О всегда сходящихся итерационных методах касательных выпуклых функций для решения нелинейных уравнений

МАГДОЛЬНА ВАРТЕРЕС (Дебрецен)

Abstract. For solving nonlinear equations Z. SZABÓ [1] worked out the always convergent iterations of second order generated by tangential parabolas, hyperbolas, ellipses and generally, by tangential special convex functions. In this paper a more general class of always convergent and second order iteration functions are given including all the iteration functions described in [1]. The derivation, the sufficient conditions of convergence and the error estimates of our iterative methods are described and proved.

1. Введение

Определение 1.1. Итерационный метод

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

который определяется функцией F, стационарен, основан на одной точке и вычисляет корни ($\alpha \in I$) функции $f\colon I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ обладает порядком сходимости p, если итерационная последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует и сходится ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$), кроме того найдётся вещественное число $p \geqq 1$, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = c \neq 0.$$

Определение 1.2. ([2], стр. 11.) Информационной эффективностью итерационного метода (1.1) называется выражение:

$$EFF = \frac{p}{q},$$

где p — порядок сходимости стационарного метода,
q — число новых значений функции $f^{(j)}(x_i)$, которые вычисляются в одном итерационном шаге.

Теорема 1.1. ([2], стр. 98.) *Для итерационного метода вида* (1.1) *выполняются следующие утверждения:*

1° *информационная эффективность метода* (1.1) *удовлетворяет неравенству*

$$EFF \leqq 1,$$

2° *для каждого натурального* p *найдётся итерационный метод вида* (1.1), *порядок сходимости которого равняется* p *и информационная эффективность равна единице,*

3° *определяющая функция каждого итерационного метода* (1.1) *порядка* p *содержит в себе явным образом все следующие функции:*

$$f, f', \ldots, f^{(p-1)}.$$

Определение 1.3. ([2], стр. 12.) В случае $EFF=1$ итерационный метод вида (1.1) называется оптимальным.

Среди итерационных методов типа (1.1) важное значение имеет оптимальный метод Ньютона—Рафсона второго порядка, который определяется функцией

$$F_{HP}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Этот метод был обобщён и модифицирован многими исследователями, но большая часть полученных методов состояла из не сходящихся методов. Известный метод Ньютона, определённый функцией

$$F(x) = x - \frac{|f(x)|}{M_1}$$

всегда сходится на сегменте $I=[a, b]$, если

$$|f'(x)| \leqq M_1, \quad x \in I,$$

но этот метод линейен ($p=1$).

В последние годы выработали ряд различных методов, в которых использовались методы интервальной арифметики, и которые — при выполнении некоторых строгих ограничений — всегда сходятся. При пользовании этими методами вообще требуется и условие:

$$f(a)f(b) < 0. \tag{1.2}$$

З. Сабо [1] в своих работах исследовал итерационные методы, которые не требуют использования арифметики интервалов и независимо от отношения (1.2) всегда сходятся. Такими методами являются например «метод гиперболы», «метод параболы», «метод эллипса» и «метод специальных касательных выпуклых функций», которые сходятся при выполнении не слишком строгих условий. Эти методы обладают порядком 2. В настоящей работе конструируется класс функций, которые определяют методы второго порядка, так что эти методы всегда сходятся и являются обобщениями методов З. Сабо [1].

Обозначения:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Пусть функция } f\colon [a, b]=I\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ дважды непрерывно} \\ \text{дифференцируема на сегменте } I, \text{ и кроме этого} \\ \text{выполняются следующие условия} \\ |f(x)| \leqq M \neq 0, \\ |f'(x)| \leqq M_1 \neq 0, \qquad x\in I \\ |f''(x)| \leqq M_2 \neq 0. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

α — корень функции f на сегменте I, $e_n = \alpha - x_n$ — погрешность итерационной точки x_n, $d_n = x_{n+1} - x_n$ — разность соседних точек итерации.

