Amalgame nilpotenter Gruppen der Klasse zwei II

Von BERTHOLD J. MAIER (Freiburg im Breisgau)

In dieser Fortsetzung von [3] geben wir notwendige und hinreichende Kriterien an für die Existenz von scharfen Amalgamen in den Klassen $\mathbf{N}_2$ und $\mathbf{N}_2^+$ der nilpotenten beziehungsweise torsionsfreien nilpotenten Gruppen der Klasse höchstens zwei. Als Anwendung charakterisieren wir die Amalgamierungsbasen und die scharfen Amalgamierungsbasen in diesen beiden Klassen.

Sind A und B Gruppen mit gemeinsamer Untergruppe D, so nennen wir eine Gruppe C ein Amalgam von A mit B über D, falls $C=\langle A, B\rangle$ und $D\leqq A\cap B$, wobei A und B als Untergruppen von C aufgefaßt sind. Gilt sogar $D=A\cap B$, so nennen wir C ein scharfes Amalgam. Diese Bezeichnungen weichen etwas von den in der Gruppentheorie üblichen ab, wo man unter dem Amalgam nur die mengentheoretische Vereinigung $A\cup B$ mit $D=A\cap B$ versteht. Da wir auch Amalgame zu betrachten haben, in denen nur $D\leqq A\cap B$ gilt, haben wir uns zu der etwas abweichenden Bezeichnung entschlossen. Allerdings stimmt unser Sprachgebrauch mit dem modelltheoretischen überein. Ein scharfes Amalgam in unserem Sinne entspricht also der von einem Amalgam im gruppentheoretischen Sinne erzeugten Gruppe. Wir sagen ein Amalgam oder ein scharfes Amalgam existiere in einer Gruppenklasse $\mathbf{N}$, falls sich ein entsprechendes Amalgam in der Klasse $\mathbf{N}$ finden läßt. Eine Gruppe D aus einer Klasse $\mathbf{N}$ heißt (scharfe) Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}$, falls für alle Gruppen A und B aus $\mathbf{N}$ mit gemeinsamer Untergruppe D ein (scharfes) Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}$ existiert.

Eine Gruppe G heißt nilpotent der Klasse höchstens zwei — $G\in\mathbf{N}_2$ —, falls $G_2\leqq Z(G)$, wobei G_2 die Kommutatorgruppe von G bezeichnet und $Z(G)$ das Zentrum. Wir schreiben Kommutatoren in der Form $[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy$ und erinnern daran, daß die Kommutatorbildung in jeder Gruppe $G\in\mathbf{N}_2$ bilinear ist.

Seien A und B Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ mit einer gemeinsamen Untergruppe D. In [3] betrachteten wir die Bedingungen:

(1) $A_2\cap D\leqq Z(B)$ und $B_2\cap D\leqq Z(A)$.

(2) Für $k>0$, $q_i>0$, $a_i\in A$ und $a_i'\in A_2$ mit $a_i^{q_i}a_i'\in D$,

$b_i\in B$ und $b_i'\in B_2$ mit $b_i^{q_i}b_i'\in D$, $1\leqq i\leqq k$, sowie $d\in D$ gilt

$$\Pi_{i=1}^k[a_i, b_i^{q_i}b_i'] = d \Leftrightarrow \Pi_{i=1}^k[a_i^{q_i}a_i', b_i] = d.$$

(3) Für $q>0$, $a\in A$ und $a'\in A_2$ mit $a^q a'\in D$ sowie $b\in B$ und $b'\in B_2$ mit $b^q b'\in D$ gilt

$$[a, b^q b'] = [a^q a', b]\in D.$$

Wir erhielten, daß (1) und (2) notwendig und hinreichend für die Existenz eines Amalgams in $\mathbf{N}_2$ sind (Hauptsatz) und entsprechend (1) für ein Amalgam in $\mathbf{N}_2^+$ (Satz 1). Die Bedingung (3) wurde im Beweis des Hauptsatzes in einem ersten Reduktionsschritt erzielt. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß (1) und (3) notwendig und hinreichend für die Existenz eines scharfen Amalgams in $\mathbf{N}_2$ sind. Dies ist wohl eine befriedigende Lösung des von WIEGOLD [9] erstmals aufgegriffenen scharfen Amalgamierungsproblems für $\mathbf{N}_2$ durch Bedingungen, die innerhalb der vorgegebenen Gruppen A, B, D überprüft werden können. Die Bedingung (1) wurde bereits von WIEGOLD ([9], 7.5) als notwendige Bedingung angegeben und liegt in der CIM-Algebra von A, B, D, $\langle 1\rangle$, das heißt sie kann durch eine Gleichung zwischen Termen ausgedrückt werden, die aus diesen Gruppen durch Bildung von Kommutatorgruppen, Durchschnitten und Multiplikationen hervorgehen. WIEGOLD vermutete ([9], 7.11), und in [5] und [1] wurde nachgewiesen, daß solche globale Bedingungen nicht ausreichen, die Existenz von Amalgamen in $\mathbf{N}_2$ zu charakterisieren. Entsprechend ist unsere Bedingung (3) über das Zusammenfallen von bestimmten Wurzeln von lokaler Natur. Unter den Voraussetzungen wie in (3) gilt $[a, b^q b']^q = [a^q a', b^q b'] = [a^q a', b]^q$, wobei die erste Gleichung in der Gruppe A und die zweite in B gilt, während das Mittelglied in D liegt. Die Elemente $[a, b^q b'] \in A$ und $[a^q a', b] \in B$ haben also dieselbe q-te Potenz in D.

