Über spezielle Finsler—Otsukische Räume

Herrn Professor A. Rapcsák zum 70. Geburstag gewidmet

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

§ 1. Einleitung

In unserem Aufsatz [4][1]) haben wir in den Linienelementräumen eine Übertragungstheorie begründet die aus der Vereinigung der Cartanschen Übertragungstheorie der Finslerräume (vgl. [2], oder [6], Kap. III.) und der Otsukischen Übertragungstheorie (vgl. [5]) entstanden ist. Der Grundgedanke dieser vereinigten Übertragungstheorie ist das folgende: das invariante Differential eines Tensors, z. B. dritter Stufe $V_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ und homogen von nullter Dimension in den $\dot{x}^i$, soll eine spezielle Form, undzwar

$$DV_j{}^i{}_k := P^i_a P^b_j P^c_k \bar{D} V_b{}^a{}_c \tag{1.1}$$

haben, wo

$$\begin{aligned}\bar{D}V_b{}^a{}_c = dV_b{}^a{}_c + (A_r{}^a{}_s V_b{}^r{}_c - A_b{}^r{}_s V_r{}^a{}_c - A_c{}^r{}_s V_b{}^a{}_r)\bar{\omega}^s(d) + \\ +({}'\Gamma_r{}^a{}_s V_b{}^r{}_c - {}''\Gamma_b{}^r{}_s V_r{}^a{}_c - {}''\Gamma_c{}^r{}_s V_b{}^a{}_r)\, dx^s,\end{aligned} \tag{1.1a}$$

$A_r{}^a{}_s$ den Torsionstensor der Cartanschen Theorie, ferner ${}'\Gamma_r{}^a{}_s$ bzw. ${}''\Gamma_r{}^a{}_s$ die Übertragungsparameter für die kontra- bzw. kovarianten Indizes der Tensoren und P^b_j einen gemischten Tensor bedeuten. $\bar{\omega}^s(d) := \bar{D}l^s$, wo l^s — wie gewöhnlich — den Einheitsvektor in der Richtung von $\dot{x}^s$ ist (für die vollständige Theorie verweisen wir auf [4], § 2, bzw. [2], oder [6] die die Theorie der Finslerräume begründen).

In den n-dimensionalen Finsler—Otsukischen Räumen, die wir im folgenden als $F-O_n$-Räume bezeichnen werden, benützt man bei der Bildung des invarianten Differentials verschiedene Übertragungsparameter für die kontra- bzw. kovarianten Indizes der Tensoren; außerdem existiert noch in der Formel (1.1a) von $DV_j{}^i{}_k$ der gemischte Tensor P^i_j, der ein Grundtensor des $F-O_n$-Räumes ist. Ein $F-O_n$-Raum ist also mit der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ der Metrik und mit dem gemischten Tensor P^i_j bestimmt. $F(x, \dot{x})$ soll dabei den gewöhnlichen Bedingungen der Grundfunktionen der Finslerräume (vgl. [6], Kap. I. § 1.) genügen und $P^i_j(x, \dot{x})$ soll in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension sein, wie die übrigen charakteristischen Tensoren der Finslerräume. Für P^i_j soll die in den Otsukischen Räumen immer gültige Relation

$$\partial_k P^i_j - P^i_{j\|t}\,{}'\Gamma_0{}^t{}_k - {}'\Gamma_j{}^s{}_k P^i_s + {}''\Gamma_s{}^i{}_k P^s_j = 0, \tag{1.2}$$

$$_{\|t} := F\frac{\partial}{\partial \dot{x}^t} \equiv F\dot{\partial}_t$$

---

[1]) Vgl. das Schriftenverzeichnis am Ende unseres Aufsatzes.

bestehen, die die $'\Gamma_j{}^s{}_k$ und $''\Gamma_j{}^s{}_k$ miteinander verbindet. Außerdem soll angenommen werden, daß P^i_j einen inversen Tensor Q^j_k hat, d. h. $Det(P^i_j)\neq 0$, ferner es sei

$$(1.3) \qquad P^i_b l^b \equiv P^i_0 = l^i \quad \text{d.h.} \quad P^i_b \dot{x}^b = \dot{x}^i$$

und $P_{ij}:=g_{it}P^t_j$ sei *in* (i,j) *symmetrisch*. Ist $P^i_j\neq\delta^i_j$, so werden wir den Raum als *einen echten* $F-O_n$-Raum bezeichnen. Der Fall $P^i_j=\delta^i_j$ gibt im wesentlichen die Cartansche Theorie.

Nach dem Satz 1. von [4], S. 124 folgt somit, daß die $''\Gamma_j{}^i{}_k$ eben die Cartanschen Übertragungsparameter $\Gamma^{*i}_{j\,k}$ bedeuten.

Wir benötigen noch im folgenden die zur Formel (1.1a) gehörigen kovarianten Ableitungen (vgl. [4], (2.11)—(2.13)):

$$(1.4) \qquad \overset{*}{\nabla}_m V_j{}^i{}_k := V_j{}^i{}_{k\|m} + A_r{}^i{}_m V_j{}^r{}_k - A_j{}^r{}_m V_r{}^i{}_k - A_k{}^r{}_m V_j{}^i{}_r,$$

$$(1.5) \qquad \overset{\circ}{\nabla}_m {}''V_j{}^i{}_k := \partial_m V_j{}^i{}_k - V_j{}^i{}_{k\|s}{}'\Gamma_0{}^s{}_k + {}'\Gamma_s{}^i{}_m V_j{}^s{}_k - {}''\Gamma_j{}^s{}_m V_s{}^i{}_m - {}''\Gamma_k{}^s{}_m V_j{}^i{}_s.$$

In diesem Aufsatz wollen wir in den nächsten Paragraphen einige Sätze über Eigenvektoren von T. Otsuki (vgl. [5], § 5.) in die $F-O_n$-Räume übertagen, wohl aber mit einer etwas veränderten Beweisführung, als T. Otsuki in [5] benützt hatte. In den Paragraphen 3—4 werden wir dann in den zwei- und dreidimensionalen Finsler—Otsukischen Räumen die Struktur von P^i_j, und die der Eigenvektoren bezüglich auf ein natürliches n-Bein eingehend untersuchen. Endlich werden wir diejenigen $F-O_2$- und $F-O_3$-Räume bestimmen und einige charakteristische Eigenschaften jener Räume angeben, in denen $P^i_j=Q^i_j$ besteht.