Определение 1.4. ([1/III], стр. 187.) Определяющая функция $F(x;\ r)$ итерационного метода называется всегда сходящейся на сегменте $I=[a, b]$ относительно функции f, если, исходя из любой точки $x_0 \in I$, такой что $f(x_0) \neq 0$, для последовательности итерационных точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$x_{n+1} = F(x_n; r),$$

и F стационарна, выполняются следующие условия:

1° $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность монотонна,

2° $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к ближайшему справа (или слева) по отношению к точке x_0 корню $\alpha \in I$, если вообще он существует, и так что в процессе итерации «параметр направления» r принимает значение последовательно 1 (или -1),

3° если такого корня $\alpha \in I$ не существует, то последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ выходит из сегмента I.

Класс таких функций, которые удовлетворяют вышеописанным условиям, будем обозначать символом $A(f, I)$. (A: always convergent methods)

2. Метод касательных выпуклых функций

$$(2.1)\ \begin{cases} \text{Пусть функция } g\colon (-h, h) = H \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ выпукла вниз и дважды непрерывно} \\ \text{дифференцируема на } H. \text{ Кроме этого выполняются следующие условия:} \\ g(0) = g'(0) = 0, \\ g''(x) > 0, \quad \text{если} \quad x \in H. \\ \text{Введём ещё одно обозначение:} \\ Q_1^* = \min \{|\inf\limits_{x \in H} g'(x)|, \sup\limits_{x \in H} g'(x)\}. \end{cases}$$

Предполагаем, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда прикасаемся в первом порядке паралельным переносом функцию

$$y = -s \cdot c \cdot g(x)$$

$$c > \frac{M_1}{Q_1^*}, \quad \frac{M_1}{\infty} \doteq 0$$

$$s \doteq \operatorname{sign}\big(f(x_0)\big)$$

к функции f в её точке $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$. Получаем функцию

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g(x-\mu) + \lambda.$$

Значения параметров μ, λ можем вычислить из условий:

$$G^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1.$$

Получим систему уравнений:

$$-s \cdot c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda = f(x_0),$$
$$-s \cdot c \cdot g'(x_0 - \mu) = f'(x_0).$$

В силу условий (2.1) функция g' обратима в данной точке, ибо

$$\left|-\frac{s}{c}f'(x_0)\right| \leqq \frac{Q_1^*}{M_1}|f'(x_0)| \leqq Q_1^*,$$

и так

$$\mu = x_0 - g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)$$

и

$$\lambda = f(x_0) + s\cdot c\cdot g\left[g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right].$$

Поэтому выпуклая функция, которая касается в первом порядке функции f в точке $(x_0,\ f(x_0))$, имеет вид:

$$G(x) = -s\cdot c\cdot g\left[x - x_0 + g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right] + \tag{2.2}$$

$$+f(x_0) + s\cdot c\cdot g\left[g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right].$$

Лемма 2.1. *Пусть выполняются условия* (1.3) *и* (2.1),

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{существует вещественное число } q>0, \textit{ что } q\leqq g''(x), \textit{ если} \\ \qquad x\in\left[a-b+g'^{-1}\left(-\dfrac{M_1}{c}\right);\ b-a+g'^{-1}\left(+\dfrac{M_1}{c}\right)\right]\cap H, \\ \textit{кроме того } \dfrac{M_2}{q}\leqq c. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Если в некоторой точке $x_0\in I$ значение функции $f(x_0)\neq 0$, то значение функции $G(x)$ по формуле (2.2), *на пересечении отрезка I и области определения функции $G(x)$,*

— *в случае $f(x_0)>0$ — не больше,*

— *в случае $f(x_0)<0$ — не меньше значении функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть сначала $s=1$. Под действием условий нашей леммы мы можем воспользоваться формулой Тэйлора для функций $f(x)$ и $G(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x-x_0)^2,$$

где $\xi = x_0 + \vartheta_1(x-x_0)$ и $\eta = x_0 + \vartheta_2(x-x_0)$, $\vartheta_1,\ \vartheta_2\in(0,\ 1)$. Очевидно, что функция разности

$$D(x) = f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}G''(\eta)(x-x_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f''(\xi) + c\cdot g''\left(\eta - x_0 + g'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right)\right](x-x_0)^2$$

на этой области неотрицательна. Нам теперь достаточно доказать следующее соотношение:

$$-f''(\xi) \leqq c \cdot g''\left(\eta - x_0 + g'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right)\right),$$

которое вытекает из условий леммы, то есть:

$$|f''(\xi)| \leqq M_2 \leqq M_2 \cdot \frac{g''(\eta')}{q} \leqq c \cdot g''(\eta'),$$

где

$$\eta' \doteq \eta - x_0 + g'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right) = g'^{-1}\left(-\frac{f'(x_0)}{c}\right) + \vartheta_2(x - x_0).$$

и отсюда

$$\eta' \in \left[a - b + g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right), \quad b - a + g'^{-1}\left(\frac{M_1}{c}\right)\right] \cap H.$$

Заметим, что в случае $s = -1$ доказательство проводится подобным образом.

