Гиперпространства полусинтопогенных пространств

В. В. МАСЛОВ, Р. С. ЛИНИЧУК (ВОРОШИЛОВГРАД)

Как известно, топологические, близостные и равномерные структуры являются частными случаями так называемых синтопогенных структур, первоначальное изучение которых проведено венгерским математиком, академиком А. Часаром в [2]. Понятие полусинтопогенной структуры есть обобщение понятия синтопогенной структуры; полусинтопогенные структуры впервые рассматривались в [1]. С терминологией можно ознакомиться в указанных работах.

Настоящая статья посвящена первоначальному изучению гиперпространств полусинтопогенных пространств. Следует отметить, что понятие гиперпространства полусинтопогенного пространства введено как естественное обобщение понятия гиперпространства топологического пространства (см. [3] и [4]). Однако, указанный процесс обобщения не является чисто механическим переносом известных результатов хотя бы потому, что в теории полусинтопогенных пространств необходимо применяется аппарат, несколько отличный от аппарата, традиционно используемого в общей топологии. Нужно учесть, что из результатоь, излагаемых в данной статье, могут быть получены некоторые следствия, касающиеся, например, равномерных и близостных пространств. Однако, такой аспект, представляющий, конечно, известный интерес, развивался нами напименьшим образом.

Пусть X — произвольный непустой класс, а $\mathfrak{P}(X)$ — класс всех его частей. Отображение $i_X: X \to \mathfrak{P}(X)$, определяемое правилом: $x \to \{x\}$, $x \in X$, явлается канонической инъекцией класса X в класс $\mathfrak{P}(X)$; обозначим $\tilde{X} = i_X(X)$.

Предположим, что на классе X задан полутопогенный порядок $<$. Образ порядка $<$ относительно отображения i_X является полутопогенным порядком в классе $\tilde{X}$, который будем обозначать символом $\widetilde{<}$. Договоримся отождествлять классы X и $\tilde{X}$ и полутопогенные порядки $<$ и $\widetilde{<}$.

Предложение 1. *Для того, чтобы полутопогенный порядок $<^*$, определённый на классе $\mathfrak{P}(X)$, имел сужением на класс X полутопогенный порядок $<$, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны соотноения:*

$$A < B \quad \text{и} \quad A <^* B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$$

(для всех таких $A, B \subset X$, что $A < B$).

Определение 1. Полутопогенный порядок $<^*$ на классе $\mathfrak{P}(X)$ называется гиперпродолжением полутопогенного порядка $<$, определённого на классе X, если $<^* | X = <$.

Корректность данного определения подтверждается следующими примерами.

Пример 1. Пусть $<$ — полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Для подклассов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{P}(X)$ положим: $\mathfrak{P} <_\varkappa \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда: 1) либо $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \emptyset$, 2) либо найдутся две такие части U и V класса X что: $U < V$ и $\mathfrak{A} \subset \{(W) : W \subset U\}$, $\{(W) :\ W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$.

Предложение 2. *Отношение $<_\varkappa$ является таким полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, что $<_\varkappa | X = <$.*

Доказательство. Тот факт, что $<_\varkappa$ есть полутопогенный порядок на классе $\mathfrak{P}(X)$, устанавливается простой проверкой выполнения аксиом $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$. Допустим теперь, что $A <_\varkappa | X\, B$ для $A, B \subset X$. Это соотношение эквивалентно соотношению $A <_\varkappa B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём части U и V класса X так, как того требует определение полутопогенного порядка $<_\varkappa$, т. е.:

$$U < V,\ A \subset \{(W) : W \subset U\},$$

$$\{(W) : W \subset V\} \subset B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X).$$

Если $x \in A$, то $x \in \{(W) : W \subset U\}$, так что $\{x\} \subset U$, а потому $x \in U$; таким образом, $A \subset U$. Если же $x \in V$ то $\{x\} \in \{(W) :\ W \subset V\}$ так что $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Учитывая что $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ и $x \in X$ получаем в силу договорённости: $x \in B$; таким образом, $V \subset B$. Согласно аксиоме $\mathcal{O}_2$, из соотношений $A \subset U$, $V \subset B$ и $U < V$ вытекает соотношение $A < B$. Итак, $< = <_\varkappa | X$.

Пример 2. Пусть $<$ (— некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Между элементами $\mathfrak{A}$) и ($\mathfrak{B}$) класса $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ определим отношение $<_\lambda$ сдледующим правилом: $\mathfrak{A} <_\lambda \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда: 1) либо $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \emptyset$, 2) либо найдутся такие две чсати класса X, например, U и V, что

$$U < V, \mathfrak{A} \subset \{(W) : W \cap U \neq \emptyset\},\ \{(W) : W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$$

Предложение 3. *Отношение $<_\lambda$ является полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, сужение которого на класс X есть $<$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

Пример 3. Если $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$, то символом $<_\psi$ обозначим отношение $<_\varkappa \cup <_\lambda$ на классе $\mathfrak{P}(X)$.