Da die Bedingung (3) ähnlich wie (2) für torsionsfreie Gruppen A und B immer erfüllt ist, ist in diesem Fall (1) bereits hinreichend für die Existenz eines scharfen Amalgams in $\mathbf{N}_2$. Um die Existenz eines scharfen Amalgams in $\mathbf{N}_2^+$ zu garantieren, muß noch die Bedingung

$$(+) \qquad (A^q \cap D) \cap (B^q \cap D) = D^q \quad \text{für} \quad q \geqq 1$$

hinzugenommen werden, wobei $A^q = \{a^q | a \in A\}$ als Menge aufgefaßt wird. Wegen der Eindeutigkeit von Wurzeln in torsionsfreien nilpotenten Gruppen (vgl. [2], 16.2.8) ist (+) auch eine notwendige Bedingung für die Existenz eines scharfen Amalgams in $\mathbf{N}_2^+$. Für die Klasse der torsionsfreien nilpotenten Gruppen der Klasse höchstens drei erhalten wir in einer anderen Arbeit [4] ähnliche Resultate wie hier für $\mathbf{N}_2^+$.

Die Tatsache, daß die Bedingungen (1) und (3) die Existenz scharfer Amalgame in $\mathbf{N}_2^+$ nicht garantieren, mag entschuldigen, daß wir in [3] übersahen, daß diese Bedingungen die Existenz scharfer Amalgame in $\mathbf{N}_2$ garantieren.

Eine Folgerung aus dem ersten Ergebnis ist, daß unter den folgenden Einschränkungen an D oder B ein scharfes Amalgam in $\mathbf{N}_2$ schon dann existiert, wenn ein Amalgam existiert: D zentral oder co-zentral in B; B abelsch; B zyklisch. Wir nannten die Untergruppe D co-zentral in B, falls $B = \langle D, Z\rangle$ mit einer zentralen Untergruppe Z von B gilt.

Als weitere Folgerung zeigen wir die Charakterisierung der Amalgamierungsbasen in $\mathbf{N}_2$ von SARACINO [8]. Das Studium von Saracinos Arbeit gab den Anstoß zu den hier dargestellten Ergebnissen. Wir beschreiben auch die Amalgamierungsbasen und die scharfen Amalgamierungsbasen in $\mathbf{N}_2^+$. Abschließend untersuchen wir die Frage, ob sich endlich erzeugte Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ und $\mathbf{N}_2^+$ in endlich erzeugte Amalgamierungsbasen der jeweiligen Klasse einbetten lassen. In kurzen Bemerkungen beschreiben wir jeweils, wie sich die für $\mathbf{N}_2$ und $\mathbf{N}_2^+$ dargestellten Ergebnisse auf die Klasse $N_{2,\pi}$ übertragen, die aus den Gruppen aus N_2 besteht, deren Torsionsgruppen π-Gruppen sind. Hierbei ist π eine beliebige Primzahlmenge.

Da die Beweise der Hauptergebnisse hier Modifikationen des Beweises des Hauptsatzes der vorangegangen Arbeit [3] sind, wollen wir annehmen, daß der Leser damit vertraut ist. Wir numerieren die Ergebnisse hier fortlaufend zu denen aus [3], so daß diese Arbeit mit Satz 3 und Lemma 6 einsetzt.

Wir beginnen mit einer einfachen hinreichenden Bedingung dafür, daß ein Amalgam ein scharfes Amalgam ist.

Lemma 6. *Sei C ein Amalgam von A mit B über D mit einem Normalteiler N, so daß $B \leqq N \lhd C$ und $\langle A \cap N, B \rangle \leqq C$ ein scharfes Amalgam von $A \cap N$ mit B über D ist. Dann ist C ein scharfes Amalgam von A mit B über D.*

Beweis: Seien $a \in A$, $b \in B$ mit $a = b$ in C. Dann gilt $aN = bN = 1N$ in C/N, und somit $a \in A \cap N$. Da C das scharfe Amalgam $\langle A \cap N, B \rangle$ von $A \cap N$ mit B über D enthält, gilt $a = b \in (A \cap N) \cap B = D$. □

Wir zeigen nun unser erstes Hauptergebnis.

Satz 3. *Seien $A, B \in N_2$ und $A \cap B = D$. Dann existiert ein scharfes Amalgam von A mit B über D in N_2 genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.*

(1) $A_2 \cap D \leqq Z(B)$ *und* $B_2 \cap D \leqq Z(A)$.

(3) *Für* $q > 0$, $a \in A$ *und* $a' \in A_2$ *mit* $a^q a' \in D$ *sowie* $b \in B$ *und* $b' \in B_2$ *mit* $b^q b' \in D$ *gilt*

$$[a, b^q b'] = [a^q a', b] \in D.$$

Bemerkungen. 1. In (3) folgt aus der Gleichung $[a, b^q b'] = [a^q a', b]$ wegen $A \cap B = D$ bereits, daß beide Elemente in D liegen. Wie oben erwähnt sind die beiden Elemente q-te Wurzeln des Elements $[a^q a', b^q b'] \in D$. In jedem Amalgam von A mit B über D in N_2 sind beide Elemente gleich $[a, b]^q$ und müssen daher zusammenfallen.

2. Die Bedingung (3) ist eine Verschärfung der Bedingung (2) des Hauptsatzes. In dem Beweis des Hauptsatzes wird (3) in Schritt 0 durch Identifizierung der entsprechenden Elemente von A und B erzielt unter Vergrößerung der zu amalgamierenden Untergruppe D.

3. Es ist leicht zu sehen, daß (3) bereits gilt, wenn es für alle Primzahlpotenzen q gilt. Übrigens ist (1) äquivalent zu (3) im Fall $q = 0$.

Beweis des Satzes 3. Sei zum Nachweis der Notwendigkeit der Bedingungen C ein scharfes Amalgam von A mit B über D in N_2. Da $A_2 \cap D \leqq Z(C) \cap D \leqq Z(C) \cap B \leqq Z(B)$, folgt die Bedingung (1) aus Symmetriegründen. Seien nun a, a', b, b' wie in der Voraussetzung von (3) gegeben. Dann gilt in C wegen $a', b' \in C_2 \leqq Z(C)$

$$[a, b^q b'] = [a, b^q] = [a, b]^q = [a^q, b] = [a^q a', b].$$

Nun ist $[a, b^q b'] \in A$ und $[a^q a', b] \in B$. Da C ein scharfes Amalgam von A mit B über D ist, gilt $A \cap B = D$ in C, woraus $[a, b^q b'] = [a^q a', b] \in A \cap B = D$, also die Behauptung von (3) folgt.