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия* (1.3) *и* (2.1), *и обозначим верхнюю границу функции* $g(x)$ *через* Q

$$Q = \begin{cases} \sup\limits_{x \in H} g(x), & \text{если } g(x) \text{ ограничена} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того условимся в том, что $M/\infty \doteq 0$. *Предполагаем, что*

$$\frac{M}{Q - g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right)} < c \tag{2.4}$$

выполняется. Тогда функция $G(x)$, *по формуле* (2.2) *пересекает ось абсциссы в точках:*

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_1' \end{matrix}\right\} = x_0 - g'^{-1}\left(-\frac{s}{c} f'(x_0)\right) + g_{\pm}^{-1}\left[\frac{|f(x_0)|}{c} + g\left(g'^{-1}\left(-\frac{s}{c} f'(x_0)\right)\right)\right],$$

где

$$g(x) = \begin{cases} g_-(x), & \text{если} \quad x \leqq 0, \\ g_+(x), & \text{если} \quad x \geqq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть например $s = 1$. Сначала докажем, что кривая $y = G(x)$ пересекает ось абсциссы. Это утверждение в случае $Q = \infty$ очевидно выполняется. Пусть теперь функция $g(x)$ ограничена. По (2.4) очевидно

$$M + c \cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right) < c \cdot Q. \tag{2.4*}$$

Это значит, что функцию $g(x)$ вытянем трансформацией так, что её «ось» $(c \cdot Q)$ была бы длиннее расстояния её сдвига по направлении ординаты. Но расстояние сдвига по ординате может быть ограниченным в том случае, когда кривая прикасается в первом порядке к функции f в её точке, через которую она переходит с максимальным наклоном (M_1), и расстояние которой от оси абсциссы (M) окажется самым большим. Тогда из следующей системы уравнений

$$-c \cdot g(x_0-\mu)+\lambda^* = M,$$
$$-c \cdot g'(x_0-\mu) = M_1$$

можем вычислить этот максимальный сдвиг с параметром λ^*

$$\lambda^* = M+c \cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right).$$

Отсюда вытекает по (2.4∗), что кривая $y=G(x)$ пересекает ось абсциссы. Точки пересечения даются решениями уравнения $G(x)=0$. В случае $s=-1$ доказательство проводится подобным образом.

Теорема 2.1. *Если выполняются условия* (1.3), (2.1), (2.3) *и* (2.4), *тогда*

$$F(x; r) = x-g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x)\right)+ \tag{2.5}$$

$$+g_r^{-1}\left[\frac{|f(x)|}{c}+g_-^r\left(g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x)\right)\right)\right]\in A(f; I)$$

где $s=\operatorname{sign}(f(x_0))$.

Доказательство. Пусть сначала $f(x_0)>0$. Обозначим корни функции $G(x)$ через x_1 и x_1', и предположим, что $x_1'<x_1$. Согласно лемме (2.1) $0\leqq G(x)\leqq f(x)$, для любого $x\in[x_1', x_1]\cap I$. Если $x_1, x_1'\in I$, то очевидно

$$0 = G(x_1') \leqq f(x_1'),$$
$$0 = G(x_1) \leqq f(x_1)$$

выполняются. Если вместо точки x_0 повторим наш метод с точкой x_1, то получаем точку x_2, и так продолжая процесс, создаётся последовательность монотонно неубывающих точек итерации:

$$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \dots .$$

Для каждой точки последовательности справедливо

$$f(x_n) \geqq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Сначала рассмотрим случай

$$f(x_n) \neq 0 \quad \text{и} \quad x_n\in I, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Тогда последовательность строго монотонно возрастает и ограничена, следовательно она сходится:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha\in I.$$

