Die Aczél—Benzsche Funktionalgleichung auf der additiven Gruppe der ganzen Zahlen

By Z. DARÓCZY—E. KOTORA (Debrecen)

1. Einleitung. Die Fragestellung der Arbeit [2] von J. ACZÉL und W. BENZ kann auf folgende Weise verallgemeinert werden. Es sei $(G, +)$ eine additiv geschriebene Abelgruppe und $\circ : G^2 \to G$ eine assoziative Operation für welche die Addition distributiv ist, d. h.

$$(1) \qquad t + x \circ y = (t+x) \circ (t+y)$$

für sämtliche $x, y, t \in G$.

Mit der Bezeichnung $f(x) := x \circ 0 \ (x \in G)$ und indem wir $t := -y$ setzen, erhalten wir nun aus (1)

$$(2) \qquad x \circ y = y + f(x-y) \quad (x, y \in G).$$

Auf Grund der Assoziativität der Operation $\circ$ und mit Rücksicht auf (2) erhalten wir nun für die unbekannte Funktion $f : G \to G$ die Aczél—Benzsche Funktionalgleichung

$$(3) \qquad f[x + f(y)] = f(x) + f[-f(x) + x + y],$$

welche für sämtliche $x, y \in G$ erfüllt ist. Ist anderseits $f : G \to G$ eine Lösung von (3), dann ist die durch (2) definierte Operation $\circ$ assoziativ und befriedigt (1). Somit ist die Bestimmung sämtlicher assoziativer, der Gleichung (1) genügender Operationen mit der Angabe sämtlicher Lösungen der Aczél—Benzschen Funktionalgleichung (3) äquivalent.

Um die Ergebnisse von [2] zu verallgemeinern, hat Z. Daróczy in [3] für den Fall $(G, +) = (\mathbf{R}, +)$ sämtliche stetige Lösungen von (3) bestimmt. Die Voraussetzung der Stetigkeit ist wesentlich, da (3) zwar nichtstetige Lösungen besitzt, eine Beschreibung derselben aber hoffnungslos scheint. Es sei z. B. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Funktion für welche $f(x+y) = f(x) + f(y) \ (x, y \in \mathbf{R})$ gilt, sowie $f(1) = 1$ und $f(x) \in \mathbf{Q}$ für alle $x \in \mathbf{R}$, wobei $\mathbf{Q}$ den Körper der rationalen Zahlen bedeutet. Eine solche Funktion existiert, da man durch rationale Wahl der Werte von f auf der Hamelbasis eine rationalwertige Lösung der Cauchyschen Gleichung erhält ([1], [4], [5]). Anderseits sieht man leicht ein, daß die soeben angegebene Funktion der Gleichung (3) genügt, und diese Funktion ist z. B. auf einer Menge positiven Maßes nicht meßbar ([5]).

In dieser Arbeit sei $(G, +) = (\mathbf{Z}, +)$, wobei $(\mathbf{Z}, +)$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen bedeutet. Unser Ergebnis ist in der folgenden Behauptung enthalten:

Es sei $(\mathbf{Z}, +)$ *die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Ist* $\circ: \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$ *eine assoziative Operation welche der Gleichung* (1) *für sämtliche* $x, y, t \in \mathbf{Z}$ *genügt, so gilt* $x \circ y = x$ *oder* $x \circ y = y$ *oder* $x \circ y = \max\{x, y\}$ *oder* $x \circ y = \min\{x, y\}$ *für sämtliche* $x, y \in \mathbf{Z}$.

2. Idempotente Lösungen. Es bezeichne $\mathfrak{M}_\mathbf{Z}$ die Menge derjenigen Funktionen $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, welche die Funktionalgleichung (3) für alle $x, y \in \mathbf{Z}$ befriedigen. Ist $f \in \mathfrak{M}_\mathbf{Z}$ und $f(0) = 0$, dann gilt wegen (2) $x \circ x = x$ für alle $x \in \mathbf{Z}$ und umgekehrt, ist die Operation $\circ$ idempotent, dann gilt $f(0) = 0$. Nunmehr sei $\mathfrak{M}_\mathbf{Z}^0 (\subset \mathfrak{M}_\mathbf{Z})$ die Menge derjenigen Funktionen $f \in \mathfrak{M}_\mathbf{Z}$ für welche $f(0) = 0$ gilt.

