Идемпотентные элементы в ассоциативных тройных системах

В. РАМАСВАМИ (ИНБЮ ДЕЛИ)

В этой статье, определим идемпотентный элемент в ассоциативной тройной системе и докажем, что E', множество всех классов эквивалентности, является Булевой алгеброй если T содержит обратимый идемпотент.

Модуль T вместе с трилинейным отображением

$$T\times T\times T \to T$$

$$(x, y, z)\mapsto \langle x, y, z\rangle$$

Называется *тройной системой.*

Тройная система T называется *ассоциативной* если

$$\langle\langle x, y, z\rangle, u, v\rangle = \langle x, \langle y, z, u\rangle, v\rangle = \langle x, y, \langle z, u, v\rangle\rangle. \tag{1}$$

для всех $x, y, z, u, v\in T$.

Элемент ест называется *идемпотентным элементом* если $e^3=\langle e, e, e,\rangle=e$.

Пусть T ассоциативная тройная система Обозначим через E множество всех идемпотентных элементов в T. Определим в E отношение $\sim$ следующим образом. $e\sim f$ тогда и только тогда $\langle e, e, f\rangle=\langle f, e, e\rangle=f$ и $\langle f, f, e\rangle=$ $=\langle e, f, f\rangle=e$. Тогда имеем:

Лемма 1. $\sim$ *отношение эквивалентности в* E.

Доказательство. Так как, для любого элемента $e\in E$, $\langle e, e, e\rangle=e$, то $\sim$ рефлексивно. $\sim$ очевидно симметрично. Пусть теперь $e\sim f\cup f\sim g$. Тогда, по определению, имеем:

$$g = \langle f, f, g\rangle = \langle\langle e, e, f\rangle, f, g\rangle = \langle e, \langle e, f, f, \rangle, g\rangle = \langle e, e, g\rangle$$

и

$$g = \langle g, f, f\rangle = \langle g, \langle e, e, f, \rangle, f\rangle = \langle g, e, \langle e, f, f\rangle\rangle = \langle g, e, e\rangle$$

Точно так же можем доказать, что $e=\langle e, g, g\rangle=\langle g, g, e\rangle$, так что $e\sim g$. Поэтому $\sim$ также транзитивно. Лемма доказана.

Обозначим через E', множество всех классов эквивалентности. Определим в E' отношение $\leqq$ следующим образом: $[f]\leqq[g]$ тогда и только тогда, когда $\langle f, g, g\rangle=\langle g, g, f\rangle=f$.

Предложение 2. *Отношение* $\leqq$ *частичное упроядочение в* E',

Доказательство. Так как $\langle f,f,f\rangle=f$ для всех $f\in E$, то $[f]\leqq[f]$ для всех $[f]\in E'$. Если $[f]\leqq[g]$ и $[g]\leqq[f]$, то $\langle f, g, g\rangle=\langle g, g,f\rangle=f$ и $\langle g,f,f\rangle=\langle f,f, g\rangle=$

$=g$. Поэтому, по определению, $f\sim g$ и это доказывает, что $[f]=[g]$. Пусть теперь $[f]\leqq[g]$ и $[g]\leqq[h]$. Тогда $\langle f, g, g\rangle=\langle g, g, f\rangle=f$ и $\langle g, h, h\rangle=\langle h, h, g\rangle=g$, так что

$$\langle f, h, h\rangle = \langle\langle f, g, g\rangle, h, h\rangle = \langle f, g, \langle h, g, h\rangle\rangle = \langle f, g, g\rangle = f.$$

Подобно, прдедыдушему, $\langle h, h, f\rangle=f$. Поэтому $[f]\leqq[h]$. Предложение доказано.

Сейчас допускаем, что T ассоциативная тройная система, в которой $\langle e, f, f\rangle=\langle f, f, e\rangle$ для всех $e, f\in E$. Если $f, g\in E$, то ясно, что $\langle f, f, g\rangle\in E$ и $f+g-$ $-\langle f, f, g\rangle\in E$.