Wir zeigen jetzt, daß die Bedingungen (1) und (3) die Existenz eines scharfen Amalgams von A mit B über D in N_2 garantieren. Dazu gehen wir den Beweis des Hauptsatzes durch und zeigen, daß in allen Schritten ein scharfes Amalgam gebildet wird, oder mit anderen Worten, daß nie Elemente aus $A \setminus D$ mit Elementen aus $B \setminus D$ identifiziert werden.

Die Bedingung (3) garantiert uns zunächst, daß Schritt 0 wegfallen kann. Dort werden gerade Elemente der Form $[a, b^q b'] \in A$ mit solchen der Form $[a^q a', b] \in B$ identifiziert, die jetzt nach (3) schon gleich sind und in D liegen.

Im Beweis des Hauptsatzes haben wir in jedem Schritt eine symmetrische Bedingung hergestellt durch Übergang zu geeigneten Obergruppen von A, B und D. Da wir hier die Einbettung der beiden Gruppen A und B genauer verfolgen müssen, vergrößern wir jetzt nur die Gruppe B, indem wir in Schritt 1 die Untergruppe A_2 von A mit B zu einer Obergruppe B' amalgamieren und in Schritt 2 dann $A \setminus A_2$ hinzunehmen.

In Schritt 1 gehen wir zunächst über zum direkten Produkt B^0 von A_2 mit B über der gemeinsamen zentralen Untergruppe $A_2 \cap D$. Da in einem direkten Produkt P von Gruppen X und Y über einer zentralen Untergruppe Z die Untergruppen X und Y sogar Normalteiler von P mit Durchschnitt Z sind, ist B^0 ein scharfes Amalgam von DA mit B über $A_2 \cap D$. Wir können B^0 aber auch als scharfes Amalgam von DA_2 mit B über D ansehen. Denn sind $d \in D$, $a' \in A_2$, $b \in B$ mit $da' = b$ in B^0 gegeben, so gilt $a' = d^{-1}b$, also $d^{-1}b \in A_2 \cap B = A_2 \cap D \leqq D$ und somit $b \in D$ und $da' = b \in D$.

Die Gruppe B^0 wird nun durch ein direktes Produkt über der zentralen Untergruppe A_2B_2 in eine Gruppe B' eingebettet, in der $A_2B_2 = B'_2 = Z(B')$ gilt. Hierbei ändert sich nichts daran, daß die Untergruppen DA_2 und B von $B^0 \leqq B'$ ein scharfes Amalgam über D erzeugen.

In Schritt 2 des Hauptsatzes wird eine Obergruppe von B' konstruiert, die ein Amalgam von A mit B über D enthält, unter der Voraussetzung, daß $A = \langle a_1, \ldots, a_k, DA_2 \rangle$ und $A/DA_2 = \langle a_1 DA_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_k DA_2 \rangle$. Diese Beschränkung auf endlich viele Erzeugende ist nach der modelltheoretischen Diagrammethode auch für scharfe Amalgame erlaubt; ebenso überträgt sich aber auch der algebraische Beweis in Lemma 5 wortwörtlich auf scharfe Amalgame.

Ist H das zweite nilpotente Produkt von B' mit unendlich zyklischen Gruppen $\langle c_1 \rangle, \ldots, \langle c_k \rangle$, so ist die gesuchte Obergruppe von B' gleich der Faktorgruppe H/N von H nach einem Normalteiler N, der nach Lemma 4 garantiert, daß die Untergruppe $\langle c_1, \ldots, c_k, DA_2 \rangle N/N$ isomorph zu A ist. Genauer gilt $B' \cap N = \langle 1 \rangle$, so daß $DA_2 \leqq B'$ isomorph unter dem kanonischen Homomorphismus abgebildet wird. Bezeichnen wir die Bilder von $c_1, \ldots, c_k$ mit $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k$, so ist die Untergruppe $\langle c_1, \ldots, c_k, DA_2 \rangle N/N$ gleich $\langle \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k, DA_2N/N \rangle$ und ein Isomorphismus Φ von A auf diese Untergruppe von H/N ist gegeben durch $a_i \to \bar{c}_i$, $1 \leqq i \leqq k$, und den durch die Identität auf DA_2 induzierten Isomorphismus $DA_2 \to DA_2N/N$. Wir identifizieren A nun mit dieser Untergruppe $A\Phi = \langle \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k, DA_2N/N \rangle$ von H/N.

Wir wollen Lemma 6 anwenden. Dazu betrachten wir nochmals den Homomorphismus $H \to A/DA_2$ aus dem Hauptsatz, der von $c_i \to a_i DA_2$, $1 \leqq i \leqq k$, und $B' \to \langle 1 \rangle$ auf H induziert wird. An den Erzeugenden von N liest man ab, daß N im Kern dieses Homomorphismus liegt, so daß ein Homomorphismus $\theta\colon H/N \to A/DA_2$ induziert wird. Betrachten wir die Wirkung von θ auf $A\Phi = \langle \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k, DA_2N/N \rangle$, so sehen wir, daß DA_2N/N wegen $DA_2 \leqq B'$ im Kern liegt und $\bar{c}_i\theta = a_i DA_2$, $1 \leqq i \leqq k$. Da $o(a_i DA_2) = o(\bar{c}_i)$, $1 \leqq i \leqq k$, folgt, daß $A \cap \mathrm{Kern}\, \theta = DA_2$. Damit haben wir die Voraussetzungen von Lemma 6 gezeigt und erhalten daraus, daß H/N ein scharfes Amalgam von $A = A\Phi$ mit B über D in $\mathbf{N}_2$ ist. $\square$