§ 2. Sätze über Eigenvektoren in F—O_n-Räumen

Das Vektorfeld $V^i(x,\dot{x})$ ist ein *Eigenvektorfeld*, kurz ein *Eigenvektor* mit der *Eigenfunktion* $\lambda(x,\dot{x})$, falls längs Folge $(x^i(t),\dot{x}^i(t))$ der Linienelemente

$$(2.1) \qquad P^i_j(x,\dot{x})V^j(x,\dot{x}) = \lambda(x,\dot{x})V^i(x,\dot{x}), \quad \dot{x}^i = x^i(t), \quad \dot{x}^i = \dot{x}^i(t)$$

gültig ist. Nach unserer Annahme (1.3) ist der Vektor $\vec{l}$ in den von uns betrachteten Räumen immer ein Eigenvektor mit der Eigenfunktion $\lambda\equiv 1$. Offenbar ist auch $\varrho(x,\dot{x})\vec{l}$ Eigenvektor, aber wir werden in den Paragraphen 3—4 zeigen, daß auch andere Eigenvektoren existieren.

Bilden wir nun das invariante Differential $\bar{D}$ von $P^i_jV^j$ und λV^i, so wird aus (2.1) auf Grund von (1.1a):

$$(2.2) \qquad V^j dP^i_j + P^i_j dV^j + \left(A_s{}^i{}_k \overline{\omega}^k(d) + {}'\Gamma_s{}^i{}_k dx^k\right)P^s_j V^j = V^i d\lambda + \lambda \bar{D} V^i.$$

Wir berechnen nun dP^i_j. Es ist wegen der Homogeneität von nullter Dimension von P^i_j in den $\dot{x}^i$:

$$dP^i_j = \partial_k P^i_j dx^k + P^i_{j\|k} dl^k = (\partial_k P^i_j - P^i_{j\|s}{}'\Gamma_0{}^s{}_k)dx^k + P^i_{j\|k}\overline{\omega}^k(d).$$

Mit Hilfe von (1.2) eliminiert man aus dieser Formel $\partial_k P^i_j$; es wird somit

$$(2.3) \qquad dP^i_j = P^i_{j\|k}\overline{\omega}^k(d) + ({}'\Gamma_j{}^s{}_k P^i_s - {}''\Gamma_s{}^i{}_k P^s_j)dx^k.$$

Drückt man in (2.2) dV^j mittels

$$dV^j = \bar{D}V^j - (A_s{}^j{}_k \bar{\omega}^k(d) + {}'\Gamma_s{}^j{}_k dx^k) V^s \tag{2.4}$$

aus, eliminiert man dann dP^i_j mittels (2.3), so wird nach (1.1), (1.4) und (1.5):

$$DV^i + (\overset{*}{\nabla}_k P^i_j \bar{\omega}^k(d) + (\overset{\circ}{\nabla}_k \delta^i_s) P^s_j dx^k) V^j = V^i d\lambda + \lambda \bar{D} V^i,$$

und nach einer Kontraktion mit P^h_i bekommt man

$$P^h_i DV^i = \lambda DV^h + \psi^{h(1)}_{j(0)} V^j, \tag{2.5}$$

$$\psi^{h(1)}_{j(0)} := \lambda(d\lambda)\delta^h_j - (P^h_i \overset{*}{\nabla}_k P^i_j \bar{\omega}^k(d) + D\delta^h_j), \tag{2.5a}$$

wo (2.5a) einen gemischten Tensor zweiter Stufe bestimmt und selbstverständlich $D\delta^h_j = (\nabla_k \delta^i_s) P^s_j P^h_i dx^k$ bedeutet.

Wir wollen nun durch vollständige Induktion die Verallgemeinerung von (2.5) beweisen.

Satz I. *Ist V^i ein Eigenvektor längs jeder Folge $(x^i(t), l^i(t))$ der Linienelemente, d. h. ist* (2.1) *gültig, so gilt auch*

$$P^h_i D^m V^i = \lambda D^m V^h + \sum_{\varrho=0}^{m-1} \psi^{h(m)}_{j(\varrho)} D^\varrho V^j, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{2.6}$$

wo $D^0 V^j \equiv V^j$ und $\psi^{h(m)}_{j(\varrho)}$ durch die Rekursionsformeln

$$\psi^{h(\sigma)}_{j(\varrho)} \equiv 0, \quad \textit{wenn} \quad \varrho \geqq \sigma, \quad \psi^{h(\sigma)}_{j(-1)} \equiv 0, \quad (\sigma = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.6a}$$

$$\begin{aligned} \psi^{h(m+1)}_{j(\varrho)} := {} & \delta^m_\varrho \{\lambda(d\lambda)\delta^h_j - P^h_t \overset{*}{\nabla}_k P^t_j \bar{\omega}^k - D\delta^h_j\} + (d\lambda)\psi^{h(m)}_{j(\varrho)} + \\ & + Q^t_j (P^h_i \psi^{i(m)}_{t(\varrho-1)} + D\psi^{h(m)}_{t(\varrho)}) - (\bar{D}\delta^s_j) P^h_i \psi^{i(m)}_{s(\varrho)}, \\ & (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \tag{2.6b}$$

und die Anfangsfunktion durch (2.5a) *angegeben sind.*

Bemerkung. Die in Klammern gesetzten Indizes sind jetzt und im folgenden nicht tensorielle Indizes; diese bedeuten Skalare. Aus (2.6b) bekommt man übrigens (2.5a), falls in (2.6b) $m=0$ gesetzt und (2.6a) beachtet wird.