Предложение 4. *Отношение $<_\psi$ является полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, имеющим сужением на класс X полутопогенный порядок $<$.*

Предложение 5. *Если полутопогенный порядок $<$ сильнее полутопогенного порядка $<'$ на классе $X \neq \emptyset$, то полутопогенный порядок $<_\varkappa$ (сотвеотственно, $<_\lambda$; соответственно, $<_\psi$) сильнее полутопогенного порядка $<'_\varkappa$ (соответственно, $<'_\lambda$; соответственно, $<'_\psi$) на $\mathfrak{P}(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} <'_\varkappa \mathfrak{B}$, так что существуют такие части U и

V класса X, что $U <' V$,

$$\mathfrak{A} \subset \{(W) : W \subset U\}, \ \{(W) : W \subset V\} \subset \mathfrak{B}.$$

Так как из соотношения $U <' V$ следует соотношение $U < V$, то $\mathfrak{A} <_\varkappa \mathfrak{B}$.

Предложение 6. *Каков бы ни был полутопогенный порядок $<$ на классе $X \neq \emptyset$, полутопогенный порядок $(<^c)_\varkappa$ совпадает с полутопогенным порядком $(<_\lambda)^c$ на классе $\mathfrak{P}(X)$.*

Доказательство. Соотношение $\mathfrak{A}(<_\lambda)^c \mathfrak{B}$ эквивалентно соотношению $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} <_\lambda \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_\lambda$, найдутся такие части U и V класса X, что: $U < V$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} \subset \{(W) : W \cap U \neq \emptyset\}$, $\{(W) : W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$.

Так как $X \setminus V <^c X \setminus U$ и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \cap V \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \cap U \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$, то из очевидных равенств $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \cap V \neq \emptyset\} = \{(W) : W \subset X \setminus V\}$ и $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \cap U \neq \emptyset\} = \{(W) : W \subset X \setminus U\}$ получаем соотношение $\mathfrak{A}(<^c)_\varkappa \mathfrak{B}$.

Предложение 7. *Для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$ порядки $(<_\varkappa)^c$ и $(<^c)_\lambda$ равны.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(<_\varkappa)^c \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} <_\varkappa \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$. Найдём части. U и V класса X так, чтобы: $U < V$ и

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} \subset \{(W) : W \subset U\}, \ \{(W) : W \subset V\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}.$$

Отсюда: $X \setminus V <^c X \setminus U$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \subset U\} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \subset V\}$, так как, очевидно,

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \subset U\} = \{(W) : W \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

и

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W) : W \subset V\} = \{(W) : W \cap (X \setminus V) \neq \emptyset\},$$

то $\mathfrak{A}(<^c)_\lambda \mathfrak{B}$.

Предложение 8. *Равенство $(<^c)_\psi = (<_\psi)^c$ справедливо для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$.*

Доказателсьтво. В самом деле, имеем: $(<_\psi)^c = (<_\varkappa \cup <_\lambda)^c = (<_\varkappa)^c \cup (<_\lambda)^c = (<^c)_\lambda \cup (<^c)_\varkappa = (<^c)_\varkappa \cup (<^c)_\lambda = (<^c)_\psi$.

Следствие. *Если $<$ — симметричный полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$, то $<_\psi$ — симметричный полутопогенный порядок на классе $\mathfrak{P}(X)$.*

Действительно, $(<_\psi)^c = (<^c)_\psi = <_\psi$.

Предложение 9. *Для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$ справедливо равенство $(<^p)_\lambda = (<_\lambda)^p$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(<^p)_\lambda \mathfrak{B}$, то найдутся такие части U и V класса X, что: $\mathfrak{A} \subset \{(W) : W \cap U \neq \emptyset\}$, $\{(W) : W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$. Воспользовавшись определением совершенного $<^p$, найдём части U_i, $i \in I \neq \emptyset$, класса X так, чтобы $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и для каждого индекса $i \in I$ справедливо соотношение $U_i < V$.

При этом очевидно,

$$\{(W): W\cap U_i\neq\emptyset\}<\{(W): W\cap V\neq\emptyset\}.$$

Учитывая равенство

$$\{(W): W\cap(\bigcup_{i\in I} U_i)\}=\bigcup_{i\in I}\{(W): W\cap U_i\neq\emptyset\}$$

и включение $\{(W): W\cap V\neq\emptyset\}\subset\mathfrak{B}$, находим: $\mathfrak{A}(<_\lambda)^p\mathfrak{B}$. Обратно, если $\mathfrak{A}(<_\lambda)^p\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_i<_\lambda\mathfrak{B}$, $i\in I$. Каждое соотношение $\mathfrak{A}_i<_\lambda\mathfrak{B}$ позволяет выбрать такие части U_i и V_i, $i\in I$ класса X, что: $U_i<V_i$, $\mathfrak{A}\subset\subset\{(W): W\cap U_i\neq\emptyset\}$, $\{(W): W\cap V_i\cap\emptyset\}\subset\mathfrak{B}$. Положив $U=\bigcup_{i\in I}U_i$, $V=\bigcup_{i\in I}V_i$, из соотношений $U_i<V$, $i\in I$, найдём: $U<^p V$, а отсюда:

$$\{(W): W\cap U\neq\emptyset\}(<^p)_\lambda\{(W): W\cap V\neq\emptyset\}.$$

Так как $\mathfrak{A}=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i\subset\bigcup_{i\in I}\{(W): W\cap U_i\neq\emptyset\}=\{(W): W\cap(\bigcup_{i\in I}U_i)\neq\emptyset\}=\{(W): W\cap\cap U\neq\emptyset\}$ и $\{(W): W\cap V\neq\emptyset\}\subset\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}(<^p)_\lambda\mathfrak{B}$. Итак, окончательно, $(<_\lambda)^p==(<^p)_\lambda$.