Wir interessieren uns jetzt wie in [3] für zwei Sonderfälle, Amalgame torsionsfreier Gruppen und Amalgame mit Zentralitätsvoraussetzungen an D. Der zweite Fall, wenn D zentral oder co-zentral in B ist, oder noch schärfer wenn B abelsch oder B zyklisch ist, läßt sich sofort übertragen. Hier kann in Satz 2 und Korollar 4 jeweils Amalgam durch scharfes Amalgam ersetzt werden, da in den Beweisen die Bedingung (3) nachgewiesen wird. Insbesondere gilt in diesen Fällen, daß ein Amalgam in $\mathbf{N}_2$ genau dann existiert, wenn ein scharfes Amalgam in $\mathbf{N}_2$ existiert.

Der erste Fall wurde auch in [4] mit einfacheren Methoden kurz skizziert. Wir wollen zeigen, daß er sich auch aus dem allgemeinen Ergebnis leicht ergibt. Da Wurzeln in torsionsfreien nilpotenten Gruppen eindeutig bestimmt sind, braucht man für die Existenz scharfer torsionsfreier Amalgame noch eine Zusatzbedingung. Man denke zum Beispiel an ein Amalgam zweier unendlich zyklischer Gruppen $\langle a\rangle$ und $\langle b\rangle$ über ihrer Untergruppe $D=\langle a^2\rangle=\langle b^2\rangle$. Die folgende Bedingung, die gerade solche Wurzelkonflikte ausschließt, genügt.

$$(+)\qquad (A^q\cap D)\cap(B^q\cap D) = D^q \quad \text{für alle} \quad q\geqq 1.$$

Hier ist $A^q=\{a^q|a\in A\}$. Für eine Untergruppe $D\leqq A$ bezeichnen $I_A(D)=\{a\in A|a^q\in D \text{ für ein } q\geqq 1\}$ und $I_{\pi,A}(D)=\{a\in A|a^q\in D \text{ für eine } \pi\text{-Zahl } q\}$ den Isolator beziehungsweise den π-Isolator von D in A. In einer torsionsfreien nilpotenten Gruppe A ist $I_A(D)$ eine Untergruppe von A (vgl. [2], 17.3.1). Eine Untergruppe D heißt isoliert, falls $D=I_A(D)$.

Satz 4. *Seien $A, B\in\mathbf{N}_2^+$ und $D=A\cap B$. Dann existiert ein scharfes Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2^+$ genau dann, wenn* (1) *und* (+) *erfüllt sind.*

Beweis. Sei $C\in\mathbf{N}_2^+$ ein scharfes Amalgam von A mit B über D. Wir müssen dann noch (+) zeigen. Seien dazu $q\geqq 1$, $a\in A$ und $b\in B$ gegeben mit $a^q=b^q\in D$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln in C, daß $a=b$ in C. Nun ist C ein scharfes Amalgam von A mit B über D und es folgt $a=b\in A\cap B=D$, also $a^q\in D^q$.

Zum Nachweis, daß unter (1) und (+) ein torsionsfreies scharfes Amalgam existiert, führen wir eine ähnliche Konstruktion wie in Satz 3 durch und kontrollieren, daß in jedem Schritt torsionsfreie Gruppen entstehen.

Zunächst zeigen wir, daß (3) aus (+) folgt. Seien dazu $q>0$, $a\in A$ und $a'\in A_2$ mit $a^q a'\in D$ sowie $b\in B$ und $b'\in B_2$ mit $b^q b'\in D$ gegeben. Dann gilt

$$[a, b^q b']^q = [a^q a', b^q b'] = [a^q a', b]^q\in D$$

und nach (+) existiert daher ein $d\in D$, so daß

$$[a, b^q b']^q = d^q = [a^q a', b]^q.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Wurzeln in A und in B folgt nun

$$[a, b^q b'] = d = [a^q a', b]\in D.$$

Wegen der Gültigkeit von (3) kann Schritt 0 im Hauptsatz wieder wegfallen. In Schritt 1 amalgamieren wir B jetzt nicht mit A_2, sondern mit $I_A(A_2)$, um in Schritt 2 Wurzeladjunktionen möglichst zu vermeiden. Wir müssen dazu wissen, daß $I_A(A_2)\cap D$

zentral in A und in B ist. Da das Zentrum einer torsionsfreien nilpotenten Gruppe isoliert ist, erhalten wir $I_A(A_2) \leqq Z(A)$ in A sowie $I_A(A_2) \cap D = I_D(A_2 \cap D) \leqq Z(B)$ mit Hilfe von (1) in B. Das nun zu bildende direkte Produkt von $I_A(A_2)$ und B mit amalgamierter zentraler Untergruppe $I_A(A_2) \cap D$ ist torsionsfrei. Denn hätte ein Element endliche Ordnung $q \geqq 1$, so wäre $(a, b)^q = (a^q, b^q) \in \{(d, d^{-1}) | d \in I_A(A_2) \cap D\}$ für ein $a \in I_A(A_2)$ und ein $b \in B$. Dann folgte $a^q = b^{-q} \in I_A(A_2) \cap D$ und mit (+) die Existenz eines Elements $d \in D$ mit $a^q = d^q = b^{-q}$. Dies zöge in A beziehungsweise in B dann $a = d = b^{-1}$ nach sich, also $d \in I_A(A_2) \cap D$. Dann gälte bereits für das ursprüngliche Element $(a, b) \in \{(d, d^{-1}) | d \in I_A(A_2) \cap D\}$, also $(a, b) = 1$ in dem direkten Produkt mit amalgamierter zentraler Untergruppe.

