Eine Bemerkung über positive Matrizen und Iterationen

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Abstract. Let **A** be an $n \times n$ matrix with strictly positive entries. Then the implications (1) hold only for $n \leqq 3$.

Herr Professor B. BARNA hat die folgende Frage über die im gewissen Sinne verallgemeinerte geometrische Reihe aufgeworfen. Wir betrachten die Vektoren $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ und die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ mit streng positiven Elementen $(\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 > \mathbf{0};\ \mathbf{A} > \mathbf{0})$. Es wird gefragt, ob die Relationen

$$a_{ii} < 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) > \mathbf{0}$$

zur Konvergenz der durch die lineare Iteration

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

erzeugten Iterationsfolge $\langle \mathbf{x}_n \rangle$ notwendig und hinreichend sind. Die bejahende Antwort hat wahrscheinlich geschienen, da die Vermutung in den Fällen $n = 1, 2$ durch B. BARNA bewiesen wurde [1].

Im Hinblick darauf, daß die obige Iteration in der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k)\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

umgeschrieben werden kann, kann die Frage als die Implikationen

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A^k < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii