Инварианты пар полупростых групповых алгебр конечных абелевых p-групп

Т. Ж. МОЛЛОВ (Пловдив)

Пусть G и G_1 — конечные абелевы p-группы, H и H_1 — соответственно их подгруппы, K — поле, характеристика которого не равна p и KG (KG_1) — групповая алгебра группы G (G_1) над полем K. Говорят, что пары групповых алгебр (KG, KH) и (KG_1, KH_1) K-изоморфны, если существует K-изоморфизм алгебры KG на алгебру KG_1, ограничение которого на KH является изоморфизмом на KH_1. В статье найдены необходимые и достаточные условия для K-изоморфизма пар (KG, KH) и (KG_1, KH_1), т. е. поланя система инвариантов пары (KG, KH).

Пусть $\mathscr{A}$ — категория, объекты которой являются упорядоченными парами (G, H) таких конечных абелевых p-групп, что существует вложение μ группы H в G. Пары (G, H) будем обозначать через $H \xrightarrow{\mu} G$. Морфизмы категории $\mathscr{A}$ будут пары вида (φ_G, φ_H), где φ_G и φ_H — такие гомоморфизмы соответственно группы G в группу G_1 и группы H в группу H_1, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi_H"'] & G \arrow[d, "\varphi_G"] \\ H \arrow[r, "\mu_1"] & G_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна ($H_1 \xrightarrow{\mu_1} G_1$ — объект категории $\mathscr{A}$). Пусть K — поле, характеристика которого не равна p. Аналогично образуем категорию $\mathscr{A}_K$, объекты которой являются такие пары групповых алгебр (KG, KH), что существует вложение μ^* алгебры KH в KG (обозначенные через $KH \xrightarrow{\mu^*} KG$), а морфизмы категории $\mathscr{A}_K$ являются парами $(\varphi_{KG}, \varphi_{KH})$, где φ_{KG} и φ_{KH} — такие гомоморфизмы соответственно алгебры KG в KG_1 и алгебры KH в KH_1, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} KH \arrow[r] \arrow[d] & KG \arrow[d] \\ KH_1 \arrow[r] & KG_1 \end{tikzcd}$$

коммутативна, где $KH_1 \xrightarrow{\mu_1^*} KG_1$ — объект категории $\mathscr{A}$. В частности, если гомоморфизмы φ_{KG} и φ_{KH} являются изоморфизмами, то морфизм $(\varphi_{KG}, \varphi_{KH})$

есть K-изоморфизм пары (KG, KH) на пару (KG_1, KH_1). В статье рассматриваются условия, при которых объекты категории $\mathscr{A}$ определяются с точностью до изоморфизма, т. е. дается полная система инвариантов объектов категории $\mathscr{A}_K$ в терминах категории $\mathscr{A}$ и поля K.

Поле K называется *полет первого рода относительно простого числа* p ([7], стр. 684), если степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots):K)=\infty$, где ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы в алгебраическом замыкании $\overline{K}$ поля K, $i\in N_0=\{0, 1, 2, \dots\}$. В противном случае K называется *полем второго рода относительно* p.

В [6] найдена полная система инвариантов пары (KG, KH) алгебр, когда а) G— периодическая абелева группа (H — ее подгруппа) и K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G и в) G — абелева p-группа и K — поле второго рода относительно p, причем при $p=2$ имеет место $K=K(\varepsilon_2)$. Отметим, что полная система инвариантов полупростой групповой алгебры счетной абелевой p-группы G получена С. Д. Берманом [1]. Когда G — любая абелева группа, а K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов периодической части группы G, то полная система инвариантов алгебры KG получена W. May [3]. В [2] получена полная система инвариантов алгебры KG в следующих двух случаях: 1) K — поле второго рода относительно p, а G — произвольная абелева группа, периодическая часть которой является p-группой; 2) K — поле первого рода относительно p, а G — такая абелева p-группа, что фактор-группа G/G^1 группы G по ее подгруппе G^1 элементов бесконечной высоты разлагается в проямое произведение циклических групп.