Die so entstehende torsionsfreie Gruppe heiße wieder B^0. Sie ist ein scharfes Amalgam von $DI_A(A_2)$ mit B über D. Die Obergruppe B' von B^0 wird nun so konstruiert, daß $I_{B^0}(A_2 B_2) = B_2' = Z(B')$. Da B' aus B^0 durch Bildung eines direkten Produktes mit amalgamierter zentraler und isolierter Untergruppe hervorgeht, folgt leichter als oben, daß B' torsionsfrei ist.

In Schritt 2 müssen wir jetzt unter der Voraussetzung $A = \langle a_1, \ldots, a_k, DI_A(A_2) \rangle$ und $A/DI_A(A_2) = \langle \bar{a}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \bar{a}_k \rangle$ die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ zu B' hinzunehmen. Wir reduzieren das Problem auf den Fall, daß $DI_A(A_2)$ isoliert in A ist. Gilt zum Beispiel $a_1 \notin DI_A(A_2)$ und $a_1^q \in DI_A(A_2)$, so hat a_1^q keine q-te Wurzel in B'. Denn sonst gäbe es $b \in B$ und $a' \in I_A(A_2)$ mit $a_1^q = (ba')^q = b^q a'^q$ oder $(a_1 a'^{-1})^q = a_1^q a'^{-q} = b^q$. Mit Hilfe von (+) erhielten wir $a_1 a'^{-1} = b \in D$, also $a_1 \in DI_A(A_2)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Nun kann eine q-te Wurzel von a_1^q in einer Gruppe aus $\mathbf{N}_2^+$ bis auf Isomorphie auf genau eine Weise adjungiert werden (vgl. [2], 17.3.2). Tun wir dies für jedes der Elemente von $a_1, \ldots, a_k$ mit endlicher Ordnung modulo $DI_A(A_2)$, so können wir annehmen, daß B' ein scharfes Amalgam von $I_A(DA_2)$ mit B über D enthält, sowie ferner $A = \langle a_1, \ldots, a_k, I_A(DA_2) \rangle$ und $A/I_A(DA_2) = \langle \bar{a}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \bar{a}_k \rangle$ torsionsfrei.

Wir verfahren nun weiter wie bei Satz 3 und erhalten mit H/N ein scharfes Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$. Bezeichne T die Torsionsuntergruppe von H/N. Ist $\theta: H/N \to \langle \bar{a}_1 \rangle \times \ldots \times \langle \bar{a}_k \rangle$ wie bei Satz 3 gebildet, so gilt $\operatorname{Kern} \theta \cap A = I_A(DA_2) \leqq B'$. Für $a \in A$ und $b \in B'$ mit $ab \in T \leqq \operatorname{Kern} \theta$, folgt $1 = (ab)\theta = a\theta b\theta = a\theta$, also $a \in I_A(DA_2) \leqq B'$ und somit $ab \in T \cap B' = \langle 1 \rangle$, da B' torsionsfrei ist. Also gilt $AB' \cap T = \langle 1 \rangle$ und AB' enthält ein scharfes Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2^+$. $\square$

Wir merken an, daß für die Existenz von scharfen Amalgamen in der Klasse $\mathbf{N}_{2,\pi}$ die Bedingungen (1), $(3)_\pi$ und $(+)_{\pi'}$ notwendig und hinreichend sind. Dabei bedeuten die tiefgestellten π und π' jeweils die Einschränkung der Bedingungen auf π-Zahlen q beziehungsweise auf π'-Zahlen q. Satz 3 ist der Fall $\pi' = \emptyset$ und Satz 4 ist der Fall $\pi = \emptyset$.

Unsere Ergebnisse erlauben auch eine Herleitung der Charakterisierung der Amalgamierungsbasen in $\mathbf{N}_2$ von Saracino.

Satz 5. (Saracino [8].) *Für eine Gruppe D sind* äquivalent:

1. D ist scharfe Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2$.

2. D ist Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2$.

3. a) $D_2 = Z(D)$ *und*

b) *Für alle $d \in D$ und $q > 0$ gilt: $d \in D^q D_2$ oder es existiert ein $c \in D$ mit $c^q \in \langle d \rangle D_2$ und $[c, d] \neq 1$.*

4. $D_2 = Z(D)$ und für alle $d \in D$ und alle $q > 0$ gilt: entweder d hat in D eine q-te Wurzel modulo D_2, oder d hat in keiner Obergruppe von D aus $\mathbf{N}_2$ eine q-te Wurzel.

BEWEIS. Wir zeigen $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Die Implikation $1 \Rightarrow 2$ ist trivial.

$2 \Rightarrow 3$: SARACINO [8] benützt hier die Struktur der Kommutatorgruppe des zweiten nilpotenten Produkts. Wir geben einen Beweis mit Hilfe von Amalgamen, der auch in höheren Nilpotenzklassen, in denen die nilpotenten Produkte noch wenig erforscht sind, imitiert werden kann (vgl. [4]).

a) Da $D_2 \leqq Z(D)$ für $D \in \mathbf{N}_2$, ist noch $Z(D) \leqq D_2$ zu zeigen. Angenommen es gäbe ein $d \in Z(D) \setminus D_2$. Wir konstruieren dann Obergruppen A und B in $\mathbf{N}_2$ von D, so daß $d \in A_2$ und $d \notin Z(B)$. Dann kann kein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$ existieren und D wäre keine Amalgamierungsbasis.