Lemma 1. *Es sei* $f \in \mathfrak{M}_\mathbf{Z}^0$ *festgewählt und*

$$F := \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ f(x) = x\},$$
$$N := \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ f(x) = 0\}.$$

Dann sind F *und* N *Halbgruppen bezüglich der Addition, und mit den Bezeichnungen*

$$A := \{f(x) \mid x \in \mathbf{Z}\},$$
$$B := \{-f(x) + x \mid x \in \mathbf{Z}\}$$

gilt $0 \in A \subseteq F$, $0 \in B \subseteq N$.

Beweis. (i) Ist $x, y \in F$, dann folgt aus (3) $f(x+y) = x+y$, d. h. $F + F \subset F$. Ist in (3) $x = 0$, dann gilt $f[f(y)] = f(y)$ für alle $y \in \mathbf{Z}$, d. h. $O \in A \subseteq F$. (ii) Ist $x, y \in N$, dann folgt aus (3) $f(x+y) = 0$, d. h. $N + N \subset N$. Ist in (3) $y = 0$, dann gilt $f[-f(x)+x] = 0$ für alle $x \in \mathbf{Z}$, d. h. $0 \in B \subseteq N$. ∎

Mit den Bezeichnungen von Lemma 1 gilt offenbar $F \cap N = \{0\}$. Es sei $M := = \mathbf{Z} - F \cup N$ die Restmenge.

Lemma 2. *Gilt* $f \in \mathfrak{M}_\mathbf{Z}^0$, *dann sind die folgenden, einander gegenseitig ausschließenden Fälle möglich:*

(a) $$F = \mathbf{Z}, \quad N = \{0\};$$

(b) $$F = \{0\}, \ N = \mathbf{Z};$$

(c) $$F = -N := \{-x \mid x \in N\}.$$

Beweis. (i) Gibt es Werte $a, b \in F$ mit $a < 0 < b$, dann gilt $F = \mathbf{Z}$ und $N = \{0\}$. Zuerst zeigen wir $N = \{0\}$. Andernfalls gäbe es ein $c \in N$ mit $c > 0$ oder $c < 0$. Wegen der Halbgruppeneigenschaft von F und N gelten aber für $c > 0$ die Beziehungen $cb \in F$ und $bc \in N$, d. h. $0 \neq cb \in F \cap N$, ein Widerspruch. Für $c < 0$ erhalten wir hingegen $(-c)\,a \in F$ und $(-a)\,c \in N$, d. h. $0 \neq -ac \in F \cap N$, ebenfalls ein Widerspruch.

Wegen $N = \{0\}$ gilt $B = \{0\}$, d. h. $-f(x) + x = 0$ für alle $x \in \mathbf{Z}$, d. h. für alle $x \in \mathbf{Z}$ gilt $x \in F$, und somit ist $F = \mathbf{Z}$. (ii) Gibt es Werte $a, b \in N$ mit $a < 0 < b$, dann gilt $F = \{0\}$ und $N = \mathbf{Z}$. Zuerst zeigen wir $F = \{0\}$. Andernfalls gäbe es ein $c \in F$ mit $c > 0$ oder $c < 0$. Ebenso wie beim Beweis des Falles (a) würde dann $N \cap F$ ein von Null verschiedenes Element haben, was einen Widerspruch bedeutet.

Wegen $F = \{0\}$ gilt $A = \{0\}$, d. h. $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{Z}$, und somit ist $N = \mathbf{Z}$. (iii) Auf Grund des in den Fällen (i) und (ii) bewiesenen können F und N keine ganze Zahlen verschiedenen Vorzeichens enthalten, und es gilt $F \neq \{0\}$, $N \neq \{0\}$.

Es sei $c \in N$ und $c \neq 0$. Dann gilt $-c \in M \cup F$. Im Falle $-c \in M$ setze man in (3) $x := c$ und $y := -c$, woraus

$$f[c+f(-c)] = 0$$

folgt. Offenbar gilt $0 \neq d := c+f(-c) \in N$ $(-c \notin F)$ und auf Grund von Lemma 1 $-d = -c-f(-c) \in B \subseteq N$ woraus sich wegen (ii) $F = \{0\}$ ergibt, ein Widerspruch. Deshalb gilt $-N \subseteq F$.