Beweis von Satz I. Wir haben gezeigt, daß aus (2.1) die Formeln (2.5) und (2.5a) folgen, was mit (2.6), (2.6a) und (2.6b) identisch sind, falls in (2.6) $m=1$ und in (2.6b) $m=0$ gesetzt wird. Nehmen wir an, daß (2.6) bis ein $m \geqq 1$ gültig ist. Bilden wir auf beiden Seiten von (2.6) das invariante Differential (1.1a), so wird:

$$\begin{aligned} (dP^h_j) D^m V^j + P^h_j dD^m V^j + (A_s{}^h{}_k \bar{\omega}^k + {}'\Gamma_s{}^h{}_k dx^k) P^s_j D^m V^j = \lambda \bar{D} D^m V^h + (d\lambda) D^m V^h + \\ + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (d\psi^{h(m)}_{j(\varrho)} D^\varrho V^j + \psi^{h(m)}_{j(\varrho)} dD^\varrho V^j) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (A_s{}^h{}_k \bar{\omega}^k(d) + \\ + {}'\Gamma_s{}^h{}_k dx^k) \psi^{s(m)}_{j(\varrho)} D^\varrho V^j, \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Wir werden jetzt ungefähr analog zu diejenigen Rechnungen verfahren, die uns von (2.2) zum (2.5) führten. Vor allem eliminieren wir $dD^m V^j$ bzw. $dD^\varrho V^j$ analog zur Formel (2.4), wo aber jetzt statt V^j die Vektoren $D^m V^j$ und $D^\varrho V^j$ vorkommen werden, ferner benützen wir noch die Identität (2.3) für die Elimiation von dP^i_j und die Identität

$$'\bar{D}\psi^{h(m)}_{j(\varrho)} \equiv \bar{D}\psi^{h(m)}_{j(\varrho)} - (\bar{D}\delta^s_j)\psi^{h(m)}_{s(\varrho)}, \quad \bar{D}\delta^s_j = ('\Gamma_j{}^s{}_k - ''\Gamma_j{}^s{}_k)dx^k,$$

wo $'\bar{D}$ das allein mit $'\Gamma_j{}^i{}_k$ und natürlich mit $A_j{}^i{}_k$ gebildete invariante Differential bedeutet, womit man erhält:

$$D^{m+1}V^h = \lambda\bar{D}D^m V^h - (\overset{*}{\nabla}_k P^h_j \bar{\omega}^k + P^s_j \bar{D}\delta^h_s)D^m V^j + d\lambda D^m V^h +$$

$$+ \sum_{\varrho=0}^{m-1} \psi^{h(m)}_{j(\varrho)} \bar{D}D^\varrho V^j + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (\bar{D}\psi^{h(m)}_{j(\varrho)} - \psi^{h(m)}_{s(\varrho)} \bar{D}\delta^s_j) D^\varrho V^j, \quad m \geqq 1 .$$

Eine Überschiebung mit P^i_h gibt dann unter Beachtung von $(\bar{D}\psi^{h(m)}_{j(\varrho)})P^i_h = Q^t_j D\psi^{i(m)}_{t(\varrho)}$ und (2.6):

$$P^i_h D^{m+1}V^h = \lambda D^{m+1}V^i + d\lambda\big(\lambda D^m V^i + \sum_{\varrho=0}^{m-1} \psi^{i(m)}_{j(\varrho)} D^\varrho V^j\big) - \tag{2.7}$$

$$-(P^i_h \overset{*}{\nabla}_k P^h_j \bar{\omega}^k + D\delta^i_j)D^m V^j + \sum_{\varrho=0}^{m-1} P^i_h Q^t_j \psi^{h(m)}_{t(\varrho)} D^{\varrho+1}V^j + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (Q^t_j D\psi^{i(m)}_{t(\varrho)} -$$

$$- P^i_h \psi^{h(m)}_{s(\varrho)} \bar{D}\delta^s_j) D^\varrho V^j .$$

Schreiben wir jetzt die zum (2.6) analoge Formel mit $(m+1)$ statt m auf, d. h.

$$P^i_h D^{m+1}V^h = \lambda D^{m+1}V^i + \sum_{\varrho=0}^{m} \psi^{i(m+1)}_{j(\varrho)} D^\varrho V^j, \tag{2.8}$$

vergleichen wir jetzt (2.7) und (2.8), so kann leicht festgestellt werden, daß — von den Indizes abgesehen — $\psi^{i(m+1)}_{j(\varrho)}$ eben mit (2.6b) übereinstimmt, womit der Induktionsbeweis von (2.6) beendet ist.

Bemerkung. Die Formeln (2.6), (2.6a) und (2.6b) entsprechen den Otsukischen Formeln (5.16), (5.17)—(5.19) von [5], doch ist jetzt (2.6) etwas anders ausgedrückt als in [5] war. Dementsprechend hat auch (2.6b) eine andere Form als in [5] die entsprechende Formel (5.18).