Следствие. *Если полутопогенный порядок* $<$ *— совершенный, то таков же и порядок* $<_\lambda$.

В самом деле, $(<_\lambda)^p=(<^p)_\lambda=<_\lambda$.

Замечание. Полутопогенные порядки $(<_\varkappa)^p$ и $(<^p)_\varkappa$ (а потому и $(<_\psi)^p$ и $(<^p)_\psi$ — несравнимы.

Предложение 10. *Каков бы ни был полутопогенный порядок* $<$ *на классе* $X\neq\emptyset$, *всегда:* $(<^2)_\varkappa=(<_\varkappa)^2$, $(<^2)_\lambda=(<_\lambda)^2$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(<^2)_\varkappa\mathfrak{B}$, то найдутся такие части U и V класса X, что $U<^2V$,

$$\mathfrak{A}\subset\{(W): W\subset U\},\ \{(W): W\subset V\}\mathfrak{B}.$$

Соотношение $U<^2V$ позволяет выделить такую часть T класса X, что $U<T<<V$. Тогда очевидно, $\mathfrak{A}<_\varkappa\mathfrak{C}<_\varkappa\mathfrak{B}$, где положено $\mathfrak{C}=\{(W): W\subset T\}$. В таком случае ясно, что $\mathfrak{A}(<_\varkappa)^2\mathfrak{B}$. Обратно, если $\mathfrak{A}(<_\varkappa)^2\mathfrak{B}$, то найдётся такая часть $\mathfrak{C}$ класса $\mathfrak{P}(X)$, что $\mathfrak{A}<_\varkappa\mathfrak{C}<_\varkappa\mathfrak{B}$. Определение полутопогенного порядка $<_\varkappa$ позволяет найти такие части U, V, U', V' класса X, что $U<V$, $\mathfrak{A}\subset\subset\{(W): W\subset U\}$, $\{(W): W\subset V\}\subset\mathfrak{C}$, $U'<V'$, $\mathfrak{C}\subset\{(W): W\subset U'\}$, $\{(W): W\subset V'\}\subset\mathfrak{B}$; так как $V\subset U'$, то $U<V<V'$, а потому $U<^2V'$, так что $\mathfrak{A}(<^2)_\varkappa\mathfrak{B}$.
Итак, $(<^2)_\varkappa=(<_\varkappa)^2$.

Аналогичные рассуждения проводятся и для полутопогенных порядков $(<^2)_\lambda$ и $(<_\lambda)^2$.

Следствие. *Полутопогенный порядок* $(<_\psi)^2$ *сильнее полутопогенного порядка* $(<^2)_\psi$, *каков бы ни был полутопогенный порядок* $<$ *на классе* $X\neq\emptyset$.

Действительно, из равенств $(<^2)_\psi=(<^2)_\varkappa\cup(<^2)_\lambda=(<_\varkappa)^2\cup(<_\lambda)^2$, $(<_\varkappa\cup<_\lambda)^2=(<_\psi)^2$, учитывая то, что полутопогенный порядок $(<_\varkappa\cup<_\lambda)^2$ сильнее полутопогенного порядка $(<_\varkappa)^2\cup(<_\lambda)^2$, получаем требуемое.

Предложение 11. *Пусть* $<$ *— некоторый полутопогенный порядок на классе* $X \neq \emptyset$. *Полутопогенный порядок* $(<_\varkappa)^q$ [*соответственно,* $(<_\varkappa)^b$] *является слабейшим топогенным (соответственно, бисовершенным) порядком на классе* $\mathfrak{P}(X)$ *среди тех топогенных* (соответственно, бисовершенных) *порядков, которые сильнее порядка* $<_\varkappa$, *а порядок* $(<_\varkappa)^s$ *— слабейший среди всех симметричных топогенных порядков на* $\mathfrak{P}(X)$, *которые сильнее порядка* $<_\varkappa$.

Замечание. Аналогичное предложению 11 утверждение справедливо относительно полутопогенных порядков $<_\lambda$ и $<_\psi$.

Предложение 12. *Если* $[X; S]$ *— некоторое полусинтопогенное пространство, то* $[\mathfrak{P}(X); S_\varkappa]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\lambda]$ *и* $[\mathfrak{P}(X); S_\psi]$ *— полусинтопогенные пространства.*

Здесь положено $S_\varkappa = \{<_\varkappa : < \in S\}$, $S_\lambda = \{<_\lambda : < \in S\}$, $S_\psi = \{<_\psi : < \in S\}$.