Gäbe es anderseits ein $c \in F$ mit $-c \in N$, dann wäre $-c \in M$. Setzt man jetzt in (3) $x := -c$ und $y := c$, so ergibt sich

$$0 = f(-c)+f[-f(-c)],$$

d. h. $-f(-c) \in F$. Da $f(-c) \in A \subseteq F$ und (wegen $-c \in M$) $f(-c) \neq 0$ gilt, muß F sowohl positive als auch negative Elemente haben, in Hinblick auf (i) bedeutet dies aber einen Widerspruch. Somit gilt $-N = F$. ∎

Lemma 3. *Für* $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ *und* $M \neq \emptyset$ *gilt* $1 \in M$ *und* $-1 \in M$.

Beweis. Aus Lemma 2. ergibt sich daß in diesem Falle (a) und (b) nicht erfüllt sind, so daß (c) gelten muß. Dann gilt z. B. im Falle $1 \in F$ wegen $F+F \subset F$ die Beziehung $\mathbf{N} \cup \{0\} \subseteq F$, sodann wegen (c) $-1 \in N$, d. h. wegen $N+N \subset N$ ist $(-\mathbf{N}) \cup \{0\} \subseteq N$. Dies bedeutet nun $F \cup N = \mathbf{Z}$, d. h. $M = \emptyset$, ein Widerspruch. Im Falle $-1 \in F$ verläuft der Beweis ganz ähnlich. ∎

Lemma 4. *Für* $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ *gilt* $M = \emptyset$.

Beweis. Wegen Lemma 3 genügt es zu zeigen, daß sowohl $1 \in M$ als auch $-1 \in M$ zu einem Widerspruch führen.

Es sei $f(1) := a$, $f(-1) := b$, dann gilt $a, b \notin \{0, 1, -1\}$, wegen Lemma 1 $a, b \in F$, (d. h. $-a, -b \in N$), und wegen der Behauptung (i) von Lemma 2 $ab > 0$. Setzt man in (3) $x := 1$, $y := -1$, so ergibt sich

$$f(1+b) = a+f(-a) = a, \tag{4}$$

anderseits folgt wegen $b = f(b)$ aus (3)

$$f(1+b) = f(1+f(b)) = a+f(-a+1+b). \tag{5}$$

Setzt man $x := -1$, $y := 1$, so erhält man aus (3) auf ähnliche Weise:

$$f(-1+a) = b+f(-b) = b, \tag{6}$$

und wegen $a = f(a)$ folgt

$$f(-1+a) = f[-1+f(a)] = b+f(-b-1+a). \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) sowie aus (6) und (7) ergibt sich: $c := (-a+1+b) \in N$ und $-b-1+a = -(-a+1+b) = -c \in N$. Für $c \neq 0$ folgt daraus, daß c und $-c$ beide Elemente von N sind, dann gilt aber wegen Lemma 2 (ii) $M = \emptyset$, ein Widerspruch. Folglich ist $c = 0$, d. h.

$$a = 1+b. \tag{8}$$

Nunmehr zeigen wir, daß

$$f(1+na) = (n+1)a \tag{9}$$

und

$$f(-1+nb) = (n+1)b \tag{10}$$

für sämtliche $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ erfüllt sind. Da (9) und (10) für $n=0$ definitionsgemäß richtig sind, sollen jetzt (9) und (10) für irgendein n gelten. Dann hat man wegen (3)

$$f[1+(n+1)a] = f[(1+na)+f(a)] =$$
$$= f(1+na)+f[-f(1+na)+1+na+a] =$$
$$= (n+1)a+f(1) = (n+2)a$$

und

$$f[-1+(n+1)b] = f[(-1+nb)+f(b)] =$$
$$= f(-1+nb)+f[f-(-1+nb)-1+nb+b] =$$
$$= (n+1)b+f(-1) = (n+2)b,$$

d. h. (9) und (10) sind auch für $(n+1)$ erfüllt.

Aus den Gleichungen (9) und (10) ergibt sich $(1+na) \in M$ und $(-1+nb) \in M$ für sämtliche $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Da $ab>0$ ist, sind zwei Falle möglich: (1) $a>0$, $b>0$; (2) $a<0$, $b<0$. Im Falle (1) sei $n := b-1$ dann gilt auf Grund des Vorangehenden $1+(b-1)a \in M$, d. h. wegen (8) $1+(b-1)(b+1) = b^2 \in M$. Anderseits gilt $b^2 = bb \in F$, d. h. $M \cap F \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

Im Falle (2) sei $n := -a-1$, dann gilt $-1+(-a-1)b \in M$, d. h. wegen (8) $-1+(-a-1)(a-1) = -a^2 \in M$. Anderseits haben wir $-a^2 = (-a)a \in F$, d. h. $M \cap F \neq \emptyset$ ein Widerspruch. ∎

Satz 1. Im Falle $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ *gilt*

$$f(x) = x \tag{11}$$

oder

$$f(x) = 0 \tag{12}$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x|+x) \tag{13}$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x|-x) \tag{14}$$

für alle $x \in \mathbf{Z}$.

