Champs presque F-principaux

Par LIVIU NICOLESCU (Bucarest)

Dans cette article on introduit les champs presque F-principaux dans l'algèbre associée à un champ tensoriel de type $(1, 2)$ (§ 1). Dans le § 2 on introduit les connexions presque F-principales. Dans le dernier paragraphe on met en evidence une propriété des hypersurfaces sphérique.

§ 0. Introduction

Soit M une variété C^∞-différentiable et à n dimensions. On note par $\mathscr{F}(M)$-l'anneau des functions réelles de classe C^∞ sur M et par $\mathscr{T}^r_s(M)$-le $\mathscr{F}(M)$-module des champs de tenseurs de type (r, s) sur M. Particulièrement, pour $\mathscr{T}^1_0(M)$, resp. $\mathscr{T}^0_1(M)$, on utilise de même la notation $\mathscr{X}(M)$, resp. $\wedge^1(M)$.

Considérons un champ tensoriel $A \in \mathscr{T}^1_2(M)$. Si l' on definit le produit de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathscr{X}(M)$ par la formule $X \circ Y = A(X, Y)$, alors $\mathscr{X}(M)$ devient une $\mathscr{F}(M)$-algèbre. Cette algèbre s'-appelle l'algèbre associée à A et sera notée par $\mathscr{U}(M, A)$ [5].

§ 1. Champs presque F-principaux

Soient $A \in \mathscr{T}^1_2(M)$ et $F \in \mathscr{T}^1_1(M)$.

Définition 1.1. Un champ $X \in \mathscr{X}(M)$ s'appelle champ presque F-principal dans l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ telle que:

$$A(Z, X) = \omega(Z)X + \eta(Z)F(X), \quad (\forall) Z \in \mathscr{X}(M). \tag{1.1}$$

Remarque 1.2.

1.2.1. Si $\eta = 0$ et $\omega = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ spécial dans l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ [4].

1.2.2. Si $\eta = 0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ principal dans l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ [4].

1.2.3. Si $\omega = 0$, alors X est un champ F-principal dans l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$.

1.2.4. Soient $\omega_0, \eta_0 \in \wedge^1(M)$ et soit $P'(M, F)$ l'ensemble des champs presque F-principaux dans l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$. Alors l'ensemble

$$\{X \in P'(M, F) \colon A(Z, X) = \omega_0(Z)X + \eta_0(Z)F(X), \quad (\forall)Z \in \mathscr{X}(M)\}$$

est une $\mathscr{F}(M)$-sousmodule du module $\mathscr{X}(M)$.

Définition 1.3. Soit $X \in P'(M, F)$. Si les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants pour tout $p \in M$, alors X s'appelle champ preque F-principal de directions. Les trajectoires des champs presque F-principaux de directions sont appellées courbes presque F-principales.

Proposition 1.4. *Soit $X \in \mathscr{U}(M, A)$. Supposons que les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants $(\forall)\, p \in M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *X est un champ presque F-principal de directions.*

(ii) *Pour tout $Z \in \mathscr{X}(M)$ on a la relation:*

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad &\{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} - \\ &- \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} = 0.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION (i)$\Rightarrow$(ii) Puisque $X_p \neq 0$, $(\forall)p \in M$, de (1.1) on a:

$$(1.3)\qquad A(Z, X) \otimes X = \omega(Z) X \otimes X + \eta(Z) F(X) \otimes X,$$

$$(1.3')\qquad X \otimes A(Z, X) = \omega(Z) X \otimes X + \eta(Z) \otimes F(X).$$

De (1.3) et (1.3′) nous obtenons:

$$(1.4)\qquad A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X) = \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\}.$$

Puisque les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants $(\forall)p \in M$, de (1.4) on a:

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad &\{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} = \\ &= \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.5')\qquad &\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} = \\ &= \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\}.\end{aligned}$$

De (1.5) et (1.5′) on obtient (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) De (1.2) il résulte que les champ $A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)$ et $F(X) \otimes X - X \otimes F(X)$ sont colineaires, $(\forall)Z \in \mathscr{X}(M)$. Donc il existe une fonction $h_Z \in \mathscr{F}(M)$ t.q.

$$(1.6)\quad A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X) = h_Z(F(Z) \otimes X - X \otimes F(Z)), \quad (\forall)Z \in \mathscr{X}(M).$$

Puisque les vecteurs $F_p(X_p)$ et X_p sont indépendants, $(\forall)\, p \in M$ de (1.6) il résulte:

$$(1.6')\qquad h_{Z+V} = h_Z + h_V, \quad (\forall)Z, V \in \mathscr{X}(M),$$

$$(1.6'')\qquad h_{uZ} = u h_Z, \quad (\forall)Z \in \mathscr{X}(M), (\forall)u \in \mathscr{F}(M).$$