Доказательство. Пусть $<_\varkappa$, $<'_\varkappa \in S_\varkappa$; тогда $<, <' \in S$. Найдём в структуре S полутопогенный порядок $<''$, который сильнее полутопогенных порядков $<$ и $<'$. Тогда полутопогенный порядок $<''_\varkappa \in S_\varkappa$ сильнее полутопогенных порядков $<_\varkappa$ и $<'_\varkappa$ (см. предложение 5). Далее, если $<_\varkappa \in S_\varkappa$, то для полутопогенного порядка $< \in S$ найдём порядок $<' \in S$ так, как того требует аксиома (S_2); тогда полутопогенный порядок $<'_\varkappa \in S_\varkappa$ удовлетворяет аксиоме (S_2).

Предложение 13. *Пусть* S *— полусинтопогенная структура на классе* $X \neq \emptyset$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $S^q_\varkappa$ *(соответственно,* $S^p_\varkappa$, $S^b_\varkappa$, $S^S_\varkappa$) *— слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе* $\mathfrak{P}(X)$, *которые сильнее структуры* $S_\varkappa$;

2) S^q_λ *(соответственно,* S^p_λ, S^b_λ, S^S_λ) *— слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе* $\mathfrak{P}(X)$, *которые сильнее структуры* S_λ;

3) S^q_ψ *(соответственно,* S^p_ψ, S^b_ψ, S^S_ψ) *— слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе* $\mathfrak{P}(X)$, *которые сильнее структуры* S_ψ.

Напомним, что символом S^t обозначается полусинтопогенная структура, состоящая из единственного полутопогенного порядка, являющегося объединением всех полутопогенных порядков структуры S.

Предложение 14. *Какова бы ни была полусинтопогенная структура* S *на классе* $X \neq \emptyset$, *всегда:*

$$(S_\varkappa)^t = (S^t)_\varkappa, (S_\lambda)^t = (S^t)_\lambda, (S_\psi)^t = (S^t)_\psi.$$

Доказательство. Пусть $(S_\varkappa)^t = \{<\}$ и $\{<_1\} = (S^t)_\varkappa$. Если $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, то существует такой полутопогенный порядок $<'_\varkappa \in S_\varkappa$, что $\mathfrak{A} <_\varkappa \mathfrak{B}$. Последнее осотношение эквивалентно существованию таких частей U и V класса X, что:

$$U <' V,\ \mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\},\ \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}.$$

Если считать, что $S^t = \{<''\}$, то очевидно, $U <'' V$, а потому: $\mathfrak{A} <''_{\varkappa} \mathfrak{B}$. Так как $<''_{\varkappa} = <_1$, то $\mathfrak{A} <_1 \mathfrak{B}$. Обратно, пусть $\mathfrak{A} <_1 \mathfrak{B}$; так как $<_1 = <''_{\varkappa}$ (при обозначении $\{<''\} = S^t$), то $\mathfrak{A} <''_x \mathfrak{B}$, а потому найдутся такие части U и V класса X, что: $U <'' V$, $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}$, $\{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$. Ясно, что $U <' V$ при некотором полутопогенном порядке $<'$ из структуры S, так что $\mathfrak{A} <'_x \mathfrak{B}$; вместе с этим, $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.

Итак, $< = <_1$.

Предложение 15.1. *Пусть* $<$ *— некоторый полутопогенный порядок на классе* $X \neq \emptyset$. *Верны следующие утверждения:*

1) *если* $< = <^q$, *то* $(<_{\varkappa})^q | X = <$;
2) *если* $< = <^p$, *то* $(<_{\varkappa})^p | X = <$;
3) *если* $< = <^c$, *то* $(<_{\varkappa})^c | X = <$;
4) *если* $< = <^b$, *то* $(<_{\varkappa})^b | X = <$;
5) *если* $< = <^s$, *то* $(<_{\varkappa})^s | X = <$.

Доказательство. 1) Предположим, что $A (<_{\varkappa})^q | X B$ при $A, B \subset X$. Тогда $A (<_{\varkappa})^q B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём натуральные числа m, n_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ и части A_j, B_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n_i)$ класса $\mathfrak{P}(X)$ так, чтобы: $A_{ij} < B_{ij}$ — для всех указанных индексов i, j, и

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij} \right),\ B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n_i} B_{ij} \right).$$

Используя определение полутопогенного порядка $<_{\varkappa}$, найдём такие части U_{ij}, V_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n_i)$ класса X, что $U_{ij} < V_{ij}$ для всех индексов i, j, и

$$A_{ij} \subset \{(W): W \subset U_{ij}\},\ \{(W): W \subset V_{ij}\} \subset B_{ij}.$$

Положив $U = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} U_{ij}$, $V = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, получим $U <^q V$; учитывая, что $< = <^q$, имеем: $U < V$. Покажем, что $A \subset U$ и $V \subset B$. Допустим, что $x \in A$; тогда $x \in A_{i_0 j}$ для некоторого индекса i_0 и всех индексов $j = 1, 2, \dots, n_{i_0}$ а потому — $x \in U_{i_0 j}$, так что $x \in U$. Если же $x \in V$, то $x \in V_{i_0 j}$ для некоторого индекса i_0 и всех индексов $j = 1, 2, \dots, n_{i_0}$. Следовательно, $x \in B_{i_0 j}$ и $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Так как $x \in X$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus X$ и потому $x \in B$. Итак, $A < B$. Учитывая то обстоятельство, что всюду в доказательстве использовались лишь определения и разного рода критерии, можно утверждать, что доказано равенство $< = (<_{\varkappa})^q | X$.

