О вещественных групповых алгебрах групп с бесконечной циклической подгруппой конечного индекса

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Алгеброй типа E над произвольным полем K называем скрещенное произведение A тела T, содержащего в своем центре поле K, с бесконечной циклической группой (a) или с бесконечной группой диэдра D:

$$A = \{T, a\};\ \lambda a = a\lambda^{\varphi},$$

$$A = \{T, a, b\};\quad \lambda a = a\lambda^{\varphi};\quad \lambda b = b\lambda^{\psi};\quad b^{-1}ab = \gamma a^{-1};\quad b^2 = \mu,$$

где $\lambda, \gamma, \mu \in T$; φ, ψ — автоморфизмы тела T, оставляющие на месте элементы поля K.

В работах [2] и [3] дается описание всех алгебр типа E над полем вещественных чисел.[1]) Для однозначности обозначений запишем здесь всех их опять.

Если $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел, $\mathbf{Q}$ — тело кватернионов, (a) — бесконечная циклическая группа, D — бесконечная группа диэдра, заданная соотношениями

$$D = (a) \cdot (b);\quad b^{-1}ab = a^{-1};\quad b^2 = 1,$$

то всех алгебр типа E над $\mathbf{R}$ имеется 15:

$$A_1 = \mathbf{R}(a);\quad A_2 = \mathbf{C}(a);\quad A_3 = \mathbf{Q}(a),$$

которые являются групповыми алгебрами группы (a),

$$A_4 = \{\mathbf{C}, a\};\quad \lambda a = a\bar{\lambda}$$

($\lambda \in C$, $\bar{\lambda}$ — сопряженная с λ) — скрещенное произведение поля $\mathbf{C}$ с группой (a),

$$A_5 = \mathbf{R}D;\quad A_6 = \mathbf{C}D;\quad A_7 = QD -$$

групповые алгебры группы D, и

$$A_8 = \{\mathbf{R}, a, b\};\quad \lambda a = a\lambda;\quad \lambda b = b\lambda;\quad b^{-1}ab = -a^{-1};\quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

$$A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\};\quad \lambda a = a\lambda;\quad \lambda b = b\lambda;\quad b^{-1}ab = a^{-1};\quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

[1]) В работе [2] из классификации выпущены типы алгебр, которые в этой статье обозначены через A_{12} и A_{15}.

$$A_{10} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$
$$A_{11} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$
$$A_{12} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$
$$A_{13} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$
$$A_{14} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$
$$A_{15} = \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q) -$$

скрещенные произведения полей $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ и тела Q с группой D.

В настоящей работе мы покажем, что все вещественные алгебры типа E реализуются в вещественных групповых алгебрах, то есть для любой фиксированной алгебры A_i $(i=1, \ldots, 15)$ типа E существует такая группа G_i, что групповая алгебра $\mathbf{R}G_i$ группы G_i над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ содержит идеал, который как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре A_i.

Лемма 1. *Пусть R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $C_1 = R_1(i)$, $(i \in \mathbf{C},\ i^2 = -1)$ и (b) — циклическая группа 4-го порядка, $e = 1/2(1-b^2)$. Тогда идеал $R_1(b)e$ групповой алгебры $R_1(b)$ изоморфен полю C_1.*

Доказательство. Каждый элемент $x \in R_1(b)e$ однозначно представляется в виде

$$x = \sum_{j=0}^{3} \lambda_j b^j e = (\lambda_0 - \lambda_2)e + (\lambda_1 - \lambda_3)be = \alpha_0 + \alpha_1 be \quad (\lambda_j, \alpha_k \in R_1),$$

так как $b^2 e = -e$. Отображение

$$\Theta\colon\ \alpha_0 e + \alpha_1 be \to \alpha_0 + \alpha_1 i$$

кольца $R_1(b)e$ на поле C_1, очевидно, является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $Q_1 = R_1(i, j, k)$, где $1, i, j, k$ — базис тела кватернионов Q, и $\mathcal{D}_1$ — группа кватернионов:*

$$\mathcal{D}_1 = (b)\cdot(c); \quad b^4 = c^4 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{-1}, \quad b^2 = c^2.$$

Пусть $e = 1/2(1-b^2)$. Тогда идеал $R_1\mathcal{D}_1 e$ групповой алгебры $R_1\mathcal{D}_1$ изоморфен телу Q_1.

Доказательство. Так как

$$(be)^2 = (ce)^2 = (bce)^2 = -e;$$
$$be \cdot ce = bce; \quad ce \cdot bce = be; \quad bce \cdot be = ce;$$
$$ce \cdot be = -bce; \quad bce \cdot ce = -be; \quad be \cdot bce = -ce,$$

и каждый элемент идеала $R_1\mathcal{D}_1 e$ однозначно представляется в виде

$$x = \alpha_0 e + \alpha_1(be) + \alpha_2(ce) + \alpha_3(bce) \quad (\alpha_{ji} \in R_1),$$

то отображение

$$\Theta:\ x \to \alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$$

является изоморфизмом идеала $R_1\mathscr{D}_1 e$ и тела Q_1. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть H — произвольная группа, R_1 — любое подполе поля вещественных чисел и поле $C_1=R_1(i)$ — расширение поля R_1 присоединением комплексного числа i. Тогда групповая алгебра C_1H как R_1-алгебра R_1-изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры R_1H_1.*

Доказательство. Пусть H_1 — прямое произведение

$$H_1=(b)\times H$$

циклической группы 4-го порядка (b) с группой H. Рассмотрим идемпотент $e=1/2(1-b^2)$ групповой алгебры R_1H_1. Покажем, что идеал R_1H_1e как R_1-алгебра R_1-изоморфен R_1-алгебре C_1H. Действительно, каждый элемент идеала R_1H_1e представляется в виде

$$x=\sum_j \mu_j h_j b^j e=\sum_j \alpha_j h_j,$$

где $\mu_j\in R_1$, $\mu_j b^j e=\alpha_j\in R_1(b)e$, $h_j\in H$. Согласно лемме 1, идеал $R_1(b)e$ изоморфен полю C_1. Пусть $\alpha_j'\in C_1$ — образ элемента $\alpha_j\in R_1(b)e$ при этом изоморфизме. Тогда отображение

$$\psi:\ \sum_j \alpha_j h_j \to \sum_j \alpha_j' h_j \quad (h_j\in H)$$

очевидно является R_1-изоморфизмом R_1-алгебр R_1H_1e и C_1H. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть H — произвольная группа, R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $Q_1=R_1(i,j,k)$, где $1,i,j,k$ базис тела кватернионов. Тогда групповая алгебра Q_1H как R_1-алгебра R_1-изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры R_1H_2.*

Доказательство. Пусть $H_2=H\times\mathscr{D}_1$ — прямое произведение группы H и группы кватернионов

$$\mathscr{D}_1=(b)\cdot(c);\quad b^4=c^4=1;\quad b^{-1}cb=c^{-1};\quad b^2=c^2.$$

Рассмотрим идемпотент $e=1/2(1-b^2)$. Каждый элемент x идеала R_1H_2e групповой алгебры R_1H_2 записывается в виде

$$x=\Sigma\lambda_j h_j d_j e=\Sigma\alpha_j h_j$$

где $\lambda_j\in R_1$, $h_j\in H$, $d_j\in\mathscr{D}_1$, $\alpha_j=\lambda_j d_j e\in R_1\mathscr{D}_1 e$. Согласно лемме 2, идеал $R_1\mathscr{D}_1 e$ изоморфен телу Q_1, поэтому отображение

$$\varphi:\ \Sigma\alpha_j h_j \to \Sigma\alpha_j' h_j,$$

где $\alpha_j'\in Q_1$ — образ элемента α_j в изоморфизме $R_1\mathscr{D}_1 e\cong Q_1$, является R_1-изоморфизмом R_1-алгебр R_1H_2e и Q_1H. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для каждой алгебры A_i $(i=1, 2, 3, 5, 6, 7)$ существуют вещественные групповые алгебры $\mathbf{R}G_i$, содержащие идеал I_i, $\mathbf{R}$-изоморфный $\mathbf{R}$-алгебре A_i.*