Лемма 3. $[\langle f, f, g\rangle]=[\langle f, g. g\rangle]$ *и* $[f+g-\langle f, f, g\rangle]=[f+g-\langle f, g, g\rangle]$ *для всех* $f, g\in E$.

Доказательство. Так как $f^3=f$, $g^3=g$, получаем по предлоложению и по (1), что

$$\begin{aligned}\langle\langle f, f, g\rangle, \langle f, f, g\rangle\langle f, g, g\rangle\rangle &= \langle\langle f, f, \langle f, f, g\rangle\rangle, g, \langle g, g, f\rangle\rangle = \\ &= \langle\langle f, f, \langle g, g, f\rangle\rangle = \\ &= \langle f, f, \langle f, g, g,\rangle\rangle = \langle f, g. g\rangle.\end{aligned}$$

По предположению,

$$\begin{aligned}\langle\langle f. f, g\rangle, \langle f, f, g\rangle, \langle f, g, g\rangle\rangle &= \langle\langle f, f, \langle f, f, g\rangle\rangle, g, \langle f, g, g\rangle = \\ &= \langle\langle f, f, \langle f, g, g\rangle\rangle, g, g\rangle = \langle f, g, g\rangle.\end{aligned}$$

Точно так же,

$$\langle\langle f, f, g\rangle, \langle f, g, g\rangle, \langle f, g, g\rangle\rangle = \langle\langle f, g, g\rangle, \langle f, g, g\rangle, \langle f, f, g\rangle\rangle = \langle f, f, g\rangle.$$

Следовательно, $\langle f, f, g\rangle\sim\langle f, g, g\rangle$ и поэтому $[\langle f, f, g\rangle]=[\langle f, g, g\rangle]$. Аналогично можем доказать, что $[f+g-\langle f, f, g\rangle]=[f+g-\langle f, g, g\rangle]$.

Полагаем теперь

$$[f]\wedge[g] = [\langle f, f, g\rangle]$$

и

$$[f]\vee[g] = [f+g-\langle f, f, g\rangle].$$

По лемме 3 имеем $[f]\wedge[g]=[\langle f, g, g\rangle]\cup[f]\vee[g]=[f+g-\langle f, g, g\rangle]$.

Лемма 4. $\wedge$ *и* $\vee$ *вполне определены.*

Доказательство. Допускаем, что $[f]=[f']\cup[g]=[g']$. Мы должны доказать, что $[\langle f, f, g\rangle]=[\langle f', f', g'\rangle]\cup[f+g-\langle f, f, g\rangle]=[f'+g'-\langle f', f', g'\rangle]$. Так как, $[f]=[f']\cup[g]=[g']$, имеем $\langle f, f, f'\rangle=f'$. $\langle f', f', f\rangle=f$. $\langle g, g, g'\rangle=g'$, $\langle g', g', g\rangle g$. Поэтому, пользуясть предположением и (1), получим

$$\begin{aligned}&\langle\langle f, f, g\rangle, \langle f, f, g\rangle, \langle f', f', g'\rangle\rangle = \langle\langle f, f, \langle f, f, g\rangle\rangle, g, \langle f', f', g'\rangle\rangle = \\ &= \langle\langle f, f, \langle f', g\rangle\rangle, f, g', g'\rangle = \langle\langle\langle f, f, f'\rangle, g, g,\rangle f', g'\rangle = \\ &= \langle\langle f', g, g\rangle, f', g'\rangle = \langle f', \langle f', g, g, \rangle, g'\rangle = \langle f', f', \langle g, g, g'\rangle\rangle = \langle f', f', g\rangle.\end{aligned}$$

По предположению

$$\langle\langle f', f'. g'\rangle, \langle f, f, g\rangle, \langle f, f, g\rangle\rangle = \langle\langle f', f', g'\rangle, \langle g, f, f\rangle, \langle f, f, g\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle\langle f', f', g'\rangle, g, f\rangle, f, g\rangle = \langle\langle f', f', g\rangle\langle f, f, g\rangle g\rangle, = \langle\langle f', f\langle f, f, g\rangle\rangle = \langle f', f', g'\rangle.$$