Beweis. Aus der Behauptung (a) bzw. (b) von Lemma 2. erhalten wir die Lösungen (11) bzw. (12). Aus der Behauptung (c) von Lemma 2. und aus Lemma 4. ergibt sich $F = -N$ und $F \cup N = \mathbf{Z}$. Ist nun $1 \in F$, dann gelten $F = \mathbf{N} \cup \{0\}$ und $N = (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$, woraus wir die Lösung (13) erhalten. Ist endlich $-1 \in F$, so gelten $F = (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$ und $N = \mathbf{N} \cup \{0\}$, woraus sich (14) ergibt. Anderseits sieht man leicht ein, daß die durch die Gleichungen (11), (12), (13) und (14) angegebenen Funktionen Elemente von $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ sind. ∎

3. $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}=\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$. Auf Grund der vorangehenden Untersuchungen genügt es diejenigen Lösungen $f\in\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$ zu bestimmen, für welche $f(0)\neq 0$. Wir zeigen, dass solche Lösungen nicht existieren, so dass $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}=\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ gilt.

Lemma 5. *Es sei* $f\in\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$ *und*

$$\varphi(1) := 0, \quad \varphi(n+1) := f[\varphi(n)] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Dann besitzt die Funktion $\varphi\colon \mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ *die Eigenschaft der vollkommenen Additivität*

$$\varphi(nm) = \varphi(n)+\varphi(m) \tag{16}$$

für alle $n, m\in\mathbf{N}$, *und auch die Eigenschaft* $|E|$ *aus* $\varphi(n)=\varphi(m)$ *folgt* $\varphi(n+1)=$ $=\varphi(m+1)$.

Beweis. Für $f\in\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$ ist die Operation $x\circ y:=y+f(x-y)$ $(x, y\in\mathbf{Z})$ assoziativ. Deshalb folgt aus (15) wegen $f(x)=x\circ 0$ die Beziehung

$$\varphi(n) = \underbrace{0}_{1}\circ\underbrace{0}_{2}\circ\ldots\circ\underbrace{0}_{n},$$

woraus sich

$$\varphi(n+m) = \varphi(n)\circ\varphi(m) \tag{17}$$

für alle $n, m\in\mathbf{N}$ ergibt, d. h.

$$\varphi(n+m) = \varphi(m)+f[\varphi(n)-\varphi(m)]. \tag{18}$$

Wir zeigen, daß (16) gilt. Bei festgewählten n gilt (16) für $m=1$. Ist nun (16) für irgendein m richtig, so erhalten wir wegen (17) und (18)

$$\varphi[n(m+1)] = \varphi(nm+n) = \varphi(nm)\circ\varphi(n) = \varphi(n)+f[\varphi(nm)-\varphi(n)] =$$
$$= \varphi(n)+f[\varphi(m)] = \varphi(n)+\varphi(m+1),$$

d. h. (16) gilt auch für $(m+1)$. Da $f\colon\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ eine Funktion ist, gilt wegen (18) folgendes: ist $\varphi(k)-\varphi(l)=\varphi(k')-\varphi(l')$, dann ist

$$\varphi(k+l)-\varphi(l) = \varphi(k'+l')-\varphi(l').$$

Daraus ergibt sich indem man $l=l':=1$ und $k:=n$, $k':=m$ setzt, daß aus $\varphi(n)=$ $=\varphi(m)$ die Gleichheit $\varphi(n+1)=\varphi(m+1)$ folgt, d. h. die Eigenschaft $|E|$ ist gültig.

Lemma 6. *Falls* $\varphi\colon\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ *vollkommen additiv ist* (*d. h. der Bedingung* (16) *genügt*) *und die Eigenschaft* $|E|$ *besitzt, gilt* $\varphi(n)=0$ *für alle* $n\in\mathbf{N}$.