Доказательство. A_1 сама является вещественной групповой алгеброй. Для алгебры $A_2=\mathbf{C}(a)$ рассмотрим прямое произведение

$$G_2 = (a)\times(b)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 4-го порядка (b). Используя лемму 3, получаем, что идеал $\mathbf{R}G_2e$, порожденный идемпотентом $e=1/2(1-b^2)$, $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре A_2.

В случае алгебры $A_3=Q(a)$ рассмотрим прямое произведение

$$G_3 = \mathscr{D}_1\times(a)$$

группы кватернионов $\mathscr{D}_1$ и бесконечной циклической группы (a). Используя лемму 4, получаем, что идеал $\mathbf{R}G_3e$ вещественной групповой алгебры $\mathbf{R}G_3$, порожденный идемпотентом $e=1/2(1-c^2)$, $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре A_3.

A_5 сама является групповой алгеброй над $\mathbf{R}$.

Для алгебры $A_6=\mathbf{C}D$ рассмотрим прямое произведение

$$G_6 = \mathscr{D}_1\times(d)$$

бесконечной группы диэдра $\mathscr{D}_1$ и циклической группы 4-го порядка (d). Применяя лемму 3, получаем, что идеал $\mathbf{R}G_6e$, порождённый идемпотентом $e=1/2(1-d^2)$, как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре $\mathbf{C}D$.

В случае алгебры $A_7=QD$ строим прямое произведение

$$G_7 = D\times\mathscr{D}_1$$

бесконечной группы диэдра D и группы кватернионов $\mathscr{D}_1$. Тогда, в силу леммы 4, идеал $\mathbf{R}G_7e$, порожденный идемпотентом $e=1/2(1-c^2)$, как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре QD. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $A_4=\{\mathbf{C}, a\}$—скрещенная групповая алгебра бесконечной циклической группы (a) над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, причем $\lambda a=a\bar{\lambda}$ $(\lambda\in\mathbf{C})$. Пусть группа G—полупрямое произведение*

$$G = (b)\cdot(a);\quad a^{-1}ba = b^3,\quad b^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка (b) на бесконечную циклическую группу (a). Тогда идеал $\mathbf{R}Ge$, порождённый идемпотентом $e=1/2(1-b^2)$, как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре A_4.

Доказательство. Согласно лемме 1 кольцо $\mathbf{R}(b)e$ изоморфно полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Каждый элемент $x\in\mathbf{R}Ge$ однозначно записывается в виде

$$x = \Sigma\lambda_j g_j e = \Sigma a^j\gamma_j e = \Sigma a^j\alpha_j,$$

где $\lambda_j\in\mathbf{R}$, $g_j\in G$, $\gamma_j\in\mathbf{R}(b)$, $\alpha_j\in\mathbf{R}(b)e$. Рассмотрим отображение

$$\psi\colon\ \Sigma a^j\alpha_j\to\Sigma a^j\alpha_j'$$

идеала $\mathbf{R}Ge$ на алгебру A_4, где α'_j — образ элемента $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$ в $\mathbf{C}$ при изоморфизме $\mathbf{R}(b)e \overset{\varphi}{\cong} \mathbf{C}$. Очевидно, ψ является взаимно однозначным, выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Покажем, что имеет место равенство $a\alpha'_j = \overline{\alpha'_j}a$, где $\overline{\alpha'_j}$ — число, комплексно сопряженное с $\alpha'_j \in \mathbf{C}$. Действительно, каждый элемент $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$ представляется в виде

$$\alpha_j = \beta e + \beta_1 be \quad (\beta, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Тогда

$$a\alpha_j = a(\beta e + \beta_1 be) = \beta ea + \beta_1 b^{-1}ea = (\beta e + \beta_1 b^{-1}e)a.$$