2) Пусть $A (<_{\varkappa})^p | X B$ при $A, B \subset X$. Тогда $A (<_{\varkappa})^p B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём такой класс индексов I, для каждого $i \in I$ — часть A_i класса X, что: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ и $A_i <_{\varkappa} B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, $i \in I$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_{\varkappa}$, существуют такие части U_i, V_i, $i \in I$, класса X, что: $U_i < V_i$,

$A_i \subset \{(W) : W \subset U_i\}$, $\{(W) : W \subset V_i\} \subset B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, $i \in I$. Положив $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, получим: $U <^p V$, поэтому $U < V$. Покажем, что $A \subset U$ и $V \subset B$.

Если $x \in A$, то $x \in A_{i_0}$ — для некоторого индекса i_0, а потому — $x \in U_{i_0}$, так что $x \in U$.

Если $x \in V$, то $x \in V_{i_1}$ — для некоторого индекса i_1, а потому $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$; так как $x \in X$, то из последнего соотношения находим $x \in B$.

Итак, $A < B$. Следовательно, $< = (<_\varkappa)^p | X$.

3) Допустим, что $A (<_\varkappa)^c | X B$ при $A, B \subset X$. Тогда $A (<_\varkappa)^c B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, так что $X \setminus B <_\varkappa \mathfrak{P}(X) \setminus A$. Найдём такие части U и V класса X, что $U < V$, $X \setminus B \subset \{(W) : W \subset U\}$, $\{(W) : W \subset V\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus A$. Так как $<^c = <$, то из соотношения $X \setminus V <^c X \setminus U$ получаем соотношение $X \setminus V < X \setminus U$. Покажем, что $A \subset X \setminus V$ и $X \setminus U \subset B$.

Если $x \in A$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus A$, так что $x \notin V$, то есть $x \in X \setminus V$. Если $x \in X \setminus U$, то $x \notin U$, так что $x \notin X \setminus B$, то есть $x \in B$. Следовательно, $A < B$. Итак, $< = (<_\varkappa)^c | X$.

4) Допустим, что $A (<_\varkappa) |^b X B$ при $A, B \subset X$. Это значит, что $A (<_\varkappa)^b B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём класс индексов I и класс индексов J, а для каждого $i \in I$ (соответственно, $j \in J$) — часть A_i (соответственно, B_j) класса $\mathfrak{P}(X)$ так, чтобы:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X) = \bigcup_{j \in J} B_j, A_i <_\varkappa B_j.$$

При каждом $(i, j) \in I \times J$ найдутся такие части U_i и V_j класса X, что:

$$U_i < V_j,\ A_i \subset \{(W) : W \subset U_i\},\ \{(W) : W \subset V_j\} \subset B_j.$$

Положив $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcap_{j \in J} V_j$, найдём сначала: $U <^b V$, а затем — $U < V$.

Если $x \in A$, то $x \in A_{i_0}$ при некотором индексе i_0, а потому $x \in U_{i_0}$ и $x \in U$; итак, $A \subset U$.

Если же $x \in V$, то $x \in V_j$ при всех $j \in J$, так что $x \in B_j$; поэтому $x \in \bigcap_{j \in J} B_j = B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Поскольку $x \in X$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus X$, а потому $x \in B$; итак, $V \subset B$.

Следовательно, $A < B$, так что $< = (<_\varkappa)^b | X$.

5) Утверждение вытекает из 1) и 3).

Замечание. Доказательство предложения 15.1. можно значительно сократить следующим образом. Будем условно считать, что запись $<^a$ обозначает любую из записей $<^q$, $<^p$, $<^c$, $<^b$, $<^s$. Тогда $<(_\varkappa)^a | X = (<_\varkappa | X)^a = <^a = <$.

Предложение 15. 2. *Пусть $<$ — произвольный полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Верны следующие утверждения:*

1) *если* $< = <^q$, *то* $(<_\lambda)^q | X = <$;
2) *если* $< = <^p$, *то* $(<_\lambda)^p | X = <$;
3) *если* $< = <^c$, *то* $(<_\lambda)^c | X = <$;
4) *если* $< = <^b$, *то* $(<_\lambda)^b | X = <$;
5) *если* $< = <^s$, *то* $(<_\lambda)^s | X = <$.

Предложение 15.3. *Для каждого полутопогенного порядка* $<$ *на классе* $X\neq\emptyset$ *верны следующие утверждения:*

1) *если* $<=<^q$, *то* $(<_\psi)^q|X=<$;
2) *если* $<=<^p$, *то* $(<_\psi)^p|X=<$;
3) *если* $<=<^c$, *то* $(<_\psi)^c|X=<$;
4) *если* $<=<^b$, *то* $(<_\psi)^b|X=<$;
5) *если* $<=<^s$, *то* $(<_\psi)^s|X=<$.