Подобно предыдушему,

$$\langle\langle f, f, g\rangle, \langle f', f', g'\rangle, \langle f', f', g\rangle\rangle = \langle\langle f', f', g'\rangle, \langle f', f', g'\rangle, \langle f, f, g\rangle\rangle = \langle f, f, g\rangle.$$

Следовательно, $\langle f, f, g\rangle \sim \langle f', f', g'\rangle$, так что $[\langle f, f, g\rangle] = [\langle f', f', g'\rangle]$. Аналогичн можем доказать, что $[f+g-\langle f, f, g\rangle] = [f'+g'-\langle f', f', g'\rangle]$. Лемма доказана.

Предложение 5. $(E', \wedge, \vee)$ — *дистрибутивная структура.*

Доказательство. Прежде всего, для всех $f, g \in E$, по (1) и по предположению, имеем:

$$\langle\langle f, f, g\rangle, f, f\rangle = \langle f, f, \langle g, f, f\rangle\rangle = \langle f, f, \langle f, f, g\rangle\rangle = \langle f, f, g\rangle.$$

Поэтому $[\langle f, f, g\rangle] \leqq [f]$. Так как, очевидно, $\langle\langle f, f, g\rangle, g, g\rangle = \langle f, f, g\rangle$, имем $[\langle f, f, g\rangle] \leqq [g]$. Пусть теперь $[h] \leqq [f] \cup [h] \leqq [g]$. Докажем, что $[h] \leqq [\langle f, f, g\rangle$. Так как $[h] \leqq [f] \cup [h] \leqq [g]$, имеем $\langle h, f, f\rangle = \langle h, g, g\rangle = h$ и

$$\langle h, \langle f, f, g\rangle, \langle f, f, g\rangle\rangle = \langle\langle h, f, f\rangle\langle g, f, f\rangle g\rangle = \langle\langle h, f, f\rangle\langle f, f, g\rangle, g\rangle =$$
$$\langle\langle h, f, f\rangle, g, g\rangle = \langle h, g, g\rangle = h$$

Поэтому $[h] \leqq [\langle f, f, g\rangle]$. Таким образом, мыдоказали, что $[\langle f, f, g\rangle]$ точная нижняя грань. Точно так же можем доказать, что $[f+g-\langle f, f, g\rangle]$ точная верхняя грань, так что E'-структура. Если теперь $[f], [g], [h] \in E'$, тогда

$$[f] \vee ([g] \wedge [h]) = [f] \vee [\langle g, g, h] = [f + \langle g, g, h\rangle - \langle f, f, \langle h, g, h\rangle\rangle] \tag{2}$$

Имеем также

$$([f] \vee [g]) \wedge ([f] \vee [h]) = [f+g-\langle f, f, g\rangle] \wedge [f+h-\langle f, f, h\rangle] = \tag{3}$$
$$= [\langle f+g-\langle f, f, g\rangle, f+g-\langle f, f, g\rangle, f+h-\langle f, f, h\rangle\rangle].$$

Так как $\langle f, f, g\rangle = \langle g, f, f\rangle$, $f^3 = f$ и $g^3 = g$, то легко проверить, что

$$\langle f+g-\langle f, f, g\rangle, f+g-\langle f, f, g\rangle, f+h-\langle f, f, h\rangle\rangle = f + \langle g, g, h\rangle - \langle f, f, \langle g, g, h\rangle\rangle.$$

Поэтому из (2) и (3) следует, что

$$[f] \vee ([g] \wedge [h]) = ([f] \vee [g]) \wedge ([f] \vee [h]).$$

Предложение доказано.

Идемпотентный элемент е называется *обратимым,* если $\langle e, e, t\rangle = \langle t, e, e\rangle = t$ для всех $t \in T$.

