Oskulierende Punkträume von Finsler—Otsukischen Linienelementräumen

Von A. MOÓR (Sopron)

§ 1. Einleitung

In der Theorie der Finslerräume spielen die oskulierenden Räume, in erster Reihe die oskulierenden Riemannschen Räume eine sehr wichtige Rolle. Wir verweisen nur auf die Arbeiten [2]—[4], [8], [9]: Kap. III. § 5, [10]—[12], die die oskulierenden Räume für mathematische Probleme verwenden, aber auch in der theoretischen Physik kann die Theorie der oskulierenden Räume erfolgreich verwendet werden [1].

Das erste Resultat dieser Theorie erschien wohl in der Arbeit [6], die späteren Untersuchungen haben aber weitgehende Erweiterungen durchgeführt. Der Grundgedanke der Untersuchungen bezüglich der oskulierenden Räume besteht darin, daß die Richtung $\dot{x}^i$ als Funktion des Ortes x^i bestimmt wird und $\dot{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ soll dann einen gewissen partiellen Differentialgleichungssystem genügen.

In diesem Aufsatz wollen wir oskulierende Punkträume von Finsler—Otsukischen Räumen [5] bestimmen. Die oskulierenden Punkträume können Riemann—Otsukische Räume, oder affinzusammenhängende Otsukische Punkträume [7] sein, je nachdem mit Hilfe des Richtungsfeldes $\dot{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ aus $g_{ij}(x, \dot{x})$ der Fundamentaltensor eines Riemannschen Raumes, oder aus $'\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ die ersten Übertragungsparameter eines Otsukischen Punktraumes bestimmt werden.

Der wesentliche Unterschied bezüglich der oskulierenden Punkträume der Finslerräume (vgl. [4], [10]—[12]) besteht bei den Finsler—Otsukischen Räumen — die wir im folgenden mit *$F-O_n$-Räume* bezeichnen werden — darin, daß bei diesen Räumen zwei verschiedene Übertragungsparameter $'\Gamma_j{}^i{}_k$ und $''\Gamma_j{}^i{}_k$ existieren, die längs einer bestimmten Folge der Linienelemente $\mathscr{L}_C(x(t), \dot{x}(t))$ mit den entsprechenden Übertragungsparametern der oskulierenden Punkträume übereinstimmen werden, und selbstverständlich der charakteristischen Gleichungen (2.1)[1]) der Otsukischen Räume (vgl. [7], (3.13)) genügen.

Im Paragraphen 2. werden wir die im folgenden nötigen Grundbegriffe, Grundgröße und Grundgleichungen der $F-O_n$-Räume zusammenstellen und dann im Paragraphen 3. werden wir verschiedene oskulierende Punkträume konstruieren. Im Paragraphen 4. wollen wir den Zusammenhang der Übertragungsparameter bzw. der Krümmungstensoren der oskulierenden Räume mit denen des $F-O_n$-Raumes bestimmen. Unsere Hauptresultate sind in den Sätzen 2., 3. und 4. formuliert.

§ 2. Grundformeln der $F-O_n$-Räume

Ein $F-O_n$-Raum ist eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$, $(i=1,2,\dots,n)$ in der die geometrische Struktur durch eine in den $\dot{x}^i$ von erster Dimension homogene Grundfunktion $F(x,\dot{x})$ und durch einen in den $\dot{x}^i$ von nullter Dimension homogenen gemischten Tensor $P^i_j(x,\dot{x})$ mit *Det* $(P^i_j)\neq 0$ festgelegt ist (vgl. [5], § 2.). Der metrische Grundtensor ist in der gewöhnlichen Weise durch $g_{ij}=1/2\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j F^2$, $\dot{\partial}_i := \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ bestimmt; die fundamentalen Übertragungsparameter ${}'\Gamma_j{}^i{}_k$ und ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ — die bei den kontra-bzw. kovarianten Indizes im invarianten Differential bzw. in der kovarianten Ableitung der Tensoren verwendet werden — sind durch die Gleichungen

$$\partial_k P^i_j - (\dot{\partial}_t P^i_j){}'\Gamma_s{}^t{}_k \dot{x}^s - {}'\Gamma_j{}^t{}_k P^i_t + {}''\Gamma_t{}^i{}_k P^t_j = 0, \quad \partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \dot{\partial}_t := \frac{\partial}{\partial \dot{x}^t} \tag{2.1}$$

$$\partial_k g_{ij} - (\dot{\partial}_t g_{ij}){}'\Gamma_s{}^t{}_k \dot{x}^s - {}''\Gamma_i{}^t{}_k g_{tj} - {}''\Gamma_j{}^t{}_k g_{it} = 0 \tag{2.2}$$

festgelegt (vgl. [5], (2.10) und (2.14)). Es soll immer angenommen werden, daß *die* ${}''\Gamma_j{}^t{}_k$ *in* j, k *symmetrisch* sind.

Die Übertragungsparameter ${}''\Gamma_{jik}$ haben die Form (vgl. [5], (2.15)):

$$''\Gamma_{jik} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) - A_{jit}{}'\Gamma_o{}^t{}_k - A_{ikt}{}'\Gamma_o{}^t{}_j + A_{kjt}{}'\Gamma_o{}^t{}_i, \tag{2.3}$$

wo A_{jit} den Torsionstensor der Finslerschen Metrik und der Index: „o" — wie gewöhnlich — die Kontraktion mit $\dot{l}$ bedeuten.

Die wichtigsten Krümmungstensoren des Raumes können aus den Vertauschungsformeln der fundamentalen kovarianten Ableitungen bestimmt werden. Es wird nach den kovarianten Ableitung $\mathring{\nabla}_k$ (ihre Definition ist durch (2.13) von [5] angegeben) nach einfacher Rechnung:

$$2\mathring{\nabla}_{[m}\mathring{\nabla}_{k]}T^a_b = {}'K_s{}^a{}_{km}T^s_b - {}^*K_b{}^s{}_{km}T^a_s - {}'K_p{}^t{}_{km}\dot{x}^p\dot{\partial}_t T^a_b, \tag{2.4}$$

wo ${}'K_j{}^i{}_{km}$ bzw. ${}^*K_j{}^i{}_{km}$ den allein durch ${}'\Gamma_j{}^i{}_k$ bestimmten Krümmungstensor bzw. einen gemischten Krümmungstensor bedeutet. Es ist:

$${}'K_j{}^i{}_{km} := (\partial_m{}'\Gamma_j{}^i{}_k - (\dot{\partial}_t{}'\Gamma_j{}^i{}_k){}'\Gamma_p{}^t{}_m\dot{x}^p + {}'\Gamma_j{}^t{}_k{}'\Gamma_t{}^i{}_m) - (k/m), \tag{2.5}$$

$${}^*K_j{}^i{}_{km} := (\partial_m{}''\Gamma_j{}^i{}_k - (\dot{\partial}_t{}''\Gamma_j{}^i{}_k){}'\Gamma_p{}^t{}_m\dot{x}^p + {}''\Gamma_j{}^t{}_k{}''\Gamma_t{}^i{}_m) - (k/m), \tag{2.6}$$

wo (k/m) den vorigen Ausdruck, aber mit vertauschten Indizes k und m bedeutet. (Vgl. für die gewöhnlichen Krümmungstensoren eines Finslerraumes [9], Kap. IV. § 1. 1°).

Offenbar besteht für den Krümmungstensor (2.6) der folgende

Satz 1. *Hat* ${}'\Gamma_p{}^s{}_k\dot{x}^p$ *die Form*

$${}'\Gamma_p{}^s{}_k\dot{x}^p = {}''\Gamma_p{}^s{}_k\dot{x}^p + \dot{x}^s q_k, \tag{2.7}$$

---

[1]) Vgl. den nachfolgenden Paragraphen 2.

wo q_k *einen kovarianten Vektor (möglicherweise den Nullvektor) bedeutet, so gilt*

$$*K_j{}^i{}_{km}(x, \dot{x}) = {}''K_j{}^i{}_{km}(x, \dot{x}), \tag{2.8}$$

wo $''K_j{}^i{}_{km}$ *den allein mit* $''\Gamma_j{}^i{}_k$ *gebildeten Krümmungstensor bezeichnet.*

BEWEIS. Die Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ sind in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Dimension; es folgt somit der Satz unmittelbar nach den Formeln (2.6) and (2.7).

§ 3. Oskulierende Punkträume

Ein oskulierender Punktraum eines Linienelementraumes $\mathfrak{L}_n$ bedeutet einen raum, der dadurch entsteht, daß in einem n-dimensionalen Bereich $\mathfrak{B}_n$ die Richtung $\dot{x}^i$ des Linienelementes in irgendeiner Weise durch ein Vektorfeld

$$\dot{x}^i = r^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{3.1}$$

vom Orte abhängig gemacht wird, wodurch ein fundamentales Objekt von $\mathfrak{L}_n$, z. B. der metrische Fundamentaltensor $g_{ik}(x, r(x))$, oder aber die Übertragungsparameter $'\Gamma_j{}^i{}_k(x, r(x))$ allein vom Orte x^i abhängig werden (vgl. z. B. [10], [13] und [4]). Dabei ist aber nach einer geeigneten Konstruktion des Richtungsfeldes (3.1) für $\dot{x}^s = r^s(x)$ noch ein partielles Differentialgleichungssystem von der Form

$$\partial_k r^s(x) + {}'\Gamma_p{}^s{}_k(x, r(x)) r^p(x) + r^s(x) q_k(x) = 0 \tag{3.2}$$

— wo $q_k(x)$ ein kovariantes Vektorfeld bezeichnet — mindestens längs einer vorgegebenen Folge der Linienelemente

$$\mathscr{L}_C\colon \big(x^s(t), \dot{x}^s(t) = r^s(x(t))\big), \tag{3.2a}$$

möglicherweise auch im ganzen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$, gültig. In den meisten Fällen ist sogar $q_k \equiv 0$. Mit Hilfe von (3.2) kann erreicht werden, daß längs $\mathscr{L}_C$ nicht nur ein ausgewähltes Grundobjekt, sondern auch ein anderes Objekt von $\mathfrak{L}_n$ mit dem des oskulierenden Raumes übereinstimmen wird.

Haben wir z.B. das Vektorfeld (3.1) dem Vargaschen Verfahren entsprechend (vgl. [10], (2.10)) konstruiert und $\dot{x}^s = r^s(x)$ in $g_{ik}(x, \dot{x})$ substituiert, so entstand ein *oskulierender Riemannscher Raum* mit dem metrischen Grundtensor $\hat{g}_{ik}(x) := {} := g_{ik}(x, r(x))$[2]) und für den noch statt (3.2) längs $\mathscr{L}_C$:

$$\frac{\partial r^s}{\partial x^k} + \overset{(\varrho)}{\Gamma}_j{}^s{}_k(x) r^j(x) = 0 \tag{3.3}$$

bestehen wird, wo $\overset{(\varrho)}{\Gamma}_j{}^s{}_k$ die aus $\hat{g}_{ik}$ gebildeten Christoffelschen Symbole bezeichnen.

Wir konstruieren nun einen *oskulierenden Otsukischen Raum*. Dafür benützen wir das in [4] angegebene Verfahren, statt $\Gamma^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x})$ verwenden wir aber die Über-

[2]) Die Fundamentalgrößen der oskulierenden Punkträume werden wir durch „ˆ" bezeichnen.

tragungsparameter ${}'\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$. Durch

$$(3.4)\qquad \text{(a)}\ {}'\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k(x) := {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x, r(x)), \quad \text{(b)}\ \hat{P}^i_j(x) := P^i_j(x, r(x))$$

erhalten wir einen oskulierenden affinen O_n-Raum, wo noch längs $\mathscr{L}_C$ (3.2) mit $q_k \equiv 0$ bestehen wird (vgl. [4], (1.6a)—(1.12)). (3.4) selbst gilt natürlich in einem Teilbereich $\mathfrak{B}_n$.

Die Bedingung (3.4) (b) ist neben (3.4) (a) eine zweite Bedingung, die in den oskulierenden affinzusammenhängenden Punkträumen (die aber nicht Otsukische Räume sind) nicht vorkommt, da der Tensor $P^i_j(x, \dot{x})$ in den nicht-Otsukischen Räumen nicht existiert, genauer $P^i_j = \delta^i_j$ ist.