Предложение 16. *Пусть* S — *полусинтопогенная структура на классе* $X\neq\emptyset$. *Тогда имеют место следующие факты:*

1) *если* S — *синтопогенная, то* $(S_\varkappa)^q$ *соответственно,* $(S_\lambda)^q$, $(S_\psi)^q$ — *слабейшая среди тех синтопогенных структур на* $\mathfrak{P}(X)$, *которые сильнее структуры* $S_\varkappa$ *(соответственно,* S_λ, S_ψ); *при этом:* $(S_\varkappa)^q|X=(S_\lambda)^q|X=(S_\psi)^q|X=S$;
2) *если* S — *совершенная, то* $(S_\lambda)^p$ — *такая же;*
3) *если* S — *симметричная, то* $(S_\lambda)^c$ — *симметрична;*
4) *если* S — *бисовершенная, то* $(S_\lambda)^b$ — *бисовершенная;*
5) *если* S — *топогенная и симметричная, то такова же и* $(S_\lambda)^s$.

Следствия:

1. Если $S=\{<\}$ — топология на классе $X\neq\emptyset$, то $\{<_\varkappa\}^{qp}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}^q$, $\{<_\psi\}^{qp}$) — слабейшая из всех тех топологий на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры $\{<_\varkappa\}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}, \{<_\psi\}$); при этом $\{<_\varkappa\}^{qp}|X=\{<_\lambda\}^q|X=\{<_\psi\}^{qp}|X=S$.
2. Если $S=\{<\}$ — структура близости на классе $X\neq\emptyset$, то $\{<_\varkappa\}^{qc}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}^{qc}$, $\{<_\psi\}^q$) — слабейшая из всех тех структур близости на классе $\mathfrak{P}(X)$ которые сильнее структуры $\{<_\varkappa\}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}, \{<_\psi\}$); при этом
$$\{<_\varkappa\}^{qc}|X = \{<_\lambda^{qc}\}|X = \{<_\psi\}^q|X = S.$$
3. Если S — равномерная структура на классе $X\neq\emptyset$, то $S_\varkappa^{bc}$ (соответственно, S_λ^{bc}, S_ψ^b) — слабейшая из всех тех равномерных структур на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры $S_\varkappa$ (соответственно, S_λ, S_ψ); при этом
$$S_\varkappa^{bc}|X = S_\lambda^{bc}|X = S_\psi^b|X = S.$$
4. Пусть S — равномерная структура на классе $X\neq\emptyset$. Тогда структура близости, выводимая из равномерной структуры $S_\varkappa^{bc}$ (соответственно, S_λ^{bc}, S_ψ^b) на классе $\mathfrak{P}(X)$, совпадает со структурой близости $((S^{tq})_\varkappa)^{qc}$ соответственно, $((S^t)_\lambda)^{qc}$, $((S^t)_\psi)^q$, получающейся описанным образом из структуры близости S^{tq}, выводимой из структуры S на классе X.
5. Пусть S — структура близости на классе $X\neq\emptyset$. Тогда топология $(S_\lambda)^{pq}$, выводимая из структуры близости $(S_\lambda)^{qc}$ на классе $\mathfrak{P}(X)$, совпадает с топологией $(S^{pq})_\lambda$, получающейся описанным образом на классе $\mathfrak{P}(X)$ из топологии S^{qp} на классе X.
6. Пусть S — равномерная структура на классе $X\neq\emptyset$. Тогда топология $((S_\lambda)^{qc})^{tqp}$ на классе $\mathfrak{P}(X)$, выводимая из равномерной структуры $(S_\lambda)^{bc}$, совпадает с топологией $(S^{tqp})_\lambda$, получающейся описанным образом из топологии S^{tqp}, выводимой из равномерной структуры S на классе X.

Указание. Доказательство сформулированных результатов достаточно элементарно, а потому здесь не приводится.

Определение 2. Гиперпродолжение $<^*$ полутопогенного порядка $<$ назовём согласованным, если $<^*$ обладает всеми теми свойствами, что и $<$.

Например: 1) гиперпродолжение $<_\lambda$ (соответственно, $<_\psi$) совершенного (соответственно, симметричного) полутопогенного порядка является согласованным;

2) гиперпродолжение $<_\varkappa$ топогенного порядка $<$ не является согласованным.

Определение 3. Полусинтопогенную структуру S^* на классе $\mathfrak{P}(X)$ назовём гиперпродолжением полусинтопогенной структуры S, определённой на классе $X \neq \emptyset$, если $S^*|X = S$. Будем говорить, что гиперпродолжение S^* согласовано, если S^* обладает всеми теми же свойствами, что и S. Полусинтопогенное пространство $[\mathfrak{P}(X); S^*]$ будем называть (согласованным) гиперпространством для полусинтопогенного пространства $[X, S]$, если S^* является (согласованным) гиперпродолжением структуры S.