Einen interessanten Typ bestimmt der Fall in dem längs der Grundelementfolge $(x^i(t), \dot{x}^i(t))$

$$P^i_h \overset{*}{\nabla}_k P^h_j \bar{\omega}^k(d) + D\delta^i_j = 0 \tag{2.9}$$

besteht. Dieser Fall gibt die Verallgemeinerung von Theorem (5.7) der fundamentalen Arbeit [5] von T. Otsuki (vgl. [5], S. 120). In einem Punktraum ist nämlich nach (1.4) $\overset{*}{\nabla}_k P^h_j \equiv 0$, womit (2.9) sich auf $D\delta^i_j = 0$ reduziert. In den $F-O_n$-Räumen gilt der folgende

Satz II. *Ist V^i ein Eigenvektor, d. h. es gilt* (2.1), *besteht auch* (2.9) *längs der Linienelementfolge* $\left(x^i(t), \dot{x}^i(t)\right)$, *so besteht:*

$$P_i^h D^m V^i = \lambda D^m V^h + \sum_{\sigma=0}^{m} \psi_{(\sigma)}^{(m)} D^\sigma V^h, \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

und die Skalare $\psi_{(\sigma)}^{(m)}$ *sind Polynome von* $\lambda, d\lambda, \ldots, d^m\lambda$, *ferner es ist:*

$$\psi_{(0)}^{(1)} := \lambda d\lambda, \quad D^0 V^j := V^j, \tag{2.10a}$$

$$\psi_{(\sigma)}^{(\varrho)} = 0, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq \varrho \leqq \sigma, \quad \text{oder} \quad \sigma = -1, \tag{2.10b}$$

$$\psi_{(\sigma)}^{(m+1)} := \lambda d\lambda \delta_\sigma^m + d(\lambda \psi_{(\sigma)}^{(m)}) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} \psi_{(\sigma)}^{(\varrho)} d\psi_{(\varrho)}^{(m)} + \psi_{(\sigma-1)}^{(m)} \tag{2.10c}$$

$$(m = 1, 2, \ldots); \quad (\sigma = 0, 1, \ldots, m).$$

Beweis. Aus (2.1) folgt, wie wir es gezeigt haben (2.5), was wegen (2.5a) und (2.9) sich auf

$$P_i^h D V^i = \lambda D V^h + \lambda (d\lambda) V^h$$

reduziert. Diese Formel stimmt aber — abgesehen von der Bezeichnung der Indizes — mit (2.10) und (2.10a) überein, falls $m=1$ gesetzt wird. Unser Satz II. ist also für $m=1$ gültig.

Angenommen, daß (2.10) bis ein $m \geqq 1$ und (2.10a) bestehen, folgt nach der Operation $\bar{D}$ von (2.10):

$$(dP_i^h) D^m V^i + P_i^h d D^m V^i + (A_s{}^h{}_k \overline{\omega}^k + {}'\Gamma_s{}^h{}_k dx^k) P_i^s D^m V^i =$$

$$= \lambda \bar{D} D^m V^h + (d\lambda) D^m V^h + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (d\psi_{(\varrho)}^{(m)} D^\varrho V^h + \psi_{(\varrho)}^{(m)} \bar{D} D^\varrho V^h).$$

Es wird nun dP_i^h wieder mittels (2.3) und $dD^m V^h$ mittels der Formel (2.4) eliminiert, wo aber jetzt statt V^j der Vektor $D^m V^h$ gesetzt werden soll; somit wird:

$$(\overset{*}{\nabla}_k P_i^h \overline{\omega}^k + (\overset{\circ}{\nabla}_k \delta_s^h) P_i^s dx^k) D^m V^i + D^{m+1} V^h = \lambda \bar{D} D^m V^h +$$

$$+ (d\lambda) D^m V^h + \sum_{\varrho=0}^{m-1} (d\psi_{(\varrho)}^{(m)} D^\varrho V^h + \psi_{(\varrho)}^{(m)} \bar{D} D^\varrho V^h).$$

Eine Kontraktion mit P_h^j gibt wegen der Annahmen (2.9) und (2.10) und nach gewissen Veränderungen der Summationsindizes:

$$P_h^j D^{m+1} V^h = \lambda D^{m+1} V^j + d\lambda \left(\lambda D^m V^j + \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi_{(\sigma)}^{(m)} D^\sigma V^j\right) + \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left\{ d\psi_{(\sigma)}^{(m)} \left(\lambda D^\sigma V^j + \sum_{\varrho=0}^{\sigma-1} \psi_{(\varrho)}^{(\sigma)} D^\varrho V^j\right) + \psi_{(\sigma)}^{(m)} D^{\sigma+1} V^j \right\}.$$

Beachtet man in dieser Formel die Identitäten

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1}\sum_{\varrho=0}^{\sigma-1}(d\psi_{(\sigma)}^{(m)})\psi_{(\varrho)}^{(\sigma)}D^{\varrho}V^{j}\equiv\sum_{\varrho=0}^{m-1}\sum_{\sigma=0}^{\varrho-1}\psi_{(\sigma)}^{(\varrho)}(d\psi_{(\varrho)}^{(m)})D^{\sigma}V^{j},$$

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1}\psi_{(\sigma)}^{(m)}D^{\sigma+1}V^{j}\equiv\sum_{\sigma=0}^{m}\psi_{(\sigma-1)}^{(m)}D^{\sigma}V^{j},$$

was wegen (2.10b), genauer wegen $\psi_{(-1)}^{(m)}:=0$ offenbar bestehen, so kann leicht verifiziert werden, daß (2.11) die Form

$$P_h^j D^{m+1}V^h=\lambda D^{m+1}V^j+\sum_{\sigma=0}^{m}\psi_{(\sigma)}^{(m+1)}D^{\sigma}V^j \tag{2.12}$$

hat und $\psi_{(\sigma)}^{(m+1)}$ eben durch (2.10c) festgelegt ist.

Damit ist der Satz II. vollständig bewiesen. Die Formeln (2.10a)—(2.10c) bestimmen eine Rekursionsformel für die Funktionen $\psi_{(\sigma)}^{(m)}$, die Skalare sind und nach ihrer Bildung von $\lambda, d\lambda, \ldots, d^m\lambda$ abhängen, wie behauptet wurde.