§ 4. Identität der Grundgrößen der oskulierenden Räume mit denen der $F-O_n$-Räume

Es sei R_n ein oskulierender Riemannscher Raum mit dem metrischen Grundtensor $\hat{g}_{ik}(x) := g_{ik}(x, r(x))$ für den längs einer Folge der Linienelemente $\mathscr{L}_C(x(t), \dot{x}(t))$ auch (3.3) besteht, ferner nehmen wir noch an, daß in unserem $F-O_n$-Raum auch (2.7) gültig ist. Es besteht dann der

Satz 2. *Gilt in einem $F-O_n$-Raum (2.7), (möglicherweise mit $q_k \equiv 0$), so kann längs $\mathscr{L}_C$ ein oskulierender Riemannscher Raum immer zu einem oskulierenden Riemann—Otsukischen $R-O_n$-Raum mit den Fundamentalgrößen*

$$(4.1)\qquad \hat{g}_{ij}(x) := g_{ij}(x, r(x)), \quad \hat{P}^i_j(x) := P^i_j(x, r(x))$$

erweitert werden, wo längs $\mathscr{L}_C$ die Übertragungsparameter und die invarianten Differentiale des $R-O_n$-Raumes mit den entsprechenden Größen des $F-O_n$-Raumes übereinstimmen.

Beweis. Auf Grund von (2.7) erhält man aus der fundamentalen Relation

$$(4.2)\qquad \partial_k g_{ij} - 2A_{ijs}{}'\Gamma_o{}^s{}_k - {}''\Gamma_{ijk} - {}''\Gamma_{jik} = 0$$

der $F-O_n$-Räume[3]) (vgl. [5], (2.14)), daß in dieser Formel statt der ${}'\Gamma_o{}^s{}_k$ die Größen ${}''\Gamma_o{}^s{}_k$ gesetzt werden können, da $A_{ijo} \equiv 0$ ist. Die Gleichung (4.2) wird aber dann mit der entsprechenden Gleichung der Cartanschen Theorie der Finslerräume übereinstimmen (vgl. [9], Kap. III. (1.23)). Durch (4.2) ist aber eben die Relation $\mathring{\nabla}_k g_{ij} = 0$ ausgedrückt, was wegen (2.7) mit $g_{ij|k} = 0$ der Cartanschen Theorie übereinstimmt. Aus dieser Tatsache folgt aber, daß ${}''\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x}) \equiv \Gamma^{*i}_{j\ k}(x, \dot{x})$, wo die $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ die Cartanschen Übertragungsparameter bedeuten.

Nach der Vargaschen Theorie (vgl. [10], (2.21) und (2.27)) wird somit längs $\mathscr{L}_C$, d.h. längs (3.2a):

$$(4.3)\qquad \overset{(\varrho)}{\Gamma}_j{}^i{}_k(x(t)) = {}''\Gamma_j{}^i{}_k(x(t), \dot{x}(t))$$

gelten.

[3]) Offenbar ist (4.2) mit unserer Formel (2.2) identisch, da der Index "o" die Kontraktion mit $l^i = F^{-1}\dot{x}^i$ bedeutet.

Aus (2.1) wird nach (2.7)

$$\partial_k P^i_j-(\dot\partial_t P^i_j)\,{}''\Gamma_s{}^t{}_k\dot x^s-{}'\Gamma_j{}^t{}_k P^i_t+{}''\Gamma_t{}^i{}_k P^t_j = 0, \tag{4.4}$$

und auf Grund von (4.3) wird längs $\mathscr{L}_C$

$$\partial_k P^i_j-(\dot\partial_t P^i_j)\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_s{}^t{}_k\dot x^s-{}'\Gamma_j{}^t{}_k P^i_t+\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_t{}^i{}_k P^t_j = 0 \tag{4.5}$$

bestehen. Setzt man den Feldvektor (3.1), d.h. $\dot x^s=r^s(x)$ — womit der oskulierende Riemannsche Raum mit Hilfe der Vargaschen Methode bestimmt wurde — in den Grundtensor $P^i_j(x,\dot x)$ vom $F-O_n$-Raum ein, so erhält man einen Tensor im $\mathfrak{B}_n$, d.h. es sind im $\mathfrak{B}_n$ die beiden Relationen von (4.1) gültig.