Предложение 6. *Если T содержит обратимый идемпотент e, То E'-Булева алгебра.*

Доказательство. Нужно доказать, что E', дистрибутивная структура с дополнением. Согласно предложению 5, E' дистрибутивная структура. Так как е обратимый идемпотент, то $\langle h, e, e\rangle = h$ для всех $h \in E \cup$, поэтому $[h] \leqq [e]$ для всех $[h] \in E'$. Таким образом, $[e]$ наибольший элемент в E'. Пусть реперь $[f] \in E'$. Нужно найти такой $[g] \in E'$, что $[f] \wedge [g] = [0] \cup [f] \vee [g] = [e]$. Полагаем $g = e - \langle f, f, e\rangle$. Легко проверить, что $g \in E$.

$$\langle f, f, g\rangle = \langle f, f, e - \langle f, f, e\rangle\rangle = \langle f, f, e\rangle - \langle f, f, \langle f, f, e\rangle\rangle = \langle f, f, e\rangle - \langle f, f, e\rangle = 0,$$

так что $[f] \wedge [g] = [0]$. Снова, $[f] \vee [g] = [f + g - \langle f, f, g\rangle] = [f+g]$ поскольку $\langle f, f, g = 0$. Так как e-обратимый идемпотент, то $\langle f+g, e, e\rangle = f+g$ и легко проверить, что $\langle f+g, f+g, e\rangle = e$. Поэтому $f+g \sim e \cup [f+g] = [e]$, так что $[f] \vee [g] = [f+g] = [e]$. Таким образом, E' Булева алгебра.

Пусть теперь e, такой элемент в T, что $\langle e, t, e,\rangle = t$ для всех $t \in T$. Очевидно e, обратимый идемпотент в T. Пусть е произвольный идемпотент в T. Имеем

$$\langle e, e, e_1\rangle = \langle e, \langle e_1, e_1, e\rangle e_1\rangle = \langle e, e_1, \langle e_1, e, e_1\rangle\rangle = \langle e, e_1, e\rangle.$$

Подобно $\langle e, e, e_1\rangle = \langle e_1, e, e\rangle$. Теперь

$$\langle\langle e, e, e_1\rangle, \langle e, e, e_1\rangle, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e_1, e, e\rangle\langle e, e, e_1\rangle, \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle e_1, e, e\rangle e_1 \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle e_1, \langle e_1, e, e\rangle\langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e_1, e_1, e\rangle e, e_1\rangle =$$
$$= \langle e_1, e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle e, e, e_1\rangle.$$

Таким образом, $\langle e, e, e_1\rangle$ идемпотент в T. Далее, легко проверить, что $e_1 - \langle e, e, e_1\rangle$ тоже идемпотент в T. Полагаем теперь,

$$T_{11} = \langle\langle e, e, e_1\rangle, T, \langle e, e, e_1\rangle\rangle$$
$$T_{10} = \langle\langle e, e, e_1\rangle\, T, e_1, -\langle e, e, e_1\rangle\rangle$$
$$T_{01} = \langle e_1, -\langle e, e, e_1\rangle\, T, \langle e, e, e_1\rangle\rangle$$
$$T_{00} = \langle e_1, -\langle e, e, e_1\rangle, T, e_1, -\langle e, e, e_1\rangle\rangle.$$

Предложение 7. *Пусть* $T = T_{11} \oplus T_{10} \oplus T_{01} \oplus T_{00}$. *Если е такой идемпотент, что* $\langle e, e, t\rangle = \langle t, e, e\rangle$ *для всех* $t \in T$, *то* T_{11} *и* T_{00} *идеалы в* T.

Доказательство. Если $x \in T$, то легко проверить, что

$$x = \langle\langle e, e, e_1\rangle\, x, \langle e, e, e_1\rangle\rangle + \langle\langle e, e, e_1\rangle\, x, e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\rangle +$$
$$+ \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle, x, \langle e, e, e_1\rangle\rangle + \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle x, e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\rangle.$$

