = [A_k, K]$ ($[C, D]$ обозначает группу, порождённую взаимными коммутаторам подгрупп C и D). Далее, из следующих соотношений для коммутаторов

$$[a, k_1 k_2] = [a, k_2]^{k_1} [a, k_1] \quad \text{и} \quad [a, k_1^{-1}] = ([a, k_1]^{k_1^{-1}})^{-1},$$

где $a \in A_k$; $k_1, k_2 \in K$ и того, что A_k-коммутативный нормальный делитель группы G, следует, что группа $[A_k, K]$ порождается множеством коммутаторов вида $[a, k_1]$, где элементы a и k_1 являются соответственно порождающими элементами подгрупп A_k и K.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что коммутаторы вида $[y_k(l), g]$ могут быть представлены в виде произведения коммутаторов типа $[y_k(l), x]$, где $y_k(l)$-базисный элемент A_k, определённый в (4), а g-какой-либо из порождающих элементов группы K.

Используя (2) и (4) легко видеть, что для произвольного $g \in K$ возможны лишь следующие два случая:

а) $[y_k(l), g] = y_k(l) y_k^{-1}(l+j)$ для некоторого $j > 0$.

б) $[y_k(l), g] = y_k(l) y_k^{-1}(l-i)$ для некоторого $i > 0$.

Так как $[y_k(l), x] = y_k^{-1}(l+1) y_k(l)$ выполняется, то для *а)*

$$[y_k(l), g] = [y_k(l), x][y_k(l+1), x] \cdot \ldots \cdot [y_k(l+j-1), x] = y_k^{-1}(l) y_k(l+j),$$

а для *б)*

$$[y_k(l), g] = [y_k^{-1}(l-i), x] \cdot \ldots \cdot [y_k^{-1}(l-1), x] = y_k(l) y_k^{-1}(l-i).$$

Вследствии этого получаем, что $[A_k, G] = [A_\kappa, x]$. Пусть

$$A^{(1)} = A_k; \quad [A^{(i)}, G] = A^{(i+1)}.$$

Группы $A^{(i)}$ являются нормальными делителями группы G, так как для элементов $a_i \in A^{(i)}$ и $g \in G$ справедливо $[a_i, g] = a_i^{-1} a_i^g \in A^{(i)}$ т.е. $a_i^g \in A_k$ и поэтому нормализатором группы $A^{(i)}$ в группе G является сама G. Аналогично первому шагу доказательства можно показать $[A^{(i)}, G] = [A^{(i)}, K]$. Используя этот факт и соотношения для коммутаторов вида $[y_k(l), g]$, приведённые в доказательстве выше, утверждение теоремы может быть легко доказано по индукции.

В дальнейшем используется следующий результат [1] стр. 378.

Лемма 3. *Пусть* A *нормальный делитель нильпотентной группы* G *и* $G=A\cdot K$ *для некоторой подгруппы* $K\subseteq G$. *Определим нормальные делители* $A^{(i)}$ *группы* G *следующим образом:*

$$A^{(1)}=A;\quad A^{(i)}=[A^{(i-1)},G],$$

Тогда для нижнего центрального ряда

$$G=\Gamma_1(G)\supset\Gamma_2(G)\supset\ldots\supset\Gamma_{c+1}(G)=e$$

группы G *выполняется*

$$\Gamma_i(G)=A^{(i)}\Gamma_i(K).$$

Теорема 4. *Для класса нильпотентности* c *группы* G *выполняется равенство*

$$c=n_k\Big(p^{\sum_{i=1}^{k-1}n_i}-p^{\sum_{i=1}^{k-1}n_i-1}\Big)+p^{\sum_{i=1}^{k-1}n_i-1}$$

Доказательство

Для группы $\bar{G}=(a_k)\wr(x)$, где x-элемент группы G вида (3), очевидно выполняется, что $\bar{G}\subset G$ и $\bar{G}=A_k\cdot(x)$, так как порядок элемента x равей $\sum_{i=1}^{k-1}p^{n_i}$. По леммам 2. и 3. выполняется $A^{(i)}=[A_k,x,\ldots,x]\subseteq\Gamma_i(\bar{G})$, и поэтому $\Gamma_i(G)\cap A_k=\Gamma_i(\bar{G})\cap A_k=A^{(i)}$. Класс нильпотентности группы G совпадает с длиной нормального ряда $A^{(1)}\supset A^{(2)}\supset\ldots\supset A^{(c)}$, так как класс нильпотентности группы K не превышает класс нильпотентности группы G. Класс нильпотентности групп $\bar{G}$ и G совпадает вследствии $A^{(i)}\subseteq\Gamma_i(\bar{G})$. Так как группа G является сплетением двух циклических групп и известно [5] что класс нильпотентности сплетения группы порядка p^n с группой порядка p^m равен $n(p^m-p^{m-1})+p^{m-1}$, то доказательство закончено.

Замечание: Х. Либек [5] доказал, что класс нильпотентности сплетения двух абелевых групп зависит только от экспоненты первого множителя и от второго множителя. Теорема 4. может быть обобщена и на случай когда первый множитель сплетения является абелевой p-группой с экспонентой p^{n_k}.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Huppert, Eudliche Gruppen I. *Springer-Verlag* 1967.
[2] L. A. Kaloujnine, La Structure des p-groupes de Sylow des groupes symmetriques finis, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **65** (1948), 239—276.
[3] К. Бузаши, О структуре сплетения конечного числа циклических групп простого порядка *Publ. Math. (Debrecen)* **15** (1968), 107—129.
[4] G. Baumslag, Wreath products and p-groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **55** (1959), 224—231.
[5] H. Liebech, Concerning nilpotent wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), 443—451.
[6] D. P. Meldrum, Central series in wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **63**. (1967), 551—567.
[7] В. И. Сущанский, Сплетения элементарных абелевых групп. *Матем. заметки* (1972) **II**. 61—72.

(Поступило 17. **з.** *1983.)*