Längs $\mathscr{L}_C$ wird nun wegen (3.3) und (4.1) aus (4.5) die Relation

$$\partial_k\hat P^i_j-{}'\hat\Gamma_j{}^t{}_k\hat P^i_t+\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_t{}^i{}_k\hat P^t_j = 0,\quad \hat P^i_j(x):=P^i_j(x,r(x)) \tag{4.6}$$

entstehen, wo längs $\mathscr{L}_C$ noch

$${}'\hat\Gamma_j{}^t{}_k(x):={}'\Gamma_j{}^t{}_k(x,r(x)),\quad x^i=x^i(t) \tag{4.7}$$

gesetzt wurde. Die Übertragungsparameter ${}'\hat\Gamma_j{}^t{}_k$ bzw. ${}'\Gamma_j{}^t{}_k$ können aus (4.6) bzw. (4.4) offenbar wegen der in den Otsukischen Räumen immer gültige Relation $\operatorname{Det}(P^i_j)\neq 0$ unmittelbar bestimmt werden. (4.1) definiert also einen oskulierenden $R-O_n$-Raum, dessen zweite Übertragungsparameter ${}''\hat\Gamma_j{}^i{}_k=\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_j{}^i{}_k$ ist; die beiden Formeln (4.3) und (4.7) beweisen somit die erste Behauptung des Satzes.

Wir müssen noch die Identität der invarianten Differentiale zeigen.

Betrachten wir einen Tensor $T^a_b(x,\dot x)$, dessen Komponenten $\hat T^a_b(x)$ im $\mathfrak{B}_n$ mit Hilfe von (3.1) durch $\hat T^a_b(x):=T^a_b(x,r(x))$ festgelegt sind. Nach Definition des

$$\hat D\hat T^a_b = d\hat T^a_b+({}'\hat\Gamma_s{}^a{}_k\hat T^s_b-{}''\hat\Gamma_b{}^s{}_k\hat T^a_s)\,dx^k,\quad {}''\hat\Gamma_b{}^s{}_k\equiv\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_b{}^s{}_k.$$

Längs $\mathscr{L}_C$ wird wegen (4.3) und (4.7), $\dot x^i(t)=r^i(x(t))$

$$\hat D\hat T^a_b = dT^a_b(x,\dot x)+\big({}'\Gamma_s{}^a{}_k(x,\dot x)T^s_bT(x,\dot x)-{}''\Gamma_b{}^s{}_k(x,\dot x)T^a_s(x,\dot x)\big)\,dx^k. \tag{4.8}$$

Auf Grund von $A_o{}^s{}_t=0$ ist:

$$\text{(a)}\ {}'\Gamma_s{}^a{}_k=\Gamma_s{}^a{}_k-A_s{}^a{}_t\Gamma_o{}^t{}_k,\quad \text{(b)}\ {}''\Gamma_b{}^s{}_k=\overline{\overline{\Gamma}}{}_b{}^s{}_k-A_b{}^s{}_t\Gamma_o{}^t{}_k \tag{4.9}$$

$$\text{(a)}\ {}'\Gamma_s{}^a{}_k=\Gamma_s{}^a{}_k-A_s{}^a{}_t\Gamma_o{}^t{}_k,\quad \text{(b)}\ {}''\Gamma_b{}^s{}_k=\overline{\overline{\Gamma}}{}_b{}^s{}_k-A_b{}^s{}_t\Gamma_o{}^t{}_k \tag{4.9}$$

(vgl. [5], (2.8a)—(2.8d)). Im Hinblick auf (2.7), (4.3) und (3.3) wird noch längs $\mathscr{L}_C$, d.h. längs (3.2a)

$$\Gamma_o{}^t{}_k\,dx^k\equiv\frac{1}{F}\,{}'\Gamma_j{}^t{}_k\dot x^j\,dx^k=\frac{1}{F}\,({}''\Gamma_j{}^t{}_k\dot x^j+\dot x^t q_k)\,dx^k= \tag{4.10}$$

$$=\frac{1}{F}\,(\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_j{}^t{}_k\dot x^j+\dot x^t q_k)\,dx^k=-\frac{1}{F}\,d\dot x^t+l^t q_k\,dx^k$$

bestehen. Aus (4.8) erhält man nach Einsetzen von (4.9) und (4.10) und im Hinblick auf $F^{-1}A_s{}^a{}_t = C_s{}^a{}_t$ (die $C_s{}^a{}_t$ sind die Cartanschen Übertragungsparameter; vgl. [9], Kap. III. Formel (1.2)):