Sei $U = U_{o(d)} = \langle x, y;\ x^{o(d)} = y^{o(d)} = [x, y, x] = [x, y, y] = 1 \rangle$. Die Gruppe U ist die freie Gruppe in $\mathbf{N}_2$ mit zwei Erzeugenden der Ordnung $o(d)$. Wir wählen A in $\mathbf{N}_2$ als Amalgam von D mit U über der Untergruppe $\langle d \rangle = \langle [x, y] \rangle$ und B als Amalgam von D mit U über $\langle d \rangle = \langle x \rangle$. Die Bedingungen (1) und (3) sind in beiden Fällen leicht nachzuweisen.

b) Wir zeigen die Behauptung wieder indirekt und nehmen an, es gäbe $d \in D$, $q > 0$ mit $d \notin D^q D_2$ und für alle $c \in D$ folge aus $c^q \in \langle d \rangle D_2$ schon $[c, d] = 1$. Wegen der zweiten Aussage erhalten wir nach Korollar 4 eine Obergruppe $A \in \mathbf{N}_2$ von D mit einer q-ten Wurzel a von d. Zur Konstruktion von B sei p eine Primzahl mit $a \notin D^p D_2$. Ist $o(d)$ endlich, so sei p ein Teiler von $o(d)$. Solch ein p existiert, da andernfalls $d \in D^q D_2$ wäre. Seien $\langle b \rangle$ und $\langle z \rangle$ zyklisch der Ordnung p und $B = (D \times \langle z \rangle)(2) \langle b \rangle$ das zweite nilpotente Produkt von $D \times \langle z \rangle$ mit $\langle b \rangle$. Ist β ein Automorphismus von $D \times \langle z \rangle$, der $D \times \langle z \rangle \geqq D^p D_2 \times \langle z \rangle \geqq \langle 1 \rangle$ stabilisiert, mit $d\beta = dz \neq d$, so ist $o(\beta) = p$, und es gibt einen Homomorphismus von B auf die zerfallende Erweiterung $(D \times \langle z \rangle) \lambda \langle \beta \rangle \in \mathbf{N}_2$, der $D \times \langle z \rangle$ identisch und b auf β abbildet. Da $[d, \beta] = z \neq 1$, gilt auch für das Urbild $[d, b] \neq 1$ in B. In jedem Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$ würde wegen $a^p = d$ und $b^p = 1$ nun $1 = [a, b^p] = [a^p, b] = [d, b] \neq 1$ gelten. Solch ein Amalgam existiert daher nicht und D wäre keine Amalgamierungsbasis. Hiermit ist auch b) gezeigt.

$3 \Leftrightarrow 4$ gilt nach Satz 2 und Korollar 4.

$3 \Rightarrow 1$: Seien A und B Obergruppen von D aus $\mathbf{N}_2$ mit $A \cap B = D$. Nach Satz 3 genügt es die Bedingungen (1) und (3) zu zeigen. Mit 3.a) erhalten wir $A_2 \cap D \leqq Z(D) = D_2 \leqq Z(B)$ und genauso die zweite Bedingung in (1). Sei zum Nachweis von (3) nun $q > 0$, $a \in A$ und $a' \in A_2$ mit $a^q a' \in D$ sowie $b \in B$ und $b' \in B_2$ mit $b^q b' \in D$. Hieraus folgt $a^q a', b^q b' \in D^q D_2$, da sonst wegen 3.b) zum Beispiel ein $c \in D$ mit $c^q \in \langle a^q a' \rangle D_2$ und $[c, a^q a'] \neq 1$ existierte, und dies in A auf den Widerspruch $1 \neq [c, a^q a'] = [c^q, a] = 1$ führte. Seien also $a^q a' = d_1^q d_1'$, $b^q b' = d_2^q d_2'$ mit Elementen $d_1, d_2 \in D$ und $d_1', d_2' \in D_2$. Dann gilt in A

$$[a, b^q b'] = [a, d_2^q d_2'] = [a^q a', d_2] = [d_1^q d_1', d_2] = [d_1, d_2]^q$$

und entsprechend $[a^q a', b] = [d_1, d_2]^q$ in B, so daß (3) gezeigt ist. □

Im torsionsfreien Fall erhalten wir das folgende Ergebnis.

Satz 6. *1. Eine torsionsfreie Gruppe D ist genau dann eine Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2^+$, wenn $I_D(D_2) = Z(D)$. 2. Eine torsionsfreie Gruppe D ist genau dann eine scharfe Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2^+$, wenn D dividierbar ist und $D_2 = Z(D)$.*

Beweis. *1.* Wir zeigen zunächst, daß eine hinreichende Bedingung vorliegt. Offensichtlich gilt $D \in \mathbf{N}_2^+$. Seien $D \leqq A$, $B \in \mathbf{N}_2^+$. Nach Satz 1 genügt es, die Bedingung (1) zu zeigen. Es ist $A_2 \cap D \leqq Z(D) = I_D(D_2) \leqq Z(B)$, wobei die letzte Abschätzung gilt, da $Z(B)$ isoliert ist. Ebenso folgt $B_2 \cap D \leqq Z(A)$, also (1).

Die Notwendigkeit der Bedingung zeigen wir indirekt. Für ein $d \in Z(D) \setminus I_D(D_2)$ gilt $D_2 \cap \langle d \rangle = \langle 1 \rangle$. Ähnlich wie in Satz 5 bilden wir Amalgame A und B von D mit der freien Gruppe $U = \langle x, y;\ [x, y, x] = [x, y, y] = 1 \rangle$ in $\mathbf{N}_2$ mit zwei Erzeugenden. In A seien die Untergruppen $\langle d \rangle = \langle [x, y] \rangle$ identifiziert und $\langle d \rangle = \langle x \rangle$ in B. Wir zeigen, daß (1) in beiden Fällen erfüllt ist. Für A gilt $D_2 \cap \langle d \rangle = \langle 1 \rangle \leqq Z(U)$ und $U_2 \cap \langle [x, y] \rangle = \langle [x, y] \rangle = \langle d \rangle \leqq Z(D)$, und für B sind die Gruppen $D_2 \cap \langle d \rangle$ und $U_2 \cap \langle x \rangle$ beide trivial gleich $\langle 1 \rangle$. Da $d \in A_2 \cap D$ und $d \notin Z(B)$, ist (1) verletzt. Es kann daher kein Amalgam von A mit B über D in $\mathbf{N}_2$ existieren und D ist keine Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2^+$.