De (1.6′) et (1.6″) nous avons $h_Z = \eta(Z)$, $(\forall)\, Z \in \mathscr{X}(M)$, où η est une 1-forme sur M. Maintenant la relation (1.6) on écrit:

$$(1.7)\qquad \{A(Z, X) - \eta(Z) F(X)\} \otimes X = X \otimes \{A(Z, X) - \eta(Z) F(X)\}.$$

La relation (1.7) nous montre que les champs $A(Z,X)-\eta(Z)F(X)$ et X sont colineaires, $(\forall) Z\in\mathscr{X}(M)$. Il résulte qu'il existe une fonction $f_Z\in\mathscr{F}(M)$ t.q.

$$A(Z,X)-\eta(Z)F(X)=f_Z X,\quad (\forall)Z\in\mathscr{X}(M). \tag{1.7'}$$

Puisque $X_p\neq 0$, $(\forall)p\in M$, de (1.7') on obtient:

$$f_{Z+V}=f_Z+f_V,\quad (\forall)Z,V\in\mathscr{X}(M), \tag{1.8}$$

$$f_{uZ}=uf_Z,\quad (\forall)u\in\mathscr{F}(M),(\forall)Z\in\mathscr{X}(M). \tag{1.8'}$$

De (1.8) et (1.8') nous avons $f_Z=\omega(Z)$, $(\forall)Z\in\mathscr{X}(M)$, où ω est une 1-forme sur M. Maintenant la relation (1.7') on écrit:

$$A(Z,X)-\eta(Z)F(X)=\omega(Z)X,\quad (\forall)Z\in\mathscr{X}(M) \tag{1.7''}$$

c'est-à-dire justement (1.1).

Remarque 1.5. Soient A^i_{jk}, F^i_j, resp. X^i les composantes de A, F, resp. X dans une système de coordonnées locales. Alors (1.1) s'écrit:

$$A^r_{ki}X^i=\omega_k X^r+\eta_k F^r_i X^i, \tag{1.1'}$$

où ω_k, resp. η_k sont les composantes locales de ω, resp. η. En coordonnées locales la relation (1.5) s'écrit:

$$B^{ihpq}_{jksmr}X^k X^s X^m X^r=0 \tag{1.5'}$$

où

$$B^{ihpq}_{jksmr}=(A^i_{jk}\delta^h_s-A^h_{jk}\delta^i_s)(\delta^p_m F^q_r-\delta^q_m F^p_r)-(A^p_{jk}\delta^q_s-A^q_{jk}\delta^p_s)(\delta^i_m F^h_r-\delta^h_m F^i_r). \tag{1.9}$$

En utilisant (1.5') on obtient le système différentiel d'équations des courbes presque F-principales de l'algèbre $\mathscr{U}(M,A)$:

$$B^{ihpq}_{jksmr}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^s}{dt}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^r}{dt}=0. \tag{1.10}$$

Proposition 1.6. *Soient l'algèbre $\mathscr{U}(M,A)$ et le champ tensoriel $F\in\mathscr{T}^1_1(M)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *Tout élément de l'algèbre $\mathscr{U}(M,A)$ est un champ presque F-principal.*

(ii) *Il existe deux 1-formes $\omega,\eta\in\wedge^1(M)$ t.q.*

$$A=\omega\otimes\delta+\eta\otimes F. \tag{1.11}$$

DÉMONSTRATION. Evidemment.

Définition 1.7. Si tout élément de l'algèbre $\mathscr{U}(M,A)$ est un champ presque F-principal, alors $\mathscr{U}(M,A)$ s'appelle algèbre presque F-principale.

Proposition 1.8. *Si $\mathscr{U}(M,A)$ est une algèbre presque F-principale et $\mathscr{U}(M,A)$ est commutative, alors il existe deux 1-formes $\sigma,\Theta\in\wedge^1(M)$ t.q.*

$$A=\sigma\otimes\delta+\delta\otimes\sigma+\Theta\otimes F+F\otimes\Theta. \tag{1.12}$$

DÉMONSTRATION. Puisque l'algèbre $\mathscr{U}(M,A)$ est presque F-principale, il existe deux 1-formes $\omega,\eta\in\wedge^1(M)$ t.q. on a (1.11). De (1.11) on obtient pour tout $X,Y\in$

$\in \mathscr{X}(M)$ la relation:

$$(1.11') \qquad A(X, Y)+A(Y, X) = \omega(X)Y+\omega(Y)X+\eta(X)F(Y)+\eta(Y)F(X).$$

Puisque $A(X, Y)=A(Y, X)$, $(\forall)\, X, Y)\in \mathscr{X}(M)$ de (1.11′) on obtient (1.12) où $2\sigma=\omega$ et $2\Theta=\eta$.