$F(x; r)$ непрерывна, поэтому α является её неподвижной точкой и так $f(\alpha)=0$. Пусть теперь существует индекс $i>0$ так, что

$$f(x_i) = 0, \quad x_i \in I.$$

Тогда $x_{i+1}=F(x_i)=x_i$, следовательно $x_{i+k}=x_i$ для $k=1, 2, \dots,$ и можно утверждать следующее:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_i = \alpha \in I, \quad f(\alpha) = 0.$$

Пусть теперь $f(x_n)\neq 0$, $x_n \in I$ для $n=0, 1, \dots, i-1$, и $x_i \notin I$. Согласно лемме (2.1) функция f не исчезает на сегменте $[x_0, b]$.

Точно таким же образом можно изучать следующую монотонно невозрастающую последовательность точек

$$x_0, x_1', x_2', \dots,$$

только в этом случае областью нашего исследования является сегмент $[a, x_0]$. Наконец, если выполняется $f(x_0)<0$, то доказательство проводится таким же путём.

Оценка погрешности метода выпуклых функций содержится в следующей теореме:

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (1.3), (2.1), (2.3) *и* (2.4). *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *которая получается при помощи итерационной функции* (2.5), *и начальной точкой, которой является точка* $x_0 \in I$, *сходится к однократному корню* $\alpha \in I$ *функции* f, *и кроме этого выполняются соотношения:*

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{cases} 0 < m_1 \leqq |f'(x)|, \quad \textit{для} \quad x \in [x_0, \alpha] \subset I \\ g''(x) \leqq Q_2, \quad \textit{для} \\ x \in \left[g_-^{-1}\left(\dfrac{M}{c} + g\left(g'^{-1}\left(-\dfrac{M_1}{c}\right)\right)\right),\ g_+^{-1}\left(\dfrac{M}{c} + g\left(g'^{-1}\left(-\dfrac{M_1}{c}\right)\right)\right)\right]. \end{cases}$$

Тогда для погрешности e_{n+1} *итерационной точки* x_{n+1} *справедливы следующие оценки:*

$$1^\circ \ |e_{n+1}| \leqq \frac{\dfrac{c}{2} Q_2 + M_2}{m_1} |e_n|^2,$$

$$2^\circ \ |e_{n+1}| \leqq \frac{c}{2} \frac{M_2 \cdot Q_2}{m_1^2} |d_n|^3 + \left(\frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} + \frac{M_1 \cdot M_2}{m_1^2} \right) d_n^2.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x_0)>0$ и $x_0<\alpha$. Так как корень α однократен,

$$f'(x) < 0, \quad \text{если} \quad x \in [x_0, \alpha].$$

Предполагаем, что $f(x_n)\neq 0$, для $n=0, 1, 2, \dots$. (Если $f(x_n)=0$ для некоторой «n», то $x_{n+1}=x_n=\alpha$, следовательно в этом случае утверждение нашей теоремы справедливо.) Пусть «n» любое неотрицательное целое число. Тогда при данных нам условиях можно применять формулу Тэйлора для функции $G(x)$ касающейся в первом порядке функции $f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$:

$$G(x) = G(x_n)+G'(x_n)(x-x_n)+\frac{1}{2}G''(\eta)(x-x_n)^2,$$

где $\eta\in(x_n, x)$. Так, как порядок касания равен единице, последнюю формулу можно записать в виде

$$G(x) = f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+\frac{1}{2}G''(\eta)(x-x_n)^2.$$

Обозначим корень из $[x_n, \alpha]$ функции $G(x)$ через x_{n+1}. Тогда имеем

$$f(x_n) = -\frac{1}{2}G''(\eta)\,d_n^2-f'(x_n)\,d_n,$$

где $\eta\in(x_n, x_{n+1})$, и так η занимает место между корнями функции $G(x)$. Применяя равенство $G''(\eta)=-c\cdot g''(\eta-\mu)$, и вводя новый символ $\eta'\doteq\eta-\mu$, можно записать:

(2.7)
$$f(x_n) = \frac{c}{2}g''(\eta')\,d_n^2-f'(x_n)\,d_n,$$

$$\text{где}\quad \eta'\in\left[g_-^{-1}\left(\frac{M}{c}+g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right)\right),\ g_+^{-1}\left(\frac{M}{c}+g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right)\right)\right].$$