Поэтому $x \in T_{11} + T_{10} + T_{01} + T_{00}$, так что $T = T_{11} + T_{10} + T_{01} + T_{00}$. Пусть теперь $\langle\langle e, e, e_1\rangle, t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\rangle \in T_{11} \cap T_{10} \langle (t, t_1, \in T)$.
Тогда

$$\langle\langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle\langle e, e, e_1\rangle t, e_1, -\langle e, e, e_1\rangle\rangle e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle e, e, e_1\rangle t_1, \langle e_1, -\langle e, e, e_1\rangle e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t_1, \langle e_1, e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle -$$
$$- \langle\langle e, e, e_1\rangle e, \langle e, e, e\rangle\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e\rangle\, t, \langle e, e, \langle e, e, e\rangle\rangle - \langle\langle e, e, e_1\rangle e_1, \langle e, e, e_1\rangle\rangle\rangle =$$
$$= \langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle - \langle e, e, e_1\rangle = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$0 = \langle\langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle e, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle\langle e, e, e_1\rangle e_1 \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle\langle e, e\langle e_1, e_1, e\rangle e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle$$

Таким образом, мы доказали, что $T_{11} \cap T_{10} = (0)$. Точно так же можем показать что $T_{ij} \cap T_{kl} = (0)$, если $i \neq k$ или $j \neq l$. Поэтому $T = T_{11} \oplus T_{10} \oplus T_{01} \oplus T_{00}$.

Теперь допускаем, что е такой идемпотент в T что $\langle e, e, t\rangle = \langle t, e, e\rangle$ для всех $t \in T$. Так как $\langle e_1, t, e_1\rangle = t$ для всех $t \in T$, имеем для всех $t_1, t_2 \in T$,

$$\langle e_1, t_1, t_2\rangle = \langle e_1, \langle e_1, t_1, e_1\rangle t_2\rangle = \langle\langle e_1, e_1, t_1\rangle e_1, t_2 = \langle t_1, e_1, t_2\rangle.$$

Подобно предыдущему , $\langle t_1, e_1, t_2\rangle = \langle t_1, t_2, e_1\rangle$. Поэтому для $t_1, t_2 \in T$, имеем

$$\langle\langle e, e, e_1\rangle t, t_2\rangle = \langle e, e\langle t_1, t_2, e\rangle\rangle = \langle\langle t, e, e\rangle, t_2, e\rangle = \langle t_1, \langle e, e, t_2\rangle e_1\rangle =$$
$$= \langle t_1, \langle t_2, e, e_1\rangle e_1\rangle = \langle t_1, t_2, \langle e, e, e_1\rangle\rangle.$$

Пусть теперь $\langle\langle e, e, e_1\rangle, t\rangle, \langle e, e, e_1\rangle\rangle \in T_{11}$, тогда

$$\langle\langle\langle e, e, e_1\rangle t\langle e, e, e_1\rangle\rangle t_1, t_2\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle\langle e, e, e_1\rangle t_1, t_2\rangle\rangle =$$
$$= \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle t_1, t_2\langle e, e, e_1\rangle\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle\langle t, t_1, t_2\rangle\langle e, e, e_1\rangle\rangle$$

Таким образом $\langle\langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle, t_1, t_2\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle, \langle t, t_1, t_2\rangle, \langle e, e, e_1\rangle\rangle \in T_1$ и это показывает что $\langle T_{11}, T, T\rangle \subseteqq T_{11}$. Точно так же можем показать что$_1$ $\langle T, T_{11}, T\rangle \subseteqq T_{11}$ и $\langle T, T, T_{11}\rangle \subseteqq T_{11}$, так что T_{11} идеал в T.

Теперь докажем что T_{00} иеал в T. Пусть $t, t_1, t_2 \in T$. Тогда

$$\langle\langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\rangle t_1, t_2\rangle = \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, e_1\langle e, e, e_1\rangle t_1\rangle t_2\rangle =$$
$$= \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, e_1, t_1\rangle t_2\rangle - \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, \langle e, e, e_1\rangle t_1\rangle t_2\rangle =$$
$$= \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, t_1, e_1\rangle t_2\rangle - \langle e, \langle e, e, e_1\rangle, \langle t, e, e\rangle, \langle t_1, t_2, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle e, -\langle e, e, e_1\rangle, t, \langle t_1, t_2, e\rangle\rangle - \langle\langle e - \langle e, e_1, e_1\rangle t, \langle t_1 e, e\rangle\rangle t_2, e_1\rangle =$$
$$= \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, t_1, t_2\rangle e_1\rangle - \langle\langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle t, t\rangle\langle t_2, e, e\rangle e_1\rangle =$$
$$= \langle e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\langle t, t_1, t_2\rangle, e, -\langle e, e, e_1\rangle\rangle \in T_{00}.$$