Définition 1.9. Soit ∇ une connexion lineaire sur M et soit $F\in \mathscr{T}_1^1(M)$. Un élément $X\in \mathscr{X}(M)$ s'appelle champ (∇, F)-recurrent s'il existe $\alpha, \beta\in \wedge^1(M)$ t.q.

$$\nabla_Z X = \alpha(Z)X+\beta(Z)F(X), \quad (\forall)Z\in \mathscr{X}(M).$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Considérons les connexions linéaires $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ définies par

$$\overset{1}{\nabla} = \nabla-\frac{1}{2}A, \quad \overset{2}{\nabla} = \nabla+\frac{1}{2}A.$$

L'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$, où $A=\overset{2}{\nabla}-\overset{1}{\nabla}$, s'appelle l'algèbre de déformation de la paire de connexions $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ [7]. Relatif à la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ on a

Proposition 1.10. *Soit* $X\in \mathscr{U}(M, A)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *X est un champ presque F-principal et $(\overset{1}{\nabla}, F)$-recurrent.*

(ii) *X est un champ presque F-principal et $(\overset{2}{\nabla}, F)$-recurrent.*

(iii) *X est un champ $(\overset{1}{\nabla}, F)$-recurrent et $(\overset{2}{\nabla}, F)$-recurrent.*

§ 2. Conexions presque F-principales sur une variété pseudo-riemannienne

Soient (M, g) une veriété pseudo-riemannienne à n dimensions, $\Theta\in \wedge^1(M)$ et $F\in \mathscr{T}_1^1(M)$. En tenant compte de [1], [2] on a

Définition 2.1. Une connexion linéaire ∇ sur M s'appelle la connexion de Gołąb associée à (Θ, F) si pour tout $X, Y\in \mathscr{X}(M)$ on a:

$$(2.1) \quad \nabla_X g = 0 \quad \text{et} \quad T(X, Y) = \Theta(Y)F(X)-\Theta(X)F(Y), \quad (\forall)X, Y\in \mathscr{X}(M)$$

où $T\in \mathscr{T}_2^1(M)$ est le champ tensoriel de torsion de ∇.

Remarque 2.2. Il est conuu [1], [2] que etant données une variété pseudo-riemannienne (M, g), une 1-forme $\Theta\in \wedge^1(M)$ et un champ tensoriel $F\in \mathscr{T}_1^1(M)$, alors il existe une unique connexion de Gołąb associée à (Θ, F). Si nous notons par $\mathring{\nabla}$ la connexion de Levi—Civita associée à g, alors la connexion de Gołąb associée à (Θ, F) est donnée par la formule [2]:

$$(2.2) \qquad \nabla_X Y = \mathring{\nabla}_X Y+\Theta(Y)F(X)-S(X, Y)P, \quad (\forall)X, Y\in \mathscr{X}(M)$$

où

$$(2.3) \qquad g(P, X) = \Theta(X), \quad S(X, Y) = g\big(F(X), Y\big), \quad (\forall)X, Y\in \mathscr{X}(M).$$

Définition 2.3. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne à n dimensions, $\Theta \in \wedge^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Soit ∇ la connexion de Gołąb associée à (Θ, F). On dit qu'une connexion linéaire $\overline{\nabla}$ sur M est une connexion presque F-principale si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla}-\nabla)$ est un champ presque F-principal.

Remarque 2.4. En utilisant la proposition 1.6 il en résulte que $\overline{\nabla}$ est une connexion presque F-principale si et seulement s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ t.q.

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X) Y + \eta(X) F(X), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{2.4}$$

De (2.2) et (2.4) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ la formule:

$$\overline{\nabla}_X Y = \mathring{\nabla}_X Y + \omega(X) Y + \Theta(Y) F(X) + \eta(X) F(Y) - S(X, Y) P. \tag{2.5}$$

Théorème 2.5. *Les algébres $\mathcal{U}(M, \nabla - \mathring{\nabla})$ et $\mathcal{U}(M, \overline{\nabla} - \mathring{\nabla})$ ont les mêmes champs presque F-principaux.*

Démonstration. On note $A = \nabla - \mathring{\nabla}$, $\bar{A} = \overline{\nabla} - \mathring{\nabla}$. En utilisant les formules (2.2) et (2.5) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ les relations:

$$A(X, Y) = \Theta(Y) F(X) - S(X, Y) P, \tag{2.2'}$$

$$\bar{A}(X, Y) = \omega(X) Y + \eta(X) F(Y) + \Theta(Y) F(X) - S(X, Y) P. \tag{2.5'}$$

De (2.2′) et (2.5′) on a:

$$\bar{A}(X, Y) - A(X, Y) = \omega(X) Y + \eta(X) F(Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

d'où l'on tire facilement le résultat du théorème 2.5.