Beweis. (i) Folgt aus $\varphi(n)=\varphi(m)$ die Gleichheit $n=m$, so gilt die Eigenschaft $|E|$ und φ ist invertierbar. Mit den Bezeichnungen $a:=\varphi(2)$ und $b:=\varphi(3)$ $(a, b\in\mathbf{Z})$ ist dann $ab\neq 0$. Anderseits gilt

$$-ba+ab = 0 \tag{19}$$

und es gibt natürliche Zahlen $k_i, l_i\in\mathbf{N}$ $(i=1, 2)$ derart, daß $-b=k_1-l_1$, $a=k_2-l_2$. Aus (19) folgt nun

$$k_1a+k_2b = l_1a+l_2b,$$

d. h. wegen (16)

$$\varphi(2^{k_1}3^{k_2}) = k_1 a + k_2 b = l_1 a + l_2 b = \varphi(2^{l_1}3^{l_2}),$$

und daraus folgt wegen der Invertierbarkeit von φ daß $k_1 = l_1$ und $k_2 = l_2$ ist, ein Widerspruch.

(ii) Nehmen wir jetzt an, daß es Werte $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ gibt, für Welche $\varphi(n) = \varphi(m)$. Dann existieren für jedes $x \in \mathbf{N}$ mit $x > m$ Werte $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, m-n-1\}$ derart, daß

$$x = m + k + l(m-n)$$

ist. Wir zeigen, daß mit der Bezeichnung $n := m - n > 0$ die Beziehung

$$\varphi(x+p) = \varphi(x)$$

gilt. Wegen der Eigenschaft $|E|$ haben wir $\varphi(n+t) = \varphi(m+t)$ für jedes $t \in \mathbf{N}$, und daraus folgt

$$\varphi(x+p) = \varphi[m+k+(l+1)(m-n)] = \varphi[n+k+(l+1)(m-n)] =$$
$$= \varphi[m+k+l(m-n)] = \varphi(x).$$

Dies bedeutet, daß für $x > m$ die Funktion φ periodisch ist mit der Periode $p > 0$, folglich ist die Menge $\{\varphi(n) | n \in \mathbf{Z}\}$ endlich und φ beschränkt. Daraus ergibt sich $\varphi(n) = 0$ für alle n. Andernfalls gäbe es eine Primzahl p mit $\varphi(p) =: a \neq 0$ und daraus würde wegen $\varphi(p^k) = ka$ $(k \in \mathbf{N})$ die Unbeschränktheit von φ folgen. ∎

Korollar. *Für* $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$ *gilt* $f(0) = f[\varphi(1)] = \varphi(2) = 0$, *d. h.* $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}} = \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$.

4. *Das Hauptergebnis.* Wegen des Vorangehenden gilt $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}} = \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$, so daß wir auf Grund des Satzes 1 das folgende Ergebnis aussprechen können:

Satz 2. *Es sei* $(\mathbf{Z}, +)$ *die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Falls die Operation* $\circ : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$ *assoziativ ist und der Gleichung* (1) *für alle* $x, y, t \in \mathbf{Z}$ *genügt, so gilt*

$$x \circ y = x \tag{20}$$

oder

$$x \circ y = y \tag{21}$$

oder

$$x \circ y = \max\{x, y\} \tag{22}$$

oder

$$x \circ y = \min\{x, y\} \tag{23}$$

für alle $x, y \in \mathbf{Z}$.

Beweis. Es gilt $x \circ y = y + f(x-y)$ $(x, y \in \mathbf{Z})$ mit $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}$. Da $\mathfrak{M}_{\mathbf{Z}} = \mathfrak{M}_{\mathbf{Z}}^0$ ist, folgt wegen der Behauptung von Satz 1 (20) aus (11), (21) aus (12), (22) aus (13) und (23) aus (14). ∎

Bibliographie

[1] J. Aczél, Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. *Birkhäuser Verlag, Basel* 1960.

[2] J. Aczél—W. Benz, Über das harmonische Produkt und eine korrespondierende Funktionalgleichung. *Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg.* **43** (1975), 3—10.

[3] Z. Daróczy, Über die stetigen Lösungen der Aczél—Benz'schen Funktionalgleichung. *Abhandlungen aus dem Math. Sem. der Univ. Hamburg.* **50** (1980), 210—218.

[4] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Math. Ann.* **60** (1905), 459—462.

[5] A. Ostrowski, Mathematische Miszellen, XIV.: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen. *Jber. dtsch. Math.-Ver.* **38** (1929), 54—62.

(Eingegangen am 25. Juli 1982.)