Существенную роль в статье имеет понятие характер абелевой группы G. Чтобы определить это понятие, обозначим через $\overline{K}^*$ мультипликативную группу алгебраического замыкания $\overline{K}$ поля K и через E — подгруппу группы $\overline{K}^*$, порожденную корнями n-ой степени из единицы, где n пробегает множество натуральных чисел. Тогда каждый элемент χ группы $\operatorname{Hom}(G, E)$ называется характером группы G. Если H — подгруппа группы G, то существует точная последовательность $1\to H\to G\xrightarrow{\eta} G|H\to 1$, где η — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группы $G|H$. Эта точная последовательность индуцирует следующую точную последовательность

$$1\longrightarrow \operatorname{Hom}(G|H, E)\xrightarrow{\lambda}\operatorname{Hom}(G, E)\xrightarrow{\alpha}\operatorname{Hom}(H, E), \tag{1}$$

где λ, для каждого $\chi\in\operatorname{Hom}(G|H, E)$ и для любого $g\in G$, определяется формулой

$$(\lambda(\chi))(g) = \chi(gH), \tag{2}$$

а α, для каждого $\chi\in\operatorname{Hom}(G, E)$ и для любого $h\in H$ — формулой

$$(\alpha(\chi))(h) = \chi(h). \tag{3}$$

Если K — поле первого рода относительно простого числа p, то множество $s_p(K)=\{i\in N_0|K(\varepsilon_i)\neq K(\varepsilon_{i+1})\}$ называется спектром поля K относительно p [4]. Если $i\in s_p(K)$, то через i' обозначается максимальное число спектра $s_p(K)$, если оно вообще существует, которое меньше i.

Обозначим через $K(\chi)$ поле, полученное в результате присоединения к полю K всех значений характера χ группы G. Поле $K(\chi)$ будем называть полем характера χ. Пусть E_i — циклическая подгруппа группы E порядка p^i, где $i \in N_0$. Легко заметить, что если K — поле первого рода относительно простого числа p, $\chi \in \mathrm{Hom}(G, E)$ и $i \in s_p(K)$, то $K(\chi) \subseteqq K(\varepsilon_i)$ тогда и только тогда, когда $\chi \in \mathrm{Hom}(G, E_i)$.

В следующих определениях и утверждениях K является полем первого рода относительно p.

Пусть G — конечная абелева p-группа, H — ее подгруппа и u — минимальный идемпотент алгебры KH. Тогда существует такое однозначно определенное число $i \in s_p(K)$, что $KHu \cong K(\varepsilon_i)$. Число i называется *характеристическим числом идемпотента* u. Пусть N_j — множество всех минимальных идемпотентов алгебры KH, $j \in s_p(K)$, характеристические числа которых равны j. Обозначим через N_{ji} множество всех идемпотентов из N_j, для которых i — минимальное характеристическое число слагаемых их разложения в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG. Очевидно $i \geqq j$ и N_j — раздельное объединение множеств N_{ji} при переменном $i \in s_p(K)$, т. е.

$$N_j = \dot{\bigcup_{\substack{i \in S_p(K) \\ i \geqq j}}} N_{ji}. \tag{4}$$

Пусть M_{ji} — множество всех характеров группы H, которым соответствуют идемпотенты множества N_{ji}. Так как каждому идемпотенту множества N_{ji} соответствует точно $(K(\varepsilon_j):K)$ K-сопряженных характеров группы H, то между мощностях $|N_{ji}|$ и $|M_{ji}|$ множеств N_{ji} и M_{ji} существует связь $|M_{ji}| = |N_{ji}|\,(K(\varepsilon_j):K)$.

Пусть G — абелева p-группа и H — ее подгруппа. Тогда для любых чисел i и j спектра $s_p(K)$ существует вложение

$$\beta_j\colon \mathrm{Hom}(H, E_j) \to \mathrm{Hom}(H, E) \tag{5}$$

и гомоморфизм

$$\alpha_i\colon \mathrm{Hom}(G, E_i) \to \mathrm{Hom}(H, E), \tag{6}$$

где α_i определяется формулой типа (3) при помощи последовательности типа (1).

Лемма 1. *Пусть $j, i \in s_p(K)$, $j \leqq i$ и i' (j'), если вообще существует, есть максимальное число спектра $s_p(K)$, которое меньше i (j). Тогда*

$$M_{ji} = (\mathrm{Im}\,\alpha_i \setminus \mathrm{Im}\,\alpha_{i'}) \cap (\mathrm{Im}\,\beta_j \setminus \mathrm{Im}\,\beta_{j'}), \tag{7}$$

где $\mathrm{Im}\,\alpha_{i'}$ и $\mathrm{Im}\,\beta_{j'}$ участвуют в (7), если соответственно i' и j' существуют (α_i и β_j определены при помощи формул (6) и (5)).

Доказательство. Пусть χ принадлежит правой части равенства (7). Так как $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j$, то $K(\chi) \subseteqq K(\varepsilon_j)$. Из $\chi \notin \mathrm{Im}\,\beta_{j'}$ вытекает, что $K(\chi) \subseteqq\!\!\!\!/\; K(\varepsilon_{j'})$. Итак $K(\chi) = K(\varepsilon_j)$. Следовательно, характеру χ соответствует минимальный идемпотент u алгебры KH с характеристическим числом j. Пусть e — минимальный идемпотент алгебры KG, участвующий в разложение идемпотента u в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG, т. е. $u = e + \ldots$ и характеристическое число идемпотента e минимально. Пусть φ — характер группы G, которому соответствует идемпотент e. Если через $\varphi/_H$ обозначим ограничение характера φ на группе H, то очевидно следующие утверждения эквивалентны: (а) $\chi\in\operatorname{Im}\alpha_i$ и $\varphi/_H=\chi$; (в) $\varphi\in\operatorname{Hom}(G, E_i)$ и $\alpha_i(\varphi)=\chi$; (с) $K(\varphi)\subseteqq K(\varepsilon_i)$ и $\alpha_i(\varphi)=\chi$. Так как имеет место (а), то $K(\varphi)\subseteqq K(\varepsilon_i)$. Из $\chi\notin\operatorname{Im}\alpha_i$ вытекает, ввиду эквивалентности (а) и (с), что $K(\varphi)\subsetneqq K(\varepsilon_{i'})$. Это означает, что $K(\varphi)=K(\varepsilon_i)$, т. е. характеристическое число идемпотента e равняется i. Следовательно, $\chi\in M_{ji}$. Таким образом, правая часть равенства (7) содержится в M_{ji}.

Пусть, обратно, $\chi\in M_{ji}$. Тогда идемпотент u, соответствующий характеру χ, имеет характеристическое число j, т. е. $KHu\cong K(\varepsilon_j)$. Следовательно, $K(\chi)=K(\varepsilon_j)$, т. е. $K(\chi)\subseteqq K(\varepsilon_j)$ и $K(\chi)\subsetneqq K(\varepsilon_{j'})$, откуда вытекает $\chi\in\operatorname{Im}\beta_j\setminus\operatorname{Im}\beta_{j'}$. Пусть e — идемпотент алгебры KG с характеристическим числом i, участвующий в разложение идемпотента u в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG и e соответствует характеру φ группы G. Тогда $\varphi\in\operatorname{Hom}(G, E_i)$. Отсюда и из $\varphi|_H=\chi$ следует, что $\alpha_i(\varphi)=\chi$, т. е. $\chi\in\operatorname{Im}\alpha_i$. Допустим, что $\chi\in\operatorname{Im}\alpha_{i'}$, т. е. что существует характер $\varphi'\in\operatorname{Hom}(G, E_{i'})$ со свойством $\varphi'|_H=\chi$. Тогда характеру φ' соответствует идемпотент e', участвующий в разложении идемпотента u и имеющий характеристическое число, не превышающее i'. Это противоречит определению множества M_{ji}. Следовательно, $\chi\in\operatorname{Im}\alpha_i\setminus\operatorname{Im}\alpha_{i'}$. Таким образом справедлива формула (7).

Лемма 2. *Пусть* $j, i\in s_p(K)$ *и* $j\leqq i$. *Тогда*

$$\operatorname{Im}\alpha_i=\{\chi\in\operatorname{Hom}(H, E)/\operatorname{Ker}\chi\supseteqq H\cap G^{p^i}\},\tag{8}$$

$$\operatorname{Im}\beta_j=\{\chi\in\operatorname{Hom}(H, E)/K(\chi)\subseteqq K(\varepsilon_j)\}\tag{9}$$

$$\operatorname{Im}\alpha_i\cap\operatorname{Im}\beta_j=\{\chi\in\operatorname{Hom}(H, E)/K(\chi)\subseteqq K(\varepsilon_j)\text{ и }\operatorname{Ker}\chi\supseteqq H\cap G^{p^i}\}.\tag{10}$$

Доказательство. Формула (9) очевидна, если мы исходим из определения (5) гомоморфизма β_j.