Exemple 2.6. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne, $\mathring{\nabla}$ la connexion de Levi—Civita associée à g, Ric le champ tensoriel de Ricci, K l'invariant de Ricci. Considérons la 1-forme $\Theta \in \wedge^1(M)$ définie par $\Theta(X) = \mathring{\nabla}_X K$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$ et soit $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$ definit par la formule

$$g(F(X), Y) = \mathrm{Ric}(X, Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Alors, la connexion de Gołąb ∇ associée à (Θ, F) est donnée par la formule [2]

$$\nabla_X Y = \mathring{\nabla}_X Y + \Theta(Y) F(X) - \mathrm{Ric}(X, Y) P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

où $g(P, Z) = \omega(Z)$, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$.

Soient $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ deux 1-formes arbitraires. Alors la connexion lineaire $\overline{\nabla}$ définiée par la formule

$$\overline{\nabla}_X Y = \mathring{\nabla}_X Y + \omega(X) Y + \Theta(Y) F(X) + \eta(X) F(X) - \mathrm{Ric}(X, Y) P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

est une connexion presque F-principale.

§ 3. Une théorème sur les hypersurfaces

Soit M une hypersurfaces dans l'espace euclidien E^{n+1}, où $n \geqq 2$. Soit g, resp. b, la première, resp. la deuxiéme forme fondamentale. Supposons que rang $b=n$. Soient ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions linéaires associées à g et b. Soit F l'application de Weingarten dennée par:

$$g(X, F(Y)) = g(F(X), Y) = b(X, Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Si nous notons par $A = \overline{\nabla} - \nabla$, alors pour tout $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ nous avons les formules [3], [6]:

$$g(A(X, Y), F(Z)) = g(A(Y, Z), F(X)),$$

$$b(A(X, Y), Z) = -\frac{1}{2}(\nabla_X b)(Y, Z).$$

Proposition 3.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Tout élément de l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ est un champ presque F-principal.*
(ii) *M est une hypersurface sphèrique.*

DÉMONSTRATION. (i)$\Rightarrow$(ii) En utilisant la proposition 1.6 on a:

$$A(X, Y) = \omega(X) Y + \eta(X) F(Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Pour $Y = X$ on obtient

$$A(X, X) = \omega(X) X + \eta(X) F(X), \quad (\forall) X \in \mathscr{X}(M)$$

c'est-à-dire l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ est F-caractéristique. En utilisant [3] (Proposition 4.1) il en résulte que M est une hypersurface sphèrique.

(ii)$\Rightarrow$(i) Evidemment, si M est une hypersurface sphèrique, alors $A=0$ et pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ on a

$$A(Z, X) = \omega(Z) X + \eta(Z) F(X), \quad (\forall) Z \in \mathscr{X}(M)$$

où $\omega = \eta = 0$. Une conséquence immédiate est:

Proposition 3.2, [6]. *Soit M une hypersurface dans l'espace euclidien E^{n+1}, où $n \geqq 2$. Soit g, resp. b, la première, resp. la deuxieme forme fondamentale. Supposons que rang $b=n$. Soient ∇ et $\overline{\nabla}$ les connexions de Levi—Civita associées à g et b. Notons par F l'application de Weingarten et soit $A = \overline{\nabla} - \nabla$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Les ∇-géodésiques sont $\overline{\nabla}$-géodésiques.*
(ii) *Les $\overline{\nabla}$-géodésiques sont ∇-géodésiques.*
(iii) $\nabla_X b = 0$ *pour tout* $X \in \mathscr{X}(M)$.
(iv) $\nabla = \overline{\nabla}$.
(v) *Tout élément de l'algèbre $\mathscr{U}(M, A)$ est un champ presque F-principal.*
(vi) *M est une hypersurface sphérique.*

Bibliographie

[1] S. Gołąb, On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections, *Tensor, N. S.* **29** (1975), 249—254.

[2] R. S. Mishra and S. N. Pandey, On quarter-symmetric metric F-connections, *Tensor, N. S.*, **34** (1980), 1—7.

[3] M. Martin et L. Nicolescu, Des courbes (∇, F)-planes, *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. R.*, **21** (1969), nr. 3—4 (1977), 345—353.

[4] L. Nicolescu, Sur la géométrie de l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1, 2), *Tensor, N. S.*, **38** (1982), 235—241.

[5] L. Nicolescu et M. Martin, Sur l'algèbre associée à un champ tensoriel du type (1, 2), *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **31** (1—2) (1978), 27—35.

[6] U. Simon, On the inner geometry of the second fundamental form, *Michigan J. Math.* **19** (1972), 129—132.

[7 I. Vaisman, Sur quelques formules du calcul de Ricci global, *Comm. Math. Helv.* **41** (1966—67), 73—87.

(Reçu be 9 Avril 1984)