§ 3. Eigenvektoren in den zwei- und dreidimensionalen Finsler—Otsukischen Räumen

In den $F-O_2$-Räumen existiert das von L. Berwald in [1], § 4. ursprünglich für Finslerräume konstruierte natürliche Zweibein, d. h. dessen Grundtensoren allein von $(x^i, \dot{x}^i)$ abhängig sind. Die Grundvektoren sind nach L. Berwald's Bezeichnung der Vektor $\underset{(1)}{e}_i:=l_i$ und $\underset{(2)}{e}_i:=-\varepsilon_{ij}\,l^j\equiv h_i(x,\dot{x})$, wo der schiefsymmetrische ε-Tensor: $\varepsilon_{ij}:=\begin{cases}0, & \text{für } i=j\\ \sqrt{g}, & \text{für } i=1,\ j=2,\end{cases}$ ist (vgl. [1], (4.2)).

Die Struktur des Fundamentaltensors P_j^i ist nach (1.3) und nach der Symmetriebedingung $P_{ij}=P_{ji}$ in den $\mathrm{F}-O_2$-Räumen (vgl. [4], Bemerkung auf S. 125):

$$P_j^i=\delta_j^i+\pi_j^i\equiv\delta_j^i+\alpha h^i h_j,\quad \pi_j^i:=\alpha h^i h_j,\quad \alpha\neq -1, \tag{3.1}$$

wo $\alpha=\alpha(x,\dot{x})$ einen in den $\dot{x}^i$ von nullter Dimension homogenen Skalar bezeichnet. Die Bedingung $\alpha\neq-1$ ist notwendig, da im Fall $\alpha=-1$ würde wegen $\delta_j^i=l^i l_j+h^i h_j$ (vgl. [1], (4.1)(b)) der Tensor $P_j^i=l^i l_j$ sein, somit würde P_j^i wegen $Det(P_j^i)=0$ keinen inversen Tensor haben.

Ist nun Q_j^i der inverse Tensor von P_j^i, d. h. ist $P_i^j Q_j^k=\delta_i^k$, so folgt wegen (1.3), nach Kontraktion mit l^i, daß auch $Q_j^k l^j=l^k$ ist; aus der Symmetriebedingung von P_{ij} folgt auch die Symmetrie von Q_{ij}. Somit muß Q_j^i dieselbe Form haben, wie P_j^i, d. h.

$$Q_j^i=\delta_j^i+\alpha^*(x,\dot{x})h^i h_j. \tag{3.2}$$

Aus der Bedingung $P_j^i Q_k^j=\delta_k^i$ folgt nun nach (3.1) und (3.2), daß

$$\alpha+\alpha^*+\alpha\alpha^*=0,\quad \text{d.h.}\quad \alpha^*=-\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

bestehen muß. Aus (3.2) folgt somit

$$Q^i_j = \delta^i_j - \frac{\alpha}{1+\alpha} h^i h_j, \quad \alpha \neq -1, \tag{3.3}$$

was wirklich den inversen Tensor von (3.1) bestimmt, wie das leicht bestätigt werden kann.

Nach diesen Vorbereitungen bestimmen wir die Form der Eigenvektoren des $F-O_2$-Raumes in dem (3.1) gültig ist. Es gilt in den echten $F-O_2$-Räumen, wo also $P^i_j \neq \delta^i_j$ ist, der

Satz III. *Hat in einem echten $F-O_2$-Raum der Tensor P^i_j die Form* (3.1), *so ist ein Vektor V^i dann und nur dann Eigenvektor, wenn entweder $V^i = \varrho l^i$, oder $V^i = \sigma h^i$ ist, wo ϱ und σ Skalare bedeuten.*

Beweis. Die allgemeinste Form von V^i im $F-O_2$-Raum ist $V^i = \varrho l^i + \sigma h^i$, wo ϱ und σ skalare Funktionen bedeuten. Ist nun V^i ein Eigenvektor, so folgt aus (2.1) und (3.1)

$$(\delta^i_j + \alpha h^i h_j)(\varrho l^j + \sigma h^j) = \lambda(\varrho l^i + \sigma h^i),$$

woraus

$$\varrho l^i + (\sigma + \alpha\sigma) h^i = \lambda \varrho l^i + \lambda \sigma h^i$$

folgt. Das bedeutet aber, daß

$$\varrho(1-\lambda) = 0, \quad \sigma(1+\alpha-\lambda) = 0$$

gelten müssen. Aus der ersten Gleichung folgt somit, daß entweder $\varrho = 0$, oder $\lambda = 1$ ist. Ist nun $\lambda \neq 1$, so muß $\varrho = 0$ sein, V^i hat also die Form: $V^i = \sigma h^i$. Ist $\lambda = 1$, so ist $\sigma\alpha = 0$; es ist also entweder $\sigma = 0$, d. h. $V^i = \varrho l^i$, oder $\alpha = 0$. Im letzteren Fall wäre aber nach (3.1) $P^i_j = \delta^i_j$, der Raum wäre somit kein echter $F-O_2$-Raum, sondern ein gewöhnlicher Finslerraum.