Докажем формулу (8). Пусть $\chi\in\operatorname{Hom}(H, E)$ и $\operatorname{Ker}\chi\supseteqq H\cap G^{p^i}$. Определим характер $\psi\in\operatorname{Hom}(HG^{p^i}, E_i)$, полагая $\psi(hg^{p^i})=\chi(h)$ для каждого $h\in H$ и для каждого $g\in G$. Корректность отображения ψ непосредственно вытекает из условия $\operatorname{Ker}\psi\supseteqq H\cap G^{p^i}$. Так как для каждого $h\in H$ имеет место $\chi(h)\in E_i$, то $\psi\in\operatorname{Hom}(HG^{p^i}, E_i)$. Имеет место следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Hom}(G/G^{p^i}, E_i) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[drr, phantom, "A"] & & \operatorname{Hom}(HG^{p^i}/G^{p^i}, E_i) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
 & \operatorname{Hom}(G, E_i) \arrow[rr, "\delta"] & & \operatorname{Hom}(HG^{p^i}, E_i) \arrow[d, "\lambda"] & \\
 & & & \operatorname{Hom}(G^{p^i}, E_i) &
\end{tikzcd}$$

где квадрат А коммутативен и все горизонтальные и вертикальные строки точны. Отображение $\lambda(\psi)$ единично, т. е. $\psi\in\operatorname{Ker}\lambda=\operatorname{Im}\gamma$, так как для любого

$g \in G$ имеет место $(\lambda(\psi))(g^{p^i}) = \psi(g^{p^i}) = \psi^{p^i}(g) = 1$. Следовательно, существует $\bar{\psi} \in \mathrm{Hom}(HG^{p^i}/G^{p^i}, E_i)$, так что $\gamma(\bar{\psi}) = \psi$. Так как α — эпиморфизм, то существует такой гомоморфизм $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(G/G^{p^i}, E_i)$, что $\alpha(\bar{\varphi}) = \bar{\psi}$. Тогда $\beta(\bar{\varphi}) = \varphi \in \mathrm{Hom}(G, E_i)$ и φ — продолжение характера ψ, т. е. $\delta(\varphi) = \psi$, ибо из коммутативности квадрата A следует $\delta(\varphi) = \delta(\beta(\bar{\varphi})) = \gamma(\alpha(\bar{\varphi})) = \gamma(\bar{\psi}) = \psi$. Ввиду того, что ψ — продолжение характера χ, а φ — продолжение характера ψ, то φ — продолжение характера χ, т. е. $\alpha_i(\varphi) = \chi$ или $\chi \in \mathrm{Im}\,\alpha_i$. Пусть, обратно, $\chi \in \mathrm{Im}\,\alpha_i$, т. е. существует такой характер $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, E_i)$, что $\alpha_i(\varphi) = \chi$. Следовательно, $\varphi|_H = \chi$. Тогда $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, ибо из $h = g^{p^i}$, $h \in H$, и $g \in G$, вытекает $\chi(h) = \varphi(g^{p^i}) = (\varphi(g))^{p^i} \in E_i^{p^i} = 1$, т. е. $\chi(h) = 1$. Таким образом имеет место (8).

Из (8) и (9) непосредственно следует (10).

Следствие 3. *Для любых* $j, i \in s_p(K)$, $j \leqq i$, *имеет место формула* $\mathrm{Im}\,\alpha_i \cap \mathrm{Im}\,\beta_j \cong \mathrm{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательности

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Hom}(H, E_j) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \beta_j} \\ & & & & \mathrm{Hom}(H, E) \end{array}$$

где строка и столбец точны. Поскольку композиция $\beta_j\lambda$ есть вложение, то достаточно доказать, что $\mathrm{Im}\,\beta_j\lambda = \mathrm{Im}\,\alpha_i \cap \mathrm{Im}\,\beta_j$, откуда вытекает утверждение леммы. Действительно, пусть $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j\lambda$. Тогда $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j$. Докажем, что $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, откуда, ввиду (8), получится $\chi \in \mathrm{Im}\,\alpha_i$. Действительно, пусть $h = g^{p^i}$, где $h \in H$ и $g \in G$. Из $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j\lambda$ следует, что существует такой характер $\chi_1 \in \mathrm{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$, что $\chi = (\beta_j\lambda)(\chi_1)$. Тогда

$$\chi(h) = ((\beta_j\lambda)(\chi_1)(g^{p^i})) = \beta_j(\chi_1(g^{p^i}(H \cap G^{p^i})) = \beta_j(\chi_1(H \cap G^{p^i})) = \beta_j(1) = 1,$$

т. е. $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq H \cap G^{p^i}$, где второе равенство следует из формулы типа (2). Таким образом доказано, что $\mathrm{Im}\,\beta_j\lambda \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha_i \cap \mathrm{Im}\,\beta_j$.