Таким образом $\langle T_{00}, T, T\rangle \subseteqq T_{00}$. Подобным образом имеем $\langle T, T_{00}, T\rangle \subseteqq T_{00}$ и $\langle T, T, T_{00}\rangle \subseteqq T_{00}$, так что T_{00} тоже является идеалом в T.

Предложение 8. $T = T_{11} \oplus T_{00}$ *Тогда и только тогда* $\langle e, e, t\rangle = \langle t, e, e\rangle$ *для всех* $t \in T$.

Доказательство. Если $T = T_{11} \oplus T_{00}$, То $T_{10} = T_{01} = (0)$. Так что для $t \in T$. имеем $\langle\langle e, e, e_1\rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1\rangle\rangle = 0$ и поэтому

$$\langle\langle e, e, e_1\rangle, t, e_1\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle, t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle \tag{4}$$

Так как $t = \langle e_1, t, e_1\rangle$, по (1) и по (4), получим

$$\langle e, e, t\rangle = \langle e, e, \langle e_1, t, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle, t, e_1\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle e, e, \langle e_1\langle t, e, e\rangle, e_1\rangle\rangle = \langle e, e, \langle t, e, e\rangle\rangle.$$

Так как $T_{01}=(0)$, $\langle e_1-\langle e, e, e_1\rangle, t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle=0$ то

$$\langle et\langle eee\rangle\rangle = \langle\langle eee\rangle t\langle eee\rangle\rangle \tag{5}$$

По (5) имеем

$$\langle t, e, e\rangle = \langle e_1\langle t, e, e\rangle e_1\rangle = \langle e_1, t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle, t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle e, e, \langle e_1\langle t, e, e\rangle, e_1\rangle = \langle e, e, \langle t, e, e\rangle\rangle.$$

Таким образом, мы показали, что $\langle e, e, t\rangle=\langle e, e, \langle t, e, e\rangle\rangle=\langle t, e, e\rangle$ для всех $t\in T$.

Обратно, мы допускаем что $\langle e, e, t\rangle=\langle t, e, e\rangle$ для всех t и пусть $\langle\langle e, e, e_{10},\rangle, e_1-\langle e, e, e_1\rangle\in T_{10}\rangle$, где $t\in T$. Тогда имеем

$$\langle\langle e, e, e_1\rangle t, e_1-\langle e, e, e_1\rangle\rangle = \langle\langle e, e, e_1\rangle t, e_1\rangle-\langle\langle e, e, e_1\rangle t, \langle e, e, e_1\rangle\rangle =$$
$$= \langle e, e, t\rangle-\langle e, e, \langle e\langle t, e, e\rangle e_1\rangle\rangle = \langle e, e, t\rangle-\langle e, e\rangle, \langle t, e, e\rangle\rangle = e, e, t\rangle-\langle e, e\langle e, e, t\rangle\rangle=0$$

(так как $e^3=e$). (по предположению)

Таким образом $T_{10}=(0)$. Подобно имеем $T_{01}=(0)$. Предложение доказано.

Литература

KURT MEYBERG: Lectures on Algebras and triple systems, *Lecture Notes, University* 7 *Virginia,* 1972

АДРЕС:
НЬЮ ДЕЛИ – 110 016
7, С, ДЖ. С. САНСАНВАЛ МАРГ,
ИНДИАНСКИЙ СТАТИЧЕНСКИЙ ИНСТИТУТ,
В. РАМАСВАМИ.

ADDRESS:
V. RAMASWAMY.
INDIAN STATISTICAL INSTITUTE
7, S. J. S. SANSANWAL MARG,
NEW DELHI — 110 014. INDIA.

(Поступило 27. V. 1983.)