$$\hat{D}\hat{T}^a_b(x) = \hat{D}T^a_b(x, r(x)) + (C_s{}^a{}_t T^s_b - C_b{}^s{}_t T^a_s)\, d\dot{x}^t + (\Gamma_s{}^a{}_k T^s_b - \bar{\bar{\Gamma}}_b{}^s{}_k T^a_s)\, dx^k = \bar{D}T^a_b(x, \dot{x}),$$

wo „$\bar{D}$" das invariante Differential des $F-O_n$-Raumes ist (vgl. [5], (2.2)). Damit haben wir den Satz 2. vollständig bewiesen.

Jetzt gehen wir zur Untersuchung der oskulierenden affinen Otsukischen O_n-Räume (vgl. [7]) über. Diese Räume sind durch die Definitionsformeln (3.4) (a) und (3.4) (b) bestimmt, wo aber längs der Folge $\mathscr{L}_C(x(t), \dot{x}(t))$ der Linienelemente noch (3.2) und (3.2a) bestehen. Wir beweisen nun den folgenden

Satz 3. *Ist durch* (3.4) *ein affiner* O_n*-Raum definiert, für den längs einer bestimmten Linienelementfolge* $\mathscr{L}_C(x(t), \dot{x}(t))$ (3.2) *und* (3.2a) *bestehen, so stimmen längs* $\mathscr{L}_C$ *auch die Übertragungsparameter* $''\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k$ *und* $''\Gamma_j{}^i{}_k$ *überein, ferner es ist*:

$$(4.11)\qquad {}'\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x) = {}'K_j{}^i{}_{km}(x, \dot{x}), \quad (x^i = x^i(t), \dot{x}^i = \dot{x}^i(t)).$$

Ist aber (3.2) *in einem n-dimensionalen Teilbereich* $\mathscr{B}_n$ *gültig, so besteht im ganzen* $\mathfrak{B}_n$ *neben* (4.11) *auch die Relation*:

$$(4.12)\qquad {}''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x) = {}^*K_j{}^i{}_{km}(x, r(x)),$$

wo die einzelnen Tensoren die Krümmungstensoren der entsprechenden Räume bedeuten (*vgl. unsere Formeln* (2.5), (2.6) *bzw.* [7], (7.11))[4]).

Beweis. Vor allem konstruieren wir von den Definitionsformeln (3.4) (a) und (3.4) (b) die zweite Übertragungsparameter $''\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k(x)$ des O_n-Raumes. In den O_n-Räumen ist immer die der Gleichung (2.1) analoge Gleichung:

$$(4.13)\qquad \partial_k \hat{P}^i_j(x) - {}'\hat{\Gamma}_j{}^t{}_k(x)\hat{P}^i_t(x) + {}''\hat{\Gamma}_t{}^i{}_k \hat{P}^t_j(x) = 0$$

gültig. Da $Det(\hat{P}^i_j) \neq 0$ in den O_n-Räumen immer vorausgesetzt wird, existiert der inverse Tensor $\hat{Q}^j_s(x) \equiv Q^j_s(x, r(x))$ von $\hat{P}^t_j(x)$, womit aus (4.13) nach einer Kontraktion mit $\hat{Q}^j_s$ die Übertragungsparameter $''\hat{\Gamma}_s{}^i{}_k$ eindeutig bestimmt werden können. Es ist

$$(4.14)\qquad {}''\hat{\Gamma}_s{}^i{}_k = \hat{Q}^j_s({}'\hat{\Gamma}_j{}^t{}_k \hat{P}^i_t - \partial_k \hat{P}^i_j).$$

Es ist nun nach (3.4) (b)

$$(4.15)\qquad \partial_k \hat{P}^i_j(x) = \partial_k P^i_j(x, r(x)) + \dot{\partial}_s P^i_j(x, r(x)) \partial_k r^s(x).$$

Besteht aber (3.2) längs der Linienelementfolge (3.2a), so geht (4.13) im Hinblick auf (4.15) direkt in die charakteristische Gleichung (2.1) der $F-O_n$-Räume über, was also längs $\mathscr{L}_C$, d.h. längs (3.2a) bestehen wird. Aus (4.14), (4.15) und (3.2)

4) Wir bemerken daß in [7], (7.11) in der Definition der Krümmungstensoren bezüglich unserer (für $'\hat{R}$ und $''\hat{R}$) im folgenden angebenden Formeln (vgl. (4.17)) eine Vorzeichenänderung stattfindet die aber offensichtlich unwesentlich ist.

folgt auch, daß längs $\mathscr{L}_C$, d.h. längs (3.2a):

(4.16) $$''\hat{\Gamma}_s{}^i{}_k(x(t)) = ''\Gamma_s{}^i{}_k(x(t), \dot{x}(t))$$

bestehen wird.