Это последнее соотношение для η' выполняется благодаря следующему факту: знаем, что η точка из интервала между корнями функции $G(x)$. А функцию $G(x)$ мы получали из функции $g(x)$ с помощью трансформации

$$G(x) = -c\cdot g(x-\mu)+\lambda.$$

Тогда η' попадёт в ту часть области определения функции g, которая определяется сегментом $\left[g_-^{-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right), g_+^{-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right]$. Имея в виду выводы доказательства леммы 2.2 выполняется соотношение

$$\lambda\leqq\lambda^* = M+c\cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right)\right).$$

Так, как функция g монотонна, можно записать

$$\eta'\in\left[g_-^{-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right),\quad g_+^{-1}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right]\subseteqq\left[g_-^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{c}\right),\quad g_+^{-1}\left(\frac{\lambda^*}{c}\right)\right].$$

Отсюда по (2.6) получаем

(2.8)
$$g''(\eta')\leqq Q_2.$$

$$0\neq -f(x_n) = f(\alpha)-f(x_n) = f'(\xi)e_n,\quad \xi\in(x_n, \alpha),$$

поэтому

$$e_{n+1} = e_n-d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}-d_n.$$

Отсюда по (2.7) и (2.8)

$$|e_{n+1}| = \left| -\frac{c}{2}\frac{g''(\eta')}{f'(\xi)}\, d_n^2 + \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\, d_n - d_n \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{2}\frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|}\, d_n^2 + \frac{|f'(\xi)-f'(x_n)|}{|f'(\xi)|}\, |d_n| =$$

$$= \frac{c}{2}\frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|}\, d_n^2 + \frac{|f''(\tau)|\cdot|\xi - x_n|}{|f'(\xi)|}\, |d_n| \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1}\, d_n^2 + \frac{M_2}{m_1}\, |\xi - x_n|\cdot|d_n|,$$

где $\tau\in(x_n, \xi)$. Применяя соотношения $|d_n|\leqq|e_n|$ и $|\xi - x_n|<|e_n|$ получаем:

$$|e_{n+1}| \leqq \frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1}|e_n|^2 + \frac{M_2}{m_1}|e_n|^2 = \frac{\frac{c}{2}Q_2 + M_2}{m_1}\,|e_n|^2.$$

Наконец, при помощи соотношения

$$|\xi - x_n| < |e_n| = \frac{1}{|f'(\xi)|}\left(\frac{c}{2}\, g''(\eta')\, d_n^2 + |f'(x_n)|\cdot|d_n|\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1}\, d_n^2 + \frac{M_1}{m_1}\,|d_n|$$

получается оценка погрешности

$$|e_{n+1}| \leqq \frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1}\, d_n^2 + \frac{M_2}{m_1}\frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1}\, d_n^2|d_n| + \frac{M_2}{m_1}\cdot\frac{M_1}{m_1}\cdot|d_n|\,|d_n| =$$

$$= \frac{c}{2}\frac{M_2 Q_2}{m_1^2}\,|d_n|^3 + \left(\frac{c}{2}\frac{Q_2}{m_1} + \frac{M_1 M_2}{m_1^2}\right) d_n^2.$$

Доказательство теоремы в остальных трёх случаях, которые соответствуют комбинациям знаков величин $\alpha - x_0$ и $f(x_0)$, проводится точно таким же путём.

Теорема 2.3. *Метод выпуклых функций, в случае однократного корня, является оптимальным и методом второго порядка.*

Доказательство. Имея в виду, что в случае однократного корня оценка погрешности нашего итерационного метода имеет форму согласно теореме 2.2

$$|e_{n+1}| \leqq \zeta\,|e_n|^2, \quad \text{где} \quad \zeta < \infty,$$

можно утверждать, что порядок сходимости итерации $p\geqq 2$. С другой стороны наш метод основан на одной точке и стационарен, поэтому согласно утверждению 1° теоремы 1.1 для его итерационной эффективности справедливо следующее соотношение:

$$EFF=\frac{p}{q}\leqq 1.$$

То есть p не может быть больше числа новых значений функций $f^{(j)}(x_i)$, которые вычисляются в одном итерационном шаге. Это число у нас 2. И так

$$p\leqq q=2,$$

следовательно $p=2$ и $EFF=1$.