Например: 1) если $[X; \{<\}]$ — топологическое пространство, то его согласованными гиперпространствами будут $[\mathfrak{P}(X); \{<_\varkappa\}^{qp}]$, $[\mathfrak{P}(X); \{<_\lambda\}^{qp}]$, $[\mathfrak{P}(X); \{<_\psi\}^{qp}]$;

2) если $[X; \{<\}]$ — пространство близости, то его согласованными гиперпространствами являются

$$[\mathfrak{P}(X); \{<_\varkappa\}^{qc}],\ [\mathfrak{P}(X); \{<_\lambda\}^{qc}],\ [\mathfrak{P}(X); \{<_\psi\}^{q}];$$

3) если $[X; S]$ — равномерное пространство, то его согласованными гиперпространствами являются $[\mathfrak{P}(X); S_\varkappa^{bc}]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\lambda^{bc}]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\psi^{b}]$].

Из приведенных примеров видно, что одно и то же полусинтопогенное пространство может иметь несколько гиперпространств, получаемых различными процедурами.

Соглашение. Условимся писать $[\mathfrak{P}(X); \xi S]$ и $[\mathfrak{P}(Y); \xi\gamma]$, если эти гиперпространства для (соответственно) пространств $[X; S]$ и $[Y; \gamma]$ получаются некоторой единообразной процедурой (что подчёркивается использованием одной и той же буквы ξ). С этой точки зрения гиперпространства $[\mathfrak{P}(X); \xi S]$ и $[\mathfrak{P}(X); \eta S]$ являются, вообще говоря, различными, поскольку получены различными процедурами.

Как известно, каждое многозначное отображение $f: X \to Y$ порождает однозначное отображение $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$, определяемое правилом: $(A) \to (f(A))$, если $(A) \in \mathfrak{P}(X)$, и называемое гиперпродолжением отображения f.

Определение 4. Многозначное отображение $f: [X, S] \to [Y; \gamma]$ будем называть $\langle \xi S; \xi\gamma \rangle$-непрерывным, если однозначное отображение $\hat{f}|X$ является $(S; \xi\gamma)$-непрерывным.

Предложение 17. *Если многозначное отображение $f: [X, S] \to [Y; \gamma]$ является $(\xi S; \xi\gamma)$-непрерывным, то оно и $\langle \xi S; \xi\gamma \rangle$-непрерывно.*

В самом деле, $\hat{f}|X = \hat{f} \circ i_X$, а оба отображения, составляющие композицию, непрерывны.

Предложение 18. *Для того, чтобы из $\langle \xi S; \xi\gamma\rangle$-непрерывности многозначного отображения $f:[X; S]\to[Y; \gamma]$ вытекала его $(\xi S; \xi\gamma)$ -непрерывноть, достаточно выполнения следующего условия: каждому полутопогенному порядку $<\in S$ соответствует такой полутопогенный порядок $<_1\in S$, что из каждого соотношения $\mathfrak{A}\xi<\mathfrak{B}$ следует соотношение*

$$\overset{-1}{\bar{f}}(\mathfrak{A})\cup\mathfrak{A}_1\xi<_1\overset{-1}{f}(\mathfrak{B})\cup\mathfrak{B}_1;$$

здесь обозначено $\bar{f}=\hat{f}|X$,

$$\mathfrak{A}_1=\{t\colon t\in\mathfrak{P}(X)\&\neg(\exists z)(z\in X\&t=\{z\})\&(f(t))\in\mathfrak{A}\},$$

$$\mathfrak{B}_1=\{t\colon t\in\mathfrak{P}(X)\&\neg(\exists z)(z\in X\&t=\{z\})\&(f(t)\in\mathfrak{B}\}.$$

Непустота класса отображений, удовлетворяющих предложению 18, устанавливается предложениями 19—21, идея доказательства которых принадлежит Р. С. Линичуку. (см. [4]).

Предложение 19. *Пусть $[Y; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, а $f\colon X\to Y$ многозначное отображение. Если отображение $\bar{f}$ является $(\{<\}; \{<_{1\varkappa}\}^{qp})$-непрерывным, то отображение $\hat{f}$ — $(\{<_\varkappa\}^{qp}; \{<_{1\varkappa}\}^{qp})$-непрерывно.*

Доказательство. Поскольку все фигурирующие здесь структуры состоят из единственных совершенных топогенных порядков, то никакого выбора этих порядков устанавливать не придётся. Далее, используя совершенность порядков, можно дело свести к рассмотрению лишь локального случая.

Пусть (A_0) — произвольная точка класса $\mathfrak{P}(X)$, а V — любая (в принципе, выбранная и зафиксированная) окрестность точки $\hat{f}(A_0)$. По условию, найдётся такая часть B класса X, что $A_0<B$ и $B\subset\overset{-1}{\bar{f}}(V)$. Класс $U=\{(W):W\subset B\}$ является такой окрестностью точки (A_0), что $U\subset\overset{-1}{\hat{f}}(V)$.