Обратно, докажем, что $\mathrm{Im}\,\alpha_i \cap \mathrm{Im}\,\beta_j \subseteq \mathrm{Im}\,\beta_j\lambda$. Пусть $\chi \in \mathrm{Im}\,\alpha_i \cap \mathrm{Im}\,\beta_j$. Так как $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j$, то существует такой гомоморфизм $\chi_2 \in \mathrm{Hom}(H, E_j)$, что $\beta_j(\chi_2) = \chi$. Из $\chi \in \mathrm{Im}\,\alpha_i$, ввиду (8), получится $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq H \cap G^{p^i}$. Следовательно, существует такой характер $\chi_1 \in \mathrm{Hom}(H/H \cap G^{p^i}, E_j)$, что $\lambda(\chi_1) = \chi_2$. Таким образом, $\chi \in \mathrm{Im}\,\beta_j\lambda$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если G — конечная абелева p-группа, то для каждого натурального i имеет место* $\mathrm{Hom}(G, E_i) \cong \mathrm{Hom}(G/G^{p^i}, E_i)$.

Доказательство. В точной последовательности

$$1 \to \mathrm{Hom}(G/G^{p^i}, E_i) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(G, E_i) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(G^{p^i}, E_i),$$

где α и β определены формулами типа (2) и (3), гомомофризм β единичен, ибо если $\chi\in\mathrm{Hom}\,(G, E_i)$, то для каждого $g\in G$ имеет место $(\beta(\chi))(g^{p^i})=\chi(g^{p^i})=$ $=\chi^{p^i}(g)\in E_i^{p^i}=1$, т. е. $\beta(\chi)=1$. Следовательно, α — изоморфизм.

Лемма 5. *Если* $j, i\in s_p(K)$ *и* $j\leqq i$, *то* $|\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap\mathrm{Im}\,\beta_j|=(H\colon H^{p^j}(H\cap G^{p^i}))$.

Доказательство. Применяя последовательно следствие 3, лемму 4 и теорему 13.2.1. ([8], стр. 218), получится

$$\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap\mathrm{Im}\,\beta_j\cong\mathrm{Hom}\,(H/H\cap G^{p^i}, E_j)\cong\mathrm{Hom}\,((H/H\cap G^{p^i})/(H/H\cap G^{p^i})^{p^j}, E_j)\cong$$
$$\cong(H/H\cap G^{p^i})/(H/H\cap G^{p^i})^{p^j}\cong H/H^{p^j}(H\cap G^{p^i}),$$

откуда ледует утверждение.

Лемма 6. *Имеет место формула*

$$(11)\qquad |M_{ji}|=(H\colon H^{p^j}(H\cap G^{p^i}))+(H\colon H^{p^{j'}}(H\cap G^{p^{i'}}))-$$
$$-(H\colon H^{p^{j'}}(H\cap G^{p^i}))-(H\colon H^{p^j}(H\cap G^{p^{i'}})),$$

где i' *и* j' *определены как в лемме 2, причем второй, третий и четвертый индексы в* (11) *существуют, если соответственно существуют пара* (j', i'), j' *и* i'.

Доказательство. Из формулы (7) вытекает

$$M_{ji}=(\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap(\mathrm{Im}\,\beta_j\setminus\mathrm{Im}\,\beta_{j'}))\setminus(\mathrm{Im}\,\alpha_{i'}\cap(\mathrm{Im}\,\beta_j\setminus\mathrm{Im}\,\beta_{j'})).$$

Тогда

$$|M_{ji}|=|\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap(\mathrm{Im}\,\beta_j\setminus\mathrm{Im}\,\beta_{j'})|-|\mathrm{Im}\,\alpha_{i'}\cap(\mathrm{Im}\,\beta_j\setminus\mathrm{Im}\,\beta_{j'})|=$$
$$=|\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap\mathrm{Im}\,\beta_j|-|\mathrm{Im}\,\alpha_i\cap\mathrm{Im}\,\beta_{j'}|-|\mathrm{Im}\,\alpha_{i'}\cap\mathrm{Im}\,\beta_j|+|\mathrm{Im}\,\alpha_{i'}\cap\mathrm{Im}\,\beta_{j'}|$$

и из леммы 5 следует (11).