In den dreidimensionalen $F-O_3$-Räumen hat der Tensor P^i_j nach den im Paragraphen 1 gestellten Forderungen (P_{ij} ist symmetrisch und $P^i_0 = l^i$) die Form:

$$P^i_j = \delta^i_j + \alpha h^i h_j + \beta k^i k_j + \gamma(h^i k_j + k^i h_j), \tag{3.4}$$

wo α, β, γ von $(x^i, \dot{x}^i)$ abhängige Skalare bedeuten. Die Vektoren $(\vec{l}, \vec{h}, \vec{k})$ bezeichnen in (3.4) und im folgenden das natürliche orthonormierte Dreibein (vgl. [3], § 2.). Da der inverse Tensor von P^i_j ähnliche Struktur haben muß, hat man

$$Q^i_j = \delta^i_j + \alpha^* h^i h_j + \beta^* k^i k_j + \gamma^*(h^i k_j + k^i h_j), \tag{3.5}$$

wo $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ wieder Skalare bedeuten. Aus der Identität $P^i_j Q^j_k = \delta^i_k$ folgt nun das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \text{(a)} & \alpha^*(1+\alpha) + \gamma^*\gamma + \alpha = 0, \\ \text{(b)} & \beta^*(1+\beta) + \gamma^*\gamma + \beta = 0, \\ \text{(c)} & \alpha^*\gamma + \gamma^*(1+\beta) + \gamma = 0, \\ \text{(d)} & \beta^*\gamma + \gamma^*(1+\alpha) + \gamma = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Bemerkung. (3.6) (a)—(d) sind die Koeffizienten von $h^i h_k$, $k^i k_k$, $k^i h_k$ und $h^i k_k$ in $P^i_j Q^j_k - \delta^i_k = 0$. —

Es kann leicht verifiziert werden, daß das Gleichungssystem (3.6) im allgemeinen (aber nicht immer) lösbar ist, da die Determinante des Systems (3.6) verschwindet, d. h. es gibt in (3.6) auf $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ nur höchstens drei linear unabhängige Gleichungen. Z. B. folgt aus (3.6) für $\gamma^*=\gamma=0$

$$\alpha^* = -\frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \beta^* = -\frac{\beta}{1+\beta}, \quad (\alpha \neq -1, \quad \beta \neq -1)$$

und dann ist (3.4) ähnlich zum 2-dimensionalen Fall.

Einen weiteren interessanten Spezialtyp bekommen wir, wenn $\alpha=\beta=-1$, gesetzt wird. Aus (3.6) (c), (d) folgt dann, daß $\alpha^*=\beta^*=-1$ und nach (a), (b) $\gamma^*=\gamma^{-1}$. Wegen $\delta^i_k=l^i l_k+h^i h_k+k^i k_k$ (vgl. [3], Formel (43), wenn in (43) ein Index aufgezogen wird) bekommt aus (3.4) und (3.5):

$$P^i_j = l^i l_j+\gamma(h^i k_j+k^i h_j), \quad \gamma \neq 0, \tag{3.7}$$

$$Q^j_k = l^j l_k+\gamma^{-1}(h^j k_k+k^j h_k). \tag{3.8}$$

Kehren wir zum allgemeinen Typ (3.4) zurück. Es gilt der

Satz IV. *Hat in einem $F-O_3$-Raum der Tensor P^i_j die Form* (3.4), *so sind die Vektoren $V^i=\varrho l^i$ immer Eigenvektoren mit der Eigenfunktion: $\varrho(x, \dot{x})$. Es ist ferner V^i Eigenvektor mit der Eigenfunktion $\lambda(x, \dot{x}) \not\equiv 1$ dann und nur dann, falls V^i die Beindarstellung $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$ hat und*

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \sigma(1-\lambda+\alpha)+\gamma\tau = 0 \\ \text{(b)} \quad \sigma\gamma+(1-\lambda+\beta)\tau = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

bestehen. Ist $\lambda \equiv 1$, und gilt

$$\gamma^2 = \alpha\beta, \tag{3.9a}$$

so hat der Eigenvektor V^i die Beindarstellung:

$$V^j = \varrho l^j-\frac{\gamma\tau}{\alpha}h^j+\tau k^j, \quad \textit{wenn} \quad \alpha \neq 0, \tag{3.10}$$

$$V^j = \varrho l^j+\sigma h^j-\frac{\sigma\gamma}{\beta}k^j, \quad \textit{wenn} \quad \beta \neq 0. \tag{3.10a}$$

Beweis. Die erste Behauptung, daß nämlich ϱl^i Eigenvektor ist, ist offenbar trivial.

Nehmen wir jetzt an, daß $\lambda(x, \dot{x}) \not\equiv 1$ ist und V^i ein Eigenvektor ist, d. h. es besteht (2.1). Die Beindarstellung von V^i sei:

$$V^i = \varrho l^i+\sigma h^i+\tau k^i, \tag{3.11}$$

wo ϱ, σ, τ selbstverständlich Funktionen von $(x^i, \dot{x}^i)$ sind.

Hat nun P^i_j die Form (3.4) und schreibt man (2.1) in die Form

$$(P^i_j-\lambda(x, \dot{x})\delta^i_j)V^j = 0, \tag{3.12}$$

so bekommt man nach (3.11)

$$\varrho(1-\lambda)l^i + \{\sigma(1-\lambda+\alpha)+\gamma\tau\}h^i + \{\tau(1-\lambda+\beta)+\gamma\sigma\}k^i = 0. \tag{3.13}$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß die einzelnen Koeffizienten der Vektoren l^i, h^i und k^i verschwinden müssen. Wenn also $\lambda \neq 1$, so muß $\varrho=0$ sein und V^i hat nach (3.11) die Form $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$, wo aber noch (3.9) bestehen. σ, τ können aber nicht gleichzeitig verschwinden, sonst wäre nach (3.11) und wegen $\varrho=0$ auch $V^i=0$. Die Umkehrung ist fast trivial, da aus $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$ und (3.9) folgt (3.13), was mit (3.12) identisch ist. Die Formel (3.12) drückt aber schon aus, daß V^i Eigenvektor mit der Eigenfunktion λ ist.