Предложение 20. *Пусть $[X; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, $f\colon X\to Y$ — многозначное отображение. Если отображение $\bar{f}$ является $(\{<\}, \{<_{1\lambda}\}^q)$ -непрерывным, то отображение $\hat{f}$ — $(\{<\}^q, \{<_{1\lambda}\}^q)$-непрерывно.*

Предложение 21. *Пусть $[X; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, $f\colon X\to Y$ — многозначное отображение. Если отображение f является $(\{<\}, \{<_{1\psi}\}^{qp})$-непрерывным, то отображение $\hat{f}$ — $(\{<_\psi\}^{qp}, \{<_{1\psi}\}^{qp})$-непрерывно.*

Предложение 22.1. *Если однозначное отображение $f\colon[X; S]\to[Y; \gamma]$ $(S; \gamma)$-непрерывно, то отображение $\hat{f}$ является $(S_\varkappa; \gamma_\varkappa)$-непрерывным.*

Доказательство. Полутопогенный порядок $<_\varkappa\in\gamma_\varkappa$ определяется заданием полутопогенного порядка $<\in\gamma$, для которого, в силу $(S; \gamma)$-непрерывности отображения f, можно подобрать полутопогенный порядок $<_1\in S$, мажорирующий полутопогенный порядок $\overset{-1}{f}(<)$. Остаётся показать, что полутопогенный порядок $<_{1\varkappa}$ мажорирует полутопогенный порядок $\overset{-1}{\hat{f}}(<_\varkappa)$.

Если $\mathfrak{A}_1 \overset{-1}{\hat{f}}(<_\varkappa)\mathfrak{B}_1$, то существуют такие части $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{P}(Y)$, что $\mathfrak{A} <_\varkappa \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1 \subset \overset{-1}{\hat{f}}(\mathfrak{A})$, $\overset{-1}{\hat{f}}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_1$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_\varkappa$, найдутся такие части U и V класса Y, что: $U<V$, $\mathfrak{A} \subset \subset \{(W): W \subset U\}$, $\{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$. Положив $U_1 = \overset{-1}{f}(U)$, $V_1 = \overset{-1}{f}(V)$, найдём $U_1 <_1 V_1$; поэтому $\mathfrak{A}_2 <_{1\varkappa} \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{A}_2 = \{(W): W \subset U_1\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(W): W \subset V_1\}$. Покажем, что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$; вместе с этим будет доказано, что $\mathfrak{A}_1 <_{1\varkappa} \mathfrak{B}_1$.

Если $t \in \mathfrak{A}_1$, то $t \in \overset{-1}{\hat{f}}(\mathfrak{A})$, а потому $\hat{f}(t) \in \mathfrak{A}$ и $\hat{f}(t) \subset U$; отсюда $\overset{-1}{f}(\hat{f}(t)) \subset U_1$. Поскольку $t \subset \overset{-1}{f}(\hat{f}(t))$, то $t \in U_1$ и $t \in \mathfrak{A}_2$.

Если $t \in \mathfrak{B}_2$, то $t \subset V_1$, а потому $t \subset \overset{-1}{f}(V)$ и $f(t) \subset f(\overset{-1}{f}(V))$; поскольку $f(\overset{-1}{f}(V)) \subset V$, то $f(t) \subset V$. В таком случае имеем $f(t) \in \mathfrak{B}$; затем: $\overset{-1}{\hat{f}}(f(t)) \in \in \overset{-1}{\hat{f}}(\mathfrak{B})$. Отсюда $\overset{-1}{\hat{f}}(f(t)) \in \mathfrak{B}_1$ и $t \in \mathfrak{B}_1$.

Предложение 22.2. *Если однозначное отображение* $f: [X; S] \to [Y; \gamma]$ (S, γ)-*непрерывно, то отображение* $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ *является* $(S_\lambda, \gamma_\lambda)$-*непрерывным.*

Предложение 22.3. *Если однозначное отображение* $f: [X; S] \to [Y; \gamma]$ (S, γ)-*непрерывно, то отображение* $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ *является* $(S_\psi; \gamma_\psi)$-*непрерывным.*

Предложение 23. *Пусть* $f: X \to Y$ — *некоторое многозначное отображение, являющееся* $\langle \xi S_i; \xi\gamma_i \rangle$-*непрерывным,* $i=1, 2$. *Если положить* $S = S_1 \vee S_2$ и $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, *то* f *окажется* $\langle \xi S; \xi\gamma \rangle$-*непрерывным.*

Замечание. Напомним, что полусинтопогенная структура $S_1 \vee S_2$ получается путём всевозможных конечных объединений полутопогенных порядков из обеих этих структур.

Литература

[1] В. В. Маслов, Полусинтопогенные пространства, Уч. цзаписки МГПИ им. В. И. Ленина, No 277, М., 1970.

[2] A. Császár, Grundlagen der Allgemeinen Topologie. Akadémiai Kiadó *Budapest* 1963.

[3] E. Michael, Topologies on Spaces of Subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951) 152—182.

[4] Р. С. Линичук, Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств. — *Десятая матем. школа,* К., Изд-во ин-та матем-ки *АН УССР*, 1974, с. 308—329.

(Поступило 15. 2. 1981.)