Der Krümmungstensor $'\hat{R}_j{}^i{}_{km}$ im O_n-Raum ist:

(4.17) $$'\hat{R}_j{}^i{}_{km} = (\partial_m{}'\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k + {}'\hat{\Gamma}_j{}^t{}_k{}'\hat{\Gamma}_t{}^i{}_m) - (k/m),$$

womit die Behauptung (4.11) des Satzes 3. leicht aus der Definitionsformel (3.4) (a) und aus der Gleichung (3.2) gefolgert werden kann. Offenbar wird (4.11) nur längs $\mathscr{L}_C$ gültig sein, da (3.2) nur längs (3.2a) als gültig angenommen wurde. Bei der Herleitung von (4.11) hat man selbstverständlich auch die Homogenität von $'\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ beachtet, falls $q_k \neq 0$ war.

Ist endlich (3.2) nicht nur längs $\mathscr{L}_C$, sondern im ganzen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ gültig, so folgt aus (4.14) auf Grund von (4.15) und (3.2), daß im ganzen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ außer (3.4) auch

(4.18) $$''\hat{\Gamma}_s{}^i{}_k(x) = ''\Gamma_s{}^i{}_k(x, r(x))$$

bestehen wird. Da der Tensor $''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x)$ dieselbe Form hat wie $'\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x)$ in (4.17), nur stehen hier statt $'\hat{\Gamma}$ die Übertragungsparameter $''\hat{\Gamma}$, erhält man aus (4.18) und (3.2) unmittelbar (4.12), womit der Satz 3. bewiesen ist.

Bemerkung. Auch das invariante Differential des oskulierenden affinen O_n-Raumes stimmt längs (3.2a) mit dem invarianten Differential des $F-O_n$-Raumes überein, was nach (3.4) (a) und (4.16) ebenso bewiesen werden kann, wie beim oskulierenden Riemann—Otsukischen Raum gemacht wurde. —

Letztens wollen wir noch den Zusammenhang von $''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x)$ mit dem Krümmungstensor (2.6) bestimmen, falls die Relation (3.2) nur längs einer Linienelementfolge (3.2a) besteht. Es gilt dann der

Satz 4. *Besteht* (3.2) *längs* (3.2a), *so ist längs* (3.2a):

(4.19) $$''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x) = {}^*K_j{}^i{}_{km}(x, \dot{x}) + (\dot{\partial}_s P^i_t) Q^t_j{}' K_t{}^s{}_{km} \dot{x}^t.$$

Beweis. Die Formel von $''\hat{R}_j{}^i{}_{km}$ (vgl. [7], (7.11), zweite Formel) ist:

(4.20) $$''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x) = (\partial_m{}''\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k + {}''\hat{\Gamma}_j{}^t{}_k{}''\hat{\Gamma}_t{}^i{}_m) - (k/m).$$

Wir beginnen die Berechnung dieses Tensors mit unseren Formeln (4.14) und (4.15) die wir durch

(4.21)
$$''\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k(x) = Q^t_j(x, r(x)) \{ '\Gamma_t{}^s{}_k(x, r(x)) P^i_s(x, r(x)) - \partial_k P^i_t(x, r(x)) - \dot{\partial}_s P^i_t(x, r(x)) \partial_k r^s(x) \}$$

angeben wollen, wo wir statt $\dot{x}^h$ überall die Funktion $r^h(x)$ eingeschrieben haben. In dieser Formel wurde (3.2a) nicht benützt, somit ist also (4.21) im ganzen Teilbereich $\mathfrak{B}_n$ gültig. Aus (2.1) erhält man nach einer Kontraktion mit $Q^j_h(x, \dot{x})$ nach einigen Indexvertauschungen für $''\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x})$ die Form:

(4.22) $$''\Gamma_j{}^i{}_k(x, \dot{x}) = Q^t_j(x, \dot{x}) \{ '\Gamma_t{}^s{}_k(x, \dot{x}) P^i_s(x, \dot{x}) - \partial_k P^i_t + (\dot{\partial}_s P^i_t(x, \dot{x}))' \Gamma_p{}^s{}_k \dot{x}^p \},$$

was im ganzen $F-O_n$-Raum besteht. Durch eine längere, aber elementare Rechnung erhält man aus (4.21) und (4.22), daß längs (3.2a)

$$\partial_m {}''\hat{\Gamma}_j{}^i{}_k = \partial_m {}''\Gamma_j{}^i{}_k - (\dot{\partial}_s {}''\Gamma_j{}^i{}_k)' \Gamma_p{}^s{}_m \dot{x}^p - \tag{4.23}$$

$$-Q^t_j \dot{\partial}_s P^i_t \{\partial^2_{km} r^s(x) - \partial_m {}'\Gamma_t{}^s{}_k \dot{x}^t + (\dot{\partial}_s {}'\Gamma_t{}^i{}_k \dot{x}^t)' \Gamma_p{}^s{}_m \dot{x}^p\}$$

besteht, wo man $\partial_k r^s$ durch (3.2) eliminiert hat, $\partial^2_{km} r^s(x)$ aber nicht herausfiel, da (3.2) nur längs (3.2a) bestand. Beachtet man die Formeln (4.20), (2.6) und

$$^*K_t{}^i{}_{km} \dot{x}^t \equiv (\partial_m {}'\Gamma_t{}^i{}_k \dot{x}^t + (\dot{\partial}_s {}'\Gamma_t{}^i{}_k \dot{x}^t)' \Gamma_p{}^s{}_m \dot{x}^p) - (k/m),$$

so erhält man aus (4.23) unmittelbar die beweisende Relation (4.19).

§ 5. Schlußbemerkungen

Die Formeln (2.4) und (2.6) zeigen, daß in den Linienelementräumen der Krümmungstensor $^*K_j{}^i{}_{km}$ die Rolle von $''K_j{}^i{}_{km}$ spielt. Nach dem Satz 1. stimmen diese Krümmungstensoren überein, falls (2.7) besteht. Nach (4.12) ist also in diesem Fall, d.h. wenn (2.7) besteht:

$$''\hat{R}_j{}^i{}_{km}(x) = {}''K_j{}^i{}_{km}(x, r(x))$$

gültig.

Literatur

[1] J. I. Horváth—A. Moór, Entwicklung einer einheitlichen Feldtheorie begründet auf die Finslersche Geometrie. *Physik* **131** (1952), 544—570.

[2] D. Laugwitz, Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. *Arch. Math.* **6** (1955), 448—453.

[3] D. Laugwitz, Die Vektorübertragung in der Finslerschen Geometrie und der Wegenergeometrie. *Indag. Math.* **18** (1956), 21—28.

[4] A. Moór, Über oskulierende Punkträume von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten. *Ann. of Math.* **56** (1952), 397—404.

[5] A. Moór, Über die Begründung von Finsler—Otsukischen Räumen und ihre Dualität. *Tensor (N. S.)* **37** (1982), 121—129.

[6] A. Nazim, Über Finslersche Räume. *Diss. München*, 1936.

[7] T. Ōtsuki, On general connections I. *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1960), 99—164.

[8] H. Rund, On the analytical properties of curvature tensors in Finsler spaces. *Math. Ann.* **127** (1954), 82—104.

[9] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces. Springer-Verlag. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*. 1959.

[10] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. *Monatshefte für Math. und Phys.* **50** (1941), 165—175.

[11] O. Varga, Über eine Klasse von Finslerschen Räumen die die nichteuklidischen verallgemeinern. *Comment. Math. Helv.* **19** (1946—1947), 367—380.

[12] O. Varga, Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen. *Publ. Math. (Debrecen)* **1** (1949), 116—122.

[13] O. Varga, Vektorfelder deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet. *Hung. Acta Math.* **1**. *No.* 4 (1949), 1—3.

(Eingegangen am 8. August 1983.)