Nehmen wir letztens an, daß (3.9a) besteht und $\lambda=1$ ist. Angenommen, daß der Eigenvektor V^i die Form (3.11) hat, folgt wieder aus (3.12) die Relation (3.13), wo aber jetzt $\lambda=1$ gesetzt werden soll. Das reduziert aber (3.13) auf

$$\text{(a)}\quad \sigma\alpha+\gamma\tau = 0, \quad \text{(b)}\quad \sigma\gamma+\beta\tau = 0. \tag{3.14}$$

Nach der Bedingung (3.9a) hat (3.14) auf σ, τ auch nichttriviale Lösungen und (3.14) enthält im wesentlichen nur eine Bedingung für σ, τ. Ist $\alpha\neq 0$, so ist $\sigma=-\frac{\gamma\tau}{\alpha}$; ist $\beta\neq 0$, so ist $\tau=-\frac{\gamma\sigma}{\beta}$ und aus (3.11) erhalten wir eben (3.10) bzw. (3.10a).

Die Umkehrung ist leicht beweisbar; (3.10) und (3.10a) sind nach (3.4) Eigenvektoren, falls (3.9a) besteht. Damit haben wir den Satz IV. vollständig bewiesen.

§ 4. 2- und 3-dimensionale reell-unitäre $F-O_n$-Räume

Definition. Ein Finsler—Otsukischer Raum wird reell-unitär genannt, falls der Fundamentaltensor P^i_j mit seinem inversen Tensor Q^i_j identisch ist.

In diesem Paragraphen wollen wir noch bestimmen, wann die im vorigen untersuchten Type reell-unitär sind und die reell-unitären $F-O_n$-Räume $(n=2, 3)$ charakterisieren.

Erstens bestimmen wir die möglichen Eigenfunktionen der n-dimensionalen reell-unitären Räume, die wir im folgenden durch $F-O^*_n$-Räume bezeichnen werden. Es gilt:

Satz V. *Die Eigenfunktion λ eines $F-O^*_n$-Raumes ist immer $\lambda\equiv 1$, oder $\lambda\equiv -1$.*

Beweis. Aus $P^i_j V^j=\lambda V^i$ folgt nach einer Kontraktion mit P^k_i wegen $P^k_i P^i_j = \delta^k_j$: $(V^k=)\, P^k_i P^i_j V^j=\lambda P^k_i V^i=\lambda^2 V^k$, woraus $\lambda^2\equiv 1$, w.z.b. w.

Wir geben jetzt die möglichen Type der $F-O^*_n$-Räume an $(n=2, 3,)$. Es gilt der

Satz VI. *Es ist in den $F-O^*_2$-Räumen:*

$$P^i_j = l^i l_j - h^i h_j \tag{4.1}$$

charakteristisch. In den $F-O_3^*$-Räumen hat P^i_j eine der beiden möglichen Formen:

$$P^i_j = \delta^i_j - 2h^i h_j - 2k^i k_j, \tag{4.2}$$

$$P^i_j = \delta^i_j + \alpha h^i h_j - (\alpha+2) k^i k_j \pm \sqrt{-\alpha(\alpha+2)}\,(h^i k_j + k^i h_j), \tag{4.3}$$

$$(-2 \leqq \alpha \leqq 0),$$

wo $\alpha(x, \dot{x})$ einen beliebigen Parameter bedeutet.

Beweis. In einem $F-O_2^*$-Raum ist der durch (3.1) angegebene P^i_j-Tensor mit dem durch (3.3) angegebenen Q^i_j-Tensor identisch. Daraus folgt aber $\alpha = -\alpha(1+\alpha)^{-1}$, was mit $\alpha = -2$ identisch ist. Es gilt somit: $P^i_j = \delta^i_j - 2h^i h_j$. Beachten wir jetzt die wohlbekannte Relation: $\delta^i_j = l^i l_j + h^i h_j$ (vgl. [1], (4.1) (b)), so bekommt man unmittelbar (4.1), womit die erste Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Der dreidimensionale Fall kann aus (3.6) abgeleitet werden, wenn $\alpha^* = \alpha$, $\beta^* = \beta$, $\gamma^* = \gamma$ gesetzt wird. Aus (3.4) und (3.5) folgt dann, daß $P^i_j = Q^i_j$ ist. Aus (3.6) bekommt man aber für die $F-O_3^*$-Räume:

$$\begin{cases} \alpha(1+\alpha) + \gamma^2 + \alpha = 0, \\ \beta(1+\beta) + \gamma^2 + \beta = 0, \\ (\alpha+\beta+2)\gamma = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

da $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\gamma = \gamma^*$ ist. Nach der dritten Gleichung von (4.4) gibt es also zwei Type der $F-O_3^*$-Räume, undzwar sind diese durch 1) $\gamma = 0$, bzw. 2) $\alpha+\beta+2=0$ charakterisiert.

Ist $\gamma = 0$, so folgt aus (4.4), daß $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -2$ möglich sind und die (α_i, β_k)-Werte können von diesen Möglichkeiten beliebig gewählt werden. Selbstverständlich ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$ nicht möglich, da sonst wäre wegen $\gamma = 0$ nach (3.4) $P^i_j = \delta^i_j$, der Raum wäre also kein echter $F-O_3$-Raum. Für $\alpha = \beta = -2$ und $\gamma = 0$ erhalten wir nach (3.4) den Typ (4.2). Die übrigen Möglichkeiten, undzwar $\alpha = 0$, $\beta = -2$; bzw. $\alpha = -2$, $\beta = 0$; sind in den — im folgenden ableitenden — Typen (4.3) enthalten, wenn in (4.3) $\alpha = 0$, bzw. $\alpha = -2$ gesetzt wird.

Wir müssen also noch die Type von (4.3) ableiten. Das kann leicht durchgeführt werden, wenn in der dritten Gleichung von (4.4) $\alpha+\beta = -2$ gesetzt wird. Eliminiert man β mittels $\beta = -\alpha-2$ von den ersten beiden Gleichungen von (4.4), so erhalten wir statt (4.4) für α, γ die einzige Gleichung

$$\alpha(\alpha+2) + \gamma^2 = 0$$

was mit $\gamma = \pm\sqrt{-\alpha(\alpha+2)}$ äquivalent ist. Das gibt somit nach (3.4) eben den Typ (4.3), wo α beliebig gewählt werden kann, doch so, daß γ reell sei.