2. Zeigen wir zunächst wieder, daß die Behauptung hinreichend ist. Zu $D \in \mathbf{N}_2^+$ dividierbar mit $D_2 = Z(D)$ seien $A, B \in \mathbf{N}_2^+$ mit $A \cap B = D$ gegeben. Nach Satz 4 genügt es, (1) und (+) zu zeigen. (1) folgt genau wie oben. Zum Nachweis von (+) seien $q > 0$, $a \in A$ und $b \in B$ mit $a^q = b^q \in D$. Da D dividierbar ist und Wurzeln in A eindeutig bestimmt sind, folgt $a \in D$, also $a^q \in D^q$. Zum Nachweis der Notwendigkeit bemerken wir zunächst, daß eine scharfe Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2^+$ dividierbar sein muß. Denn, wäre D nicht dividierbar, so gäbe es dividierbare Hüllen A und B von D in $\mathbf{N}_2^+$ mit $A = I_A(D) \neq D \neq I_B(D) = B$ und $A \cap B = D$. Dann wäre D keine scharfe Amalgamierungsbasis, da Wurzeln in $\mathbf{N}_2^+$ eindeutig bestimmt sind. Also ist D dividierbar und es gilt $D_2 = I_D(D_2)$. Aus Punkt 1 erhalten wir $I_D(D_2) = Z(D)$ und damit auch $D_2 = Z(D)$. □

In der Klasse $\mathbf{N}_{2,\pi}$ sind die Amalgamierungsbasen genau die Gruppen D mit $I_{\pi',D}(D_2) = Z(D)$ und $3.\mathrm{b})_\pi$ aus Satz 5. Die scharfen Amalgamierungsbasen sind genau die π'-dividierbaren Gruppen D mit $D_2 = Z(D)$ und $3.\mathrm{b})_\pi$ aus Satz 5.

Man kann mit Hilfe der Ergebnisse hier auch leicht zeigen, daß in $\mathbf{N}_2$ alle Gruppen algebraisch abgeschlossen im Sinne von A. Robinson sind (vgl. [6], S. 157), in $\mathbf{N}_2^+$ genau die dividierbaren Gruppen und $\mathbf{N}_{2,\pi}$ genau die π'-dividierbaren Gruppen (vgl. [4]).

Abschließend gehen wir auf die Frage ein, ob sich endliche oder endlich erzeugte Gruppen aus $\mathbf{N}_2$ beziehungsweise $\mathbf{N}_2^+$ in endliche oder endlich erzeugte Amalgamierungsbasen einbetten lassen. Dies ist in der Modelltheorie bei dem unendlichen Forcing von Interesse, da die Amalgamierungsbasen mit den dort betrachteten prägenerischen Strukturen identisch sind ([7], 6.3). Eine positiven Antwort auf die obige Frage ist eine notwendige Bedingung dafür, daß sich jede unendlich generische Struktur von endlich erzeugten, prägenerischen Strukturen überdecken läßt. Letzters zieht im Fall des Existenz einer abzählbaren unendlich generischen Struktur deren Eindeutigkeit bis auf Isomorphie nach sich.

Satz 7. *1. Ist $D \in \mathbf{N}_2$ endlich, so läßt sich D in eine endliche scharfe Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_2$ einbetten. 2. Ist $D \in \mathbf{N}_2^+$ endlich erzeugt, so läßt sich D in eine endlich erzeugte Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_2^+$ einbetten, deren dividierbare Hülle eine scharfe Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_2^+$ ist.*

Beweis. 1. Sei $D \in \mathbf{N}_2$ endlich. Wir können ohne Beschränkung annehmen, daß D eine endliche p-Gruppe ist, da jede endliche nilpotente Gruppe in das direkte

Produkt ihrer p-Sylowgruppen zerfällt. Da mit D auch $Z(D)$ endlich ist, können wir durch direkte Produkte über zentralen Untergruppen mit den in Satz 5 betrachteten Gruppen U_q eine endliche p-Obergruppe A von D erhalten mit $A_2=Z(A)=$ $=Z(D)$. Die Gruppe $(C_p(2)C_p)(2)A$ ist dann eine endliche Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2$, die D enthält. Hier ist C_p eine zyklische Gruppe der Ordnung p und (2) bezeichnet das zweite nilpotente Produkt von Gruppen.

2. Ist $D\in\mathbf{N}_2^+$ endlich erzeugt, so ist $Z(D)$ eine freie abelsche Gruppe von von endlichem Rang und wir können durch direkte Produkte über zentralen Untergruppen mit der freien Gruppe U aus $\mathbf{N}_2$ mit zwei Erzeugenden eine endlich erzeugte Obergruppe $A\in\mathbf{N}_2^+$ erhalten mit $A_2=Z(A)=Z(D)$. Nach Satz 6 ist A eine Amalgamierungsbasis und die dividierbare Hülle A^* ist eine scharfe Amalgamierungsbasis, da sich $A_2^*=Z(A^*)$ von A auf A^* überträgt. □

Nennen wir zwei Amalgamierungsbasen bezüglich einer gemeinsamen Untergruppe D kompatibel, falls ihr Amalgam über D existiert. Wir überlegen, wie viele nicht kompatible Amalgamierungsbasen es bezüglich einer endlich erzeugten Gruppe D gibt. Ist $D\in\mathbf{N}_2^+$ endlich erzeugt und $I_D(D_2)=Z(D)$, so ist D bereits eine Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_2^+$ und alle Amalgamierungsbasen, die D enthalten, sind kompatibel bezüglich D. Ist $Z(D)/I_D(D_2)$ unendlich zyklisch, so gibt es bis auf Kompatibilität bezüglich D nur zwei Amalgamierungsbasen für $\mathbf{N}_2^+$, die D enthalten, und zwar die, deren Zentrum die Untergruppe D in $I_D(D_2)$ schneidet, und die, deren Zentrum die Untergruppe D in $Z(D)$ schneidet. Ist $Z(D)/I_D(D_2)$ nicht zyklisch, so gibt es unendlich viele bezüglich D nicht kompatible Amalgamierungsbasen für $\mathbf{N}_2^+$, die D enthalten, und zwar zu jedem direkten Faktor Z von $Z(D)$ mit $I_D(D_2)\leqq Z$ eine, deren Zentrum die Untergruppe D in Z schneidet.