Но образ элемента $\beta e + \beta_1 b^{-1} e \in \mathbf{R}(b)e$ в поле $\mathbf{C}$ при изоморфизме φ какраз $\overline{\alpha'_j}$. Следовательно, умножение элементов в алгебре $\mathbf{R}Ge$ подчиняется тем же законам, что и в $\mathbf{R}$-алгебре A_4. Значит, ψ есть $\mathbf{R}$-изоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр $\mathbf{R}Ge$ и A_4. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для алгебр A_i $(i=8, 9)$ существуют такие группы G_i, что A_i как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры $\mathbf{R}G_i$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала A_8—скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра D над полем вещественных чисел с определяющими соотношениями

$$\lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}). \tag{1}$$

Пусть H—прямое произведение

$$H = (a) \times (c)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 2-го порядка (c), а группа G_8—полупрямое произведение

$$G_8 = H \cdot (b); \quad bc = cb; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c; \quad b^2 = c^2 = 1$$

группы H на циклическую группу 2-го порядка (b). Покажем, что идеал $\mathbf{R}G_8e$, порожденный идемпотентом $e = 1/2(1-c)$, как $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{R}$-изоморфен $\mathbf{R}$-алгебре A_8. Действительно, каждый элемент идеала $\mathbf{R}G_8e$ представляется в виде

$$x = \Sigma \lambda_j a^j b^{\delta_j} e = \Sigma \lambda_j d_j e \quad (\lambda_j \in \mathbf{R};\ 0 \leqq \delta_j < 2;\ d_j \in D),$$

так как $ce = -e$. Отображение

$$\psi\colon\ \Sigma \lambda_j d_j e \to \Sigma \lambda_j d_j$$

идеала $\mathbf{R}G_8e$ на алгебру A_8 является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $\mathbf{R}$-алгебр $\mathbf{R}G_8e$ и A_8, так как $\psi(ae) = a$; $\psi(be) = b$; $\psi(ce) = c$; $\psi(e) = 1$ и выполняются равенства (1):

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}ce = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e.$$

Рассмотрим алгебру $A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\}$—скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра D над полем $\mathbf{R}$ с определяющими соотношениями

$$\lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}). \tag{2}$$

Пусть группа G_9—полупрямое произведение

$$G_9 = (a)\cdot(b), \quad b^4 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1}$$

бесконечной циклической группы (a) на циклическую группу 4-го порядка (b). Каждый элемент x идеала $\mathbf{R}G_9e$, порожденного идемпотентом $e=1/2(1-b^2)$, представляется в виде

$$x = \Sigma\lambda_j d_j e,$$

где $\lambda_j \in \mathbf{R}$, $d_j \in D$, так как $b^2e=-e$. Тогда отображение

$$\varphi\colon\ \Sigma\lambda_j d_j e \to \Sigma\lambda_j d_j$$

идеала $\mathbf{R}G_9e$ на A_9 является взаимно однозначным. Ясно, что $\varphi(ae)=a$; $\varphi(be)=b$, $\varphi(e)=1$. Так как

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (ae)^{-1}; \quad (be)^2 = b^2e = -e,$$

то есть в $\mathbf{R}G_9e$ выполняются равенства (2), то отображение φ является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $\mathbf{R}$-алгебр $\mathbf{R}G_9e$ и A_9. Теорема доказана.