Durch unmittelbare Rechnung kann direkt bewiesen werden, daß die durch (4.1)—(4.3) charakterisierten Type der Relation $P^i_j P^j_k = \delta^i_k$ genügen, die $F-O_n^*$-Räume für $n = 2, 3$ sind also wirklich durch Satz VI. angegeben.

Im folgenden wollen wir die Type (4.1)—(4.3) der $F-O_n^*$-Räume $(n = 2, 3)$ durch die Eigenvektoren bzw. Eigenfunktionen kennzeichnen. Es gilt der

Satz VII. *Ist in einem $F-O_2$-Raum mit dem P^i_j-Tensor (3.1) der Vektor $V^i = \sigma h^i$ immer Eigenvektor mit der Eigenfunktion $\lambda \equiv -1$, so ist der $F-O_2$-Raum ein reell-*

unitärer Raum. Sind in einem $F-O_3$-Raum mit dem P^i_j-Tensor (3.4), *die Vektoren* $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$ *für beliebige Skalare* σ, τ *Eigenvektoren mit der Eigenfunktion* $\lambda\equiv-1$, *so ist der $F-O_3$-Raum ein reell-unitärer Raum mit dem P^i_j-Tensor* (4.2). *Ist endlich im $F-O_3$-Raum $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$ Eigenvektor mit $\lambda\equiv-1$, wenn nur noch*

$$\frac{\sigma}{\tau}=-\sqrt{\frac{-\alpha}{\alpha+2}},\quad(-2<\alpha<0),\quad(\sigma\neq 0,\tau\neq 0) \tag{4.5}$$

besteht, so ist der $F-O_3$-Raum ein reell-unitärer-Raum mit dem P^i_j-Tensor (4.3).

Beweis. Die $F-O_2^*$-Räume sind durch (4.1) gekennzeichnet. Wir müssen also erstens zeigen, daß wenn $V^i=\sigma h^i$ ein Eigenvektor mit $\lambda\equiv-1$ ist, so hat P^i_j die Form (4.1). In den $F-O_2$-Räumen hat P^i_j die Form (3.1). Ist nun $V^i=\sigma h^i$ mit der Eigenfunktion $\lambda\equiv-1$, so besteht

$$(\delta^i_j+\alpha h^i h_j)\sigma h^j=-\sigma h^i$$

woraus wegen $\sigma\neq 0$, $\alpha=-2$ folgt. Aus (3.1) folgt aber im Fall $\alpha=-2$ daß (4.1) besteht, wie wir schon im Beweis von Satz VI. gezeigt haben.

Nehmen wir jetzt an, daß in einem $F-O_3$-Raum die Vektoren $V^i=\sigma h^i+\tau k^i$ Eigenvektoren mit der Eigenfunktion $\lambda\equiv-1$ sind. Aus der allgemeinen Form (3.4) von P^i_j der $F-O_3$-Räume folgt:

$$\{\delta^i_j+\alpha h^i h_j+\beta k^i k_j+\gamma(h^i k_j+k^i h_j)\}(\sigma h^j+\tau k^j)=-(\sigma h^i+\tau k^i)$$

d. h.

$$[(2+\alpha)\sigma+\gamma\tau]h^i+[\gamma\sigma+(2+\beta)\tau]k^i=0. \tag{4.6}$$

Diese Gleichung kann aber wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{h}$ und $\vec{k}$ nur im Fall

$$\begin{cases}(2+\alpha)\sigma+\gamma\tau=0\\ \gamma\sigma+(2+\beta)\tau=0\end{cases} \tag{4.7}$$

bestehen. Gilt (4.7) für alle Funktionen σ, τ, so bedeutet das die Gültigkeit von $\alpha=\beta=-2$, $\gamma=0$, woraus nach (3.4) das Bestehen von (4.2) folgt, wie im Satz behauptet wurde.

Gilt endlich (4.7) nur im Fall der Relation (4.5), so folgt aus der ersten Gleichung von (4.7)

$$\frac{\sigma}{\tau}=-\frac{\gamma}{2+\alpha}=-\sqrt{\frac{-\alpha}{2+\alpha}},\quad(-2<\alpha<0)$$

d. h. $\gamma\equiv\sqrt{-\alpha(2+\alpha)}$, und aus der zweiten Gleichung von (4.7) folgt hiernach

$$\frac{\sigma}{\tau}=-\frac{\beta+2}{\gamma}=-\sqrt{\frac{-\alpha}{\alpha+2}},\quad\text{d. h.}\quad\beta=-\alpha-2.$$

Substituieren wir diese Werte von β und γ in (3.4), so erhalten wir eben die Relation (4.3) mit $+\sqrt{-\alpha(\alpha+2)}$, der Raum ist also ein $F-O_3^*$-Raum.

Schriftenverzeichnis

[1] L. Berwald, On Finsler and Cartan Geometries III. *Ann. of Math.* **42** (1941), 84—112.
[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler Actualités sci. et industrielles. No 79. Hermann et Cie., Paris (1934). 42 Seiten. Neue Ausgabe in 1971 unter dem Titel: Exposés de géométrie.
[3] A. Moór, Über die Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finslerschen Räume. *Math. Nachrichten* **16** (1957), 85—99.
[4] A. Moór, Über die Begründung von Finsler-Otsukischen Räumen und ihre Dualität. *Tensor N. S.* **37** (1982), 121—129.
[5] T. Otsuki, On general connections I. *Math. Journal of Okayama University* **9** (1960), 99—164.
[6] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces. Springer Verlag. (*Berlin, Göttingen, Heidelberg.*) (1959).

(Eingegangen am März 30, 1983.)