Ist $D\in\mathbf{N}_2$ dagegen endlich, so gibt es zunächst endlich viele Möglichkeiten, eine Untergruppe Z mit $D_2\leqq Z\leqq Z(D)$ zu wählen. Ist $Z\neq Z(D)$, so gibt es unendlich viele, bezüglich D nicht kompatible Möglichkeiten, D in eine endliche p-Gruppe A mit $A_2=Z(A)=Z$ einzubetten. Ist D zum Beispiel zyklisch der Ordnung p und $Z=\langle 1\rangle$ gewählt, so führen für $i\geqq 1$ die Obergruppen $A_i=C_p(2)(C_{p^i}(2)C_{p^i})$, wenn D jeweils auf den ersten Faktor — eine nicht zentrale Untergruppe — abgebildet wird, zu nicht kompatiblen Amalgamierungsbasen bezüglich D. Ist eine endliche Obergruppe A von D mit $A_2=Z(A)=Z$ gewählt, so gibt es höchstens endlich viele bezüglich D nicht kompatible Amalgamierungsbasen für $\mathbf{N}_2$, die A umfassen. Das liegt daran, daß durch $A_2=Z(D)=Z$, die maximale p-Potenzwurzel von Elementen aus $D\setminus Z$ in Obergruppen aus $\mathbf{N}_2$ zwar beschränkt ist, aber noch nicht festgelegt zu sein braucht. Im obigen Beispiel kann die Gruppe A_i in die bezüglich D nicht kompatiblen Amalgamierungsbasen $B_{ij}=(C_{p^j}(2)C_{p^j})(2)(C_{p^i}(2)C_{p^i})$, $1\leqq j\leqq i$, eingebettet werden, wobei D in B_{ij} in C_{p^j} eingebettet wird und nach Satz 5.4 in keiner Obergruppe von B_{ij} aus $\mathbf{N}_2$ in einer zyklischen Untergruppe der Ordnung p^{j+1} liegen kann. Somit sind B_{ij} und $B_{i',j'}$ für $j\neq j'$ und $i\geqq j, i'\geqq j'$ nicht kompatibel bezüglich D. Dagegen sind die B_{ij} für festes j und $i\geqq j$ alle kompatibel bezüglich D, da $C_{p^j}(2)C_{p^j}$ eine Amalgamierungsbasis in $\mathbf{N}_2$ ist.

Wir bemerken noch, daß eine endlich erzeugte Gruppe aus $\mathbf{N}_2$, die Elemente unendlicher Ordnung enthält, nicht in eine endlich erzeugte Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_2$ einbettbar ist. Denn jede endlich erzeugte Amalgamierungsbasis D für $\mathbf{N}_2$ ist endlich. Wir zeigen indirekt, daß D keine Elemente unendlicher Ordnung enthält. Nach Satz 5 ist $D_2=Z(D)$, so daß D sonst ein $d\in D\setminus Z(D)$ von unendlicher

Ordnung enthielte. Um Satz 5.3.b) zu erfüllen, müßten wir für jede Primzahl p entweder eine p-te Wurzel von d modulo D_2 in D haben, oder aber ein Element c von Ordnung p modulo $\langle d\rangle D_2$ mit $[c, d]\neq 1$. Im zweiten Fall wäre $[c, d]^p = [c^p, d]=1$ und D enthielte ein Element der Ordnung p. Da mindestens einer der beiden Fälle für unendlich viele Primzahlen einträte, wäre D nicht endlich erzeugt.

Ist π eine endliche Primzahlmenge, so hat man für die Klasse $\mathbf{N}_{2,\pi}$ in Satz $5.3)_\pi$ nur die endlich vielen Primzahlen aus π zu berücksichtigen und erhält, daß eine endlich erzeugte Gruppe aus $\mathbf{N}_{2,\pi}$ in einer endlich erzeugten Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_{2,\pi}$ liegt, deren π'-dividierbare Hülle eine scharfe Amalgamierungsbasis für $\mathbf{N}_{2,\pi}$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] R. B. J. T. ALLENBY, On amalgams of nilpotent groups, *J. London Math. Soc.* **43** (1968), 707—713.

[2] M. I. KARGAPOLOV, JU. I. MERZLJAKOV, Fundamentals of the Theory of Groups, *Springer Verlag, New York—Heidelberg—Berlin,* 1979.

[3] B. J. MAIER, Amalgame nilpotenter Gruppen der Klasse zwei, *Publ. Math. (Debrecen).* **31** (1984), 57—70.

[4] B. J. MAIER, Amalgams of torsion-free nilpotent groups of class three, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **72** (1784), 234—247.

[5] B. H. NEUMANN, J. WIEGOLD, On certain embeddability criteria for groups, *Publ. Math. (Debrecen)* **9** (1962), 57—64.

[6] A. ROBINSON, Introduction to model theory and the metamathematics of algebra, *North-Holland, Amsterdam,* 1963.

[7] A. ROBINSON, Infinite forcing in model theory, in Fenstad (ed.): *Proceedings of the second Scandinavian logic symposium, Oslo, 1970, North-Holland, Amsterdam,* 1971.

[8] D. SARACINO, Amalgamation bases for nil-2 groups, *Algebra Univ.* **16** (1983), 47—62.

[9] J. WIEGOLD, Nilpotent products of groups with amalgamations, *Publ. Math. (Debrecen)* **6** (1959), 131—168.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
D—7800 FREIBURG IM BREISGAU, BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

(Eingegangen am 10. Mai 1984)