Теорема 4. *Для алгебр A_i $(i=10, 11)$ существуют такие группы G_i, что $\mathbf{R}$-алгебра A_i $\mathbf{R}$-изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры $\mathbf{R}G_i$.*

Доказательство. Алгебры A_{10} и A_{11} заданы определяющими соотношениями

(3) $$\lambda a = a\bar\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \qquad b^2 = 1 \quad (\lambda\in\mathbf{C}),$$

(4) $$\lambda a = a\bar\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda\in\mathbf{C}).$$

Пусть группа H—полупрямое произведение

$$H = (c)\cdot(a); \quad a^{-1}ca = c^{-1}; \quad c^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка (c) на бесконечную циклическую группу (a). Рассмотрим полупрямые произведения

(5) $$G_{10} = H\cdot(b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \qquad bc = cb,$$

(6) $$G_{11} = H\cdot(b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^2; \quad bc = cb$$

группы H на циклическую группу 2-го порядка (b) с определяющими соотношениями (5) и (6).

Согласно лемме 1, идеал $\mathbf{R}(c)e$, порожденный идемпотентом $e=1/2(1-c^2)$, изоморфен полю комплексных чисел $\mathbf{C}$:

$$\varphi\colon\ \mathbf{R}(c)e \cong \mathbf{C}.$$

Нетрудно заметить, что каждый элемент идеалов $\mathbf{R}G_{10}e$ и $\mathbf{R}G_{11}e$ однозначно представляется в виде

$$x = \Sigma\lambda_j a^j c^{\delta_j} b^{\gamma_j} e = \Sigma d_j \alpha_j,$$

где $\alpha_j \in \mathbf{R}$; $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$; $d_j \in D$; $0 \leqq \delta_j < 4$; $0 \leqq \gamma_j < 2$, так как $c^2 e = -e$. Покажем, что отображение

$$\psi\colon \Sigma\alpha_j d_j \to \Sigma\alpha'_j d_j,$$

где $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}$, является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $\mathbf{R}$-алгебр $\mathbf{R}G_{10}e \cong A_{10}$ и $\mathbf{R}G_{11}e \cong \cong A_{11}$. Действительно, ψ очевидно является взаимно однозначным отображением на всю алгебру A_{10} (также на A_{11}) и выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Значит достаточно показать, что в $\mathbf{R}$-алгебре $\mathbf{R}G_{10}e$ ($\mathbf{R}G_{11}e$) выполняются условия (3) (соответственно (4)). В случае обоих алгебр $\psi(e)=1$; $\psi(ce)=i$; $\psi(ae)=a$; $\psi(be)=b$ и каждый элемент $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$ представляется в виде

$$\alpha_j = \beta_0 e + \beta_1 ce \quad (\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Поэтому, используя соотношения (5), в алгебре $\mathbf{R}G_{10}e$ имеют место равенства

$$\alpha_j b = b\alpha_j$$

$$a\alpha_j = a(\beta_0 e + \beta_1 ce) = \beta_0 ea + \beta_1 c^{-1} ea = (\beta_0 e + \beta_1 c^{-1} e)a.$$

Однако

$$\varphi(\beta_0 e + \beta_1 c^{-1} e) = \overline{\alpha'_j},$$

то есть

$$a\alpha'_j = \overline{\alpha'_j}a.$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2 e = e,$$

значит в $\mathbf{R}G_{10}e$ условия (3) выполняются.

Точно так же можно показать, что в алгебре $\mathbf{R}G_{11}e$

$$b\alpha_j = \alpha_j b \quad (\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e),$$

$$a\alpha'_j = \bar{\alpha}'_j a \quad (\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}),$$

кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}c^2 e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2 e = e,$$

то есть в $\mathbf{R}G_{11}e$ условия (4) выполняются. Теорема доказана.

Теорема 5. *Для каждой алгебры* A_i ($i=12, 13, 14$) *существует такая группа* G_i, *что* $\mathbf{R}$-*алгебра* A_i $\mathbf{R}$-*изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры* $\mathbf{R}G_i$.