Лемма 7. *Если* G — *конечная абелева p-группа,* H — *ее подгруппа,* $\chi\in$ $\in\mathrm{Hom}\,(H, E_i)$ *и* χ *имеет по крайней мере одно продолжение в* $\mathrm{Hom}\,(G, E_i)$, *то число продолжений характера* χ *в* $\mathrm{Hom}\,(G, E_i)$ *равняется индексу* $(G\colon HG^{p^i})$.

Доказательство. Последовательность

$$1\longrightarrow\mathrm{Hom}\,(G/H, E_i)\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Hom}\,(G, E_i)\xrightarrow{\beta}\mathrm{Hom}\,(H, E_i)$$

точна. Согласно условию существует такой характер $\varphi\in\mathrm{Hom}\,(G, E_i)$, что $\beta(\varphi)=\chi$. Тогда множество M продолжений характера χ в $\mathrm{Hom}\,(G, E_i)$ совпадает со смежным классом $\varphi\,\mathrm{Ker}\,\beta=\varphi\,\mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, $|M|=|\mathrm{Im}\,\alpha|=$ $=|\mathrm{Hom}\,(G|H, E_i)|$. Однако

$$\mathrm{Hom}(G/H, E_i)\cong\mathrm{Hom}\,((G/H)/(G/H)^{p^i}, E_i)\cong(G/H)/(G/H)^{p^i}\cong G/HG^{p^i},$$

где первый изоморфизм вытекает из леммы 4. Следовательно, $|M|=(G\colon HG^{p^i})$. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть* G *и* G_1 — *конечные абелевы p-группы,* H *и* H_1 — *подгруппы соответственно групп* G *и* G_1 *и* K — *поле первого рода относительно* p. *Имеет место* K*-изоморфизм* $(KG, KH)\cong(KG_1, KH_1)$ *пар алгебр* *тогда и только тогда, когда для любого* $i \in s_p(K)$ *выполнено*

$$|G| = |G_1|,\ |G^{p^i}| = |G_1^{p^i}|,\ \ |H| = |H_1| \tag{12}$$

и для любых чисел i *и* j *спектра* $s_p(K)$, *для которых* $j \leqq i$, *имеет место*

$$|H^{p^i} \cap G^{p^j}| = |H_1^{p^j} \cap G_1^{p^i}|,\ \ |H \cap G^{p^i}| = |H_1 \cap G_1^{p^i}|. \tag{13}$$

Доказательство. Аналогично множествам N_j, N_{ji} и M_{ji}, соответствующим алгебре KH, определяются множества N_j, N'_{ji} и M'_{ji}, соответствующие алгебре KH_1.

Пусть имеет место K-изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG_1, KH_1)$. Так как $KH \cong \cong KH_1$ и $KG \cong KG_1$, то из [4] следует (12). Докажем, что $|M_{ji}|$ — инвариант пары (KG, KH), откуда получатся формулы (13). Имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
KH \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & KH_1 \arrow[d] \\
KG \arrow[r, "\tau"] & KG_1,
\end{tikzcd}$$