3. Частные случаи

В этом разделе рассматриваются несколько функций, которые обладают свойствами (2.1). Посмотрим, какие итерации они генерируют.

Сначала рассмотрим функцию

$$g(x)=x^2,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Тогда $Q=\infty$, $Q_1^*=\infty$ и $q_2=2$. Если $c\geqq M_2/2$, то выполняются условия (2.1), (2.3) и (2.4). Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y)=\pm\sqrt{y},$$

$$g'^{-1}(y)=\frac{1}{2}y,$$

то, если пологаем $c=M_2/2$, функция (3.1) порождает итерационную функцию

$$F(x;r)=x+\operatorname{sign}(f(x_0))\frac{f'(x)}{M_2}+r\sqrt{2\frac{|f(x)|}{M_2}+\frac{f'^2(x)}{M_2^2}}\in A(f;\ I). \tag{3.2}$$

А теперь рассмотрим выпуклую функцию

$$g(x)=\sqrt{1+x^2}-1,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.3}$$

В этом случае $Q=\infty$ и $Q_1^*=1$. Если $c>M_1$, тогда нижней границей для второй производной функции $g(x)$

$$g''(x)=+\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}},\quad x\in\mathbf{R}$$

на сегменте

$$\left[-d+g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right),\quad d+g'^{-1}\left(+\frac{M_1}{c}\right)\right]=\left[-d-\frac{M_1}{\sqrt{c^2-M_1^2}},\quad d+\frac{M_1}{\sqrt{c^2-M_1^2}}\right]$$

$(d\doteq b-a)$ является выражение

$$q_2=\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(d+\frac{M_1}{\sqrt{c^2-M_1^2}}\right)^2\right]^3}}.$$

И так, для выполнения условий леммы 2.1 достаточно потребовать соотношения

$$c \geqq \max\left\{\sqrt{2}\,M_1,\ \sqrt{(d^2+2d+2)^2}M_2\right\}.$$

То есть, если « с » удовлетворяет это неравенство, то выполняются условия (2.1), (2.3) и (2.4). Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y) = \pm\sqrt{y(y+2)},$$

$$g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

получаем итерационную функцию:

(3.4)

$$F(x;\,r) = x+\operatorname{sign}\big(f(x_0)\big)\frac{f'(x)}{\sqrt{c^2-f'^2(x)}}+r\sqrt{\left[\frac{|f(x)|}{c}+\frac{c}{\sqrt{c^2-f'^2(x)}}\right]^2-1}\in A(f;\ I).$$

Наконец рассмотрим выпуклую функцию

$$g(x) = 1-\sqrt{1-x^2},\quad x\in(-1,\,1). \tag{3.5}$$

Теперь $Q_1^*=\infty$, $q_2=1$ и $Q=1$. Если неравенства

$$c \geqq M_2$$

и

$$c > \sqrt{\frac{M^2+\sqrt{M^4+4M^2M_1^2}}{2}}$$

выполняются одновременно, то выполняются и условия (2.1), (2.3) и (2.4). Пусть

$$c = \max\left\{M_2,\ \sqrt{\frac{M^2+\sqrt{M^4+4M^2M_1^2}+1}{2}}\right\}.$$

Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y) = \pm\sqrt{1-(1-y)^2},$$

$$g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

функция (3.5) порождает итерационную функцию

(3.6)

$$F(x;\,r) = x+\operatorname{sign}\big(f(x_0)\big)\frac{f'(x)}{\sqrt{c^2+f'^2(x)}}+r\sqrt{1-\left[\frac{|f(x)|}{c}-\frac{c}{\sqrt{c^2+f'^2(x)}}\right]^2}\in A(f;I)$$

Итерационные функции (3.2), (3.4) и (3.6) являются итерационными функциями методов параболы, гиперболы и эллипса, которые опубликованы З. Сабо [1].

Литература

[1] Z. Szabó, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I—II—III., *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233; **21** (1974), 285—293; **27** (1980), 185—200.

[2] J. F. Traub, Iterative methods for the solution of equations, *Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J.* 1964.