Доказательство. Алгебры A_{12}, A_{13}, A_{14} задаются определяющими соотношениями

(7) $A_{12} = \{\mathbf{C}, a, b\}$; $\lambda a = a\lambda$; $\lambda b = b\bar{\lambda}$; $b^{-1}ab = a^{-1}$; $b^2 = 1$ $(\lambda \in \mathbf{C})$,

(8) $A_{13} = \{\mathbf{C}, a, b\}$; $\lambda a = a\lambda$; $\lambda b = b\bar{\lambda}$; $b^{-1}ab = -a^{-1}$; $b^2 = 1$ $(\lambda \in \mathbf{C})$,

(9) $A_{14} = \{\mathbf{C}, a, b\}$; $\lambda a = a\lambda$; $\lambda b = b\bar{\lambda}$; $b^{-1}ab = a^{-1}$; $b^2 = -1$ $(\lambda \in \mathbf{C})$.

Пусть группа H—прямое произведение

$$H=(a)\times(c)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 4-го порядка (c). Рассмотрим полупрямые произведения группы H на циклическую группу (b) с определяющими соотношениями

$$G_{12}=H\cdot(b);\quad b^2=1;\quad b^{-1}ab=a^{-1};\quad b^{-1}cb=c^{-1};\quad c^4=1, \tag{10}$$

$$G_{13}=H\cdot(b);\quad b^2=1;\quad b^{-1}ab=a^{-1}c^2;\quad b^{-1}cb=c^{-1};\quad c^4=1, \tag{11}$$

$$G_{14}=H\cdot(b);\quad b^4=1;\quad b^{-1}ab=a^{-1};\quad b^{-1}cb=c^{-1};\quad c^4=1. \tag{12}$$

Определим идемпотент $e_1=1/2(1-c^2)$ в вещественных групповых алгебрах $\mathbf{R}G_{12}$ и $\mathbf{R}G_{13}$, и идемпотент $e_2=1/4(1-c^2)(1-b^2)$ в групповой алгебре $\mathbf{R}G_{14}$. Согласно лемме 1, все идеалы $\mathbf{R}(c)e_1$, $\mathbf{R}c()e_2$ изоморфны полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Обозначим эти изоморфизмы через общий символ φ. Так как $c^2e_1=-e_1$; $c^2e_2=b^2e_2=-e_2$, то элементы во всех трех идеалах представляются в виде

$$\Sigma d_j\alpha_j$$

где $\alpha_j\in\mathbf{R}(c)e_i$ $(i=1, 2)$, $d_j\in D$. Рассмотрим отображение

$$\psi\colon\ \Sigma d_j\alpha_j\to\Sigma d_j\alpha_j',$$

где $\alpha_j'=\varphi(\alpha_j)\in\mathbf{C}$. Покажем, что отображение ψ является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $\psi\colon \mathbf{R}G_ie\to A_i$ $(i=12, 13, 14)$, где e — соответствующий идемпотент e_1 или e_2. Действительно, ψ — взаимно однозначно на всю алгебру A_i для всех $i=$ $=12, 13, 14$, выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Покажем, что в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e_1$ ($\mathbf{R}G_{13}e_1$ или $\mathbf{R}G_{14}e_2$) выполняются соотношения (7) ((8) или (9) соответственно). Действительно, учитывая

$$\psi(ae)=a;\quad \psi(be)=b,\quad \psi(e)=1,$$

и что каждый элемент из $\mathbf{R}(c)e$ представляется в виде

$$\alpha=\beta_0e+\beta_1ce\quad(\beta_0,\beta_1\in\mathbf{R}),$$

в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e_1$ имеем (используя соотношения (10))

$$a\alpha=\alpha a\quad(\alpha\in\mathbf{R}(c)e_1)$$

$$b\alpha=b(\beta_0e_1+\beta_1ce_1)=(\beta_0e_1+\beta_1c^{-1}e_1)b,$$

что равносильно равенству

$$b\alpha'=\overline{\alpha}'b\quad(\alpha'=\varphi(\alpha)\in\mathbf{C}).$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be)=b^{-1}abe=a^{-1}e=(ae)^{-1},$$

$$(be)^2=b^2e=e.$$

Значит, в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e$ выполняются условия (7).