где θ и τ — изоморфизмы. Докажем, что если $j, i \in s_p(K)$, $j \leqq i$, то $|N_{ji}| = |N'_{ji}|$, откуда следует $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. С этой целью установим, что $u \in N_{ji}$ тогда и только тогда, когда $\theta(u) \in N'_{ji}$. Действительно, пусть $u \in N_{ji}$ и $u = e + e_1 + \ldots + e_s$ является разложением идемпотента u в сумме минимальных идемпотентов алгебры KG, где характеристическое число идемпотента e равняется i. Тогда $\theta(u) = \tau(e) + \tau(e_1) + \ldots + \tau(e_s)$. Так как при K-изоморфизме характеристические числа идемпотентов сохраняются, то $\theta(u)$ и $\tau(e)$ имеют характеристические числа соответственно j и i. Если некоторый из идемпотентов $\tau(e_r)$ в правой части последнего равенства имеет характеристическое число, которое меньше i, то, изпользуя обратный изоморфизм τ^{-1}, получится, что e_r в высшеуказанном разложении идемпотента u имеет характеристическое число, которое меньше i, что противоречит факту $u \in N_{ji}$. Следовательно, $\theta(u) \in N'_{ji}$. Обратное утверждение вытекает, используя изоморфизм τ^{-1}. Из этого следует $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. С помощью формулы (11), докажем, что если $j, i \in s_p(K)$ и $j \leqq i$, то индекс $(H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ является инвариантом пары (KG, KH). С этой целью множество $\mathscr{D}$ всех пар (j, i), где $j, i \in s_p(K)$ и $j \leqq i$, упорядочим лексикографически следующим образом: будем считать что $(j, i) < (j_1, i_1)$, где $(j_1, i_1) \in \mathscr{D}$, тогда и только тогда, когда $j < j_1$ или $j = j_1$ и $i < i_1$. Докажем что $(H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ есть инвариант путем индукции в упорядоченном множестве $\mathscr{D}$. Для пары (j_0, j_0), где j_0 — минимальное число спектра $s_p(K)$ утверждение следует из формулы (11), имея ввиду, что $|M_{ji}| = |M'_{ji}|$. Допустим, что утверждение верно для всех пар, которые меньше пары (j, i). Тогда правая часть (11) равняется выражению $(H_1 : H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^i})) + (H_1 : H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}})) - (H_1 : H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap \cap G_1^{p^i})) - (H_1 : H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}}))$. Так как пары (j', i'), (j', i) и (j, i') меньше (j, i), то, ввиду индуктивного предположения, имеет место $(H : H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^{i'}})) = (H_1 : H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^{i'}}))$, $(H : H^{p^{j'}}(H \cap G^{p^i})) = (H_1 : H_1^{p^{j'}}(H_1 \cap G_1^{p^i}))$ и $(H : H^{p^j}(H \cap G^{p^{i'}})) = (H_1 : H_1^{p^j}(H \cap G_1^{p^{i'}}))$. Следовательно, $(H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i})) = = H_1 : H_1^{p^j}(H_1 \cap G_1^{p^i}))$ т. е., индекс $(H : H^{p^j}(H \cap G^{p^i}))$ — инвариант пары $(KG,$

KH). Очевидно

$$(H: H^{p^j}(H\cap G^{p^i})) = \frac{|H||H^{p^j}\cap G^{p^i}|}{|H^{p^j}||H\cap G^{p^i}|}. \tag{14}$$

Левая часть равенства (14), ввиду доказанного, а также $|H|$ и $|H^{p^j}|$ (см. [4]), являются инвариантами пары (KG, KH). Тогда из равенства (14) при $j=i$ получится, что $|H\cap G^{p^i}|$ — инвариант пары (KG, KH), т. е. имеет место вторая формула (13). Тогда из (14) следует, что $|H^{p^j}\cap G^{p^i}|$ — инвариант пары (KG, KH), т. е. имеет место первая формула (13).

Пусть, обратно, имеют место условия (12) и (13). Из первой формулы (13), при $j=i\in s_p(K)$, получится $|H^{p^i}|=|H_1^{p^i}|$. Отсюда, используя (12) и (13), вытекает $|M_{ji}|=|M'_{ji}|$, откуда $|N_{ji}|=|N'_{ji}|$. Следовательно, существует биективное отображение $\theta_{ji}: N_{ji}\to N'_{ji}$. Так как для N_j и аналогично для N'_j имеют место формулы вида (4), то при помощи отображений θ_{ji} определяется биективное отображение $\theta_j: N_j\to N'_j$, $j\in s_p(K)$, которое дает биективное отображение $\theta: \mathrm{id}(KH)\to\mathrm{id}(KH_1)$, сохраняющее характеристические числа идемпотентов, где $\mathrm{id}(KH)$ и $\mathrm{id}(KH_1)$ — множества минимальных идемпотентов соответственно алгебр KH и KH_1. Отсюда вытекает, что θ продолжается до изоморфизма алгебры KH на алгебру KH_1. Докажем, что θ продолжается до изоморфизма $\tau: KG\to KG_1$. Пусть $u\in N_{ji}$ и u соответствует характеру χ группы H. Обозначим через L_{ut} множество всех минимальных идемпотентов алгебры KG, которые входят в разложение идемпотента u и имеют характеристические числа $t\geqq i$. Пусть $L'_{u't}$ есть то же самое множество для идемпотента $\theta(u)=u'$. Докажем, что $|L_{ut}|=|L'_{u't}|$. Обозначим через $S_{ut}\,(S'_{u't})$ множество всех характеров группы $G, (G_1)$, соответствующих идемпотентам множества $L_{ut}\,(L'_{u't})$. Очевидно $S_{ut}\,(S'_{u't})$ — объединение множества K-сопряженных характеров. Так как $|S_{ut}|=|L_{ut}|(K(\varepsilon_t):K)$, то равенство $|L_{ut}|=|L'_{u't})|$ эквивалентно равенству $|S_{ut}|=|S'_{u't}|$. Докажем последнее из указанных равенств. Используем формулу

$$S_{ut} = \{\varphi\in \mathrm{Hom}(G, E_t)\diagdown \mathrm{Hom}(G, E'_t)/\varphi|_H = \chi\}, \tag{15}$$