В алгебре $\mathbf{R}G_{13}e_1$ с использованием соотношений (11) имеют место равенства

$$a\alpha = \alpha a; \quad b\alpha' = \overline{\alpha'}b;$$
$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}c^2e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1}$$
$$(be)^2 = b^2e = e,$$

то есть выполнются все условия (8).

Наконец, используя соотношения (12), в алгебре $\mathbf{R}G_{14}e_2$ получаем

$$\alpha a = a\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}(c)e_2),$$
$$b\alpha = b(\beta_0 e_2 + \beta_1 ce_2) = (\beta_0 e_2 + \beta_1 c^{-1}e_2)b,$$
$$(be_2)^{-1}(ae_2)(be_2) = b^{-1}abe_2 = a^{-1}e_2 = (ae_2)^{-1},$$
$$(be_2)^2 = b^2e_2 = -e_2.$$

Следовательно, ψ выдерживает умножение. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для алгебры A_{15} существует такая группа G, что $\mathbf{R}$-алгебра A_{15} $\mathbf{R}$-изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры $\mathbf{R}G$.*

Доказательство. Алгебра A_{15} задается соотношениями

(13) $\quad A_{15} = \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q).$

Пусть группа H—прямое произведение

$$H = \mathscr{D}_1 \times (a)$$

группы кватернионов $\mathscr{D}_1$:

$$\mathscr{D}_1 = (c)\cdot(d); \quad c^4 = d^4 = 1; \quad d^{-1}cd = c^3; \quad c^2 = d^2,$$

и бесконечной циклической группы (a), а группа G—полупрямое произведение

$$G = H\cdot(b); \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb; \quad bd = db; \quad b^2 = c^2; \quad b^4 = 1$$

группы H на циклическую группу 4-го порядка (b).

Рассмотрим идеал $\mathbf{R}Ge$, порожденный идемпотентом $e = 1/2(1-c^2)$. Согласно лемме 4 идеал $\mathbf{R}D_1e$ изоморфен телу кватернионов Q. Так как $b^2e = -e$, элементы идеала $\mathbf{R}Ge$ могут быть записаны в виде

$$\Sigma a^{\nu} b^{\gamma_\nu}\alpha_\nu = \Sigma d_\nu \alpha_\nu \quad (d_\nu \in \mathbf{R}\mathscr{D}_1 e; \ 0 \leqq \gamma_\nu < 2; \ d_\nu \in D).$$

Покажем, что отображение

$$\psi\colon \Sigma d_\nu \alpha_\nu \to \Sigma d_\nu \alpha'_\nu$$

$\mathbf{R}$-алгебр $\mathbf{R}Ge$ и A_{15} является $\mathbf{R}$-изоморфизмом, где $\alpha'_\nu \in Q$—образ элемента $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathscr{D}_1 e$ при изоморфизме $\mathbf{R}\mathscr{D}_1 e \overset{\varphi}{\cong} Q$. Для этого достаточно показать, что в алгебре $\mathbf{R}Ge$ выполняются условия (13), ибо отсюда уже легко получаются все свойства $\mathbf{R}$-изоморфизма. Учитывая, что элементы $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathscr{D}_1 e$ имеют вид

$$\alpha_\nu = \beta_0 e + \beta_1 ce + \beta_2 de + \beta_3 cde \quad (\beta_i \in \mathbf{R}),$$

имеем

$$a\alpha_\nu = \alpha_\nu a; \quad b\alpha_\nu = \alpha_\nu b,$$

так как элементы a и b перестановочны с c и d. Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = -e.$$

Теорема доказана.

Литература

[1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях группы, содержащей босконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 163—170.

[2] С. Д. Берман—К. Бузаши, О Модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica* **16** (1981), 455—470.

[3] С. Д. Берман—К. Бузаши, Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 133—144.

[4] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. *Изд. Наука,* 1969.

[5] N. Jacobson, The theory of rings. *Amer. Math. Soc.* New York, 1943.

(Поступило 29. VII. 1983)