котороя доказывается из следующих эквивалентных утверждений: (a) $\varphi\in S_{ut}$; (в) $\varphi|_H=\chi$ и $K(\varphi)=K(\varepsilon_t)$; (c) $\varphi\in\mathrm{Hom}(G, E_t)\diagdown\mathrm{Hom}(G, E_{t'})$ и $\varphi|_H=\chi$. Из (15), и из леммы 7, использованной для $i=t$, вытекает, что $S_{ut}=(G: HG^{p^t})-(G: HG^{p^{t'}})$, где второй член не существует, если число t' спектра $s_p(K)$ не существует. Тогда из формул (12) и (13) следует, что $|S_{ut}|=|S'_{u't}|$, т. е. $|L_{ut}|=|L'_{u't}|$ для всех чисел $t\in s_p(K)$, для которых $i\leqq t$ и для всех $u\in N_{ji}$, где $j\leqq i$. Из этих равенств и из формул

$$\mathrm{id}(KG) = \bigcup_{\substack{u\in N_{ij}\\ j,i,t\in s_p(K)\\ j\leqq i\leqq t}} L_{ut}, \quad \mathrm{id}(KG_1) = \bigcup_{\substack{u'\in N'_{ji}\\ j,i,t\in s_p(K)\\ j\leqq i\leqq t}} L'_{u't}$$

для множеств $\mathrm{id}(KG)$ и $\mathrm{id}(KG_1)$ идемпотентов алгебр KG и KG_1 вытекает, что существует биективное отображение $\tau_{ut}: L_{ut}\to L'_{u't}$, которое дает биективное отображение $\tau: \mathrm{id}(KG)\to\mathrm{id}(KG_1)$, сохраняющее характеристические числа идемпотентов. Тогда отображение τ продолжается до K-изоморфизма $\tau: KG\to KG_1$. Из построения τ следует, что его ограничение $\tau|_{KH}$ на алгебре KH совпадает с изоморфизмом $\theta: KH\to KH_1$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Если G и G_1 — конечные абелевы p-группы, H и H_1 — соответственно их подгруппы и K — поле второго рода относительно p, то имеет место K-изоморфизм $(KG, KH) \cong (KG_1, KH_1)$ пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$|G|=|G_1|$ *и* $|H|=|H_1|$, *если* (а) $p \neq 2$ *или* (в) $p=2$ *и* $K=K(\varepsilon_2)$; $|G|=|G_1|$, $|H|=|H_1|$, $|G^2|=|G_1^2|$, $|H^2|=|H_1^2|$ *и* $|H \cap G^2|=|H_1 \cap G_1^2|$, *если* $p=2$ *и* $K \neq K(\varepsilon_2)$.

Доказательство является упрощенным вариантом теоремы 8, имея ввиду [4], если для поля K второго рода относительно p введется спектр $s_p(K)=\{i \in N_0/K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{iH})\} \cup \{\infty\}$ и если по определению считать, что $G^{p^\infty}=1$.

Литература

[1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.

[2] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Об изоморфизме полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Доклады БАН* **35** (1982), 869—871.

[3] W. May, Invariants vor kommutative group algebras. Ill. *J. Math.* **15**, (1971), 525—531.

[4] Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН* **35** (1982), 1619—1622.

[5] Т. Ж. Моллов. Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Доклады БАН* **36** (1983), 1013—1014.

[6] Т. Ж. Моллов. Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Publ. Math.* (*Debrecen*) **31** (1984), 145—151.

[7] D. S. Passman. The algebraic structure of group rings. *New York, London, Sidney Toronto*, 1977.

[8] М. Холл. Теория групп. *Москва*, 1962, с. 468.

ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"П. ХИЛЕНДАРСКИ", КАФЕДРА АЛГЕБРЫ
4000 ПЛОВДИВ

(Поступило 4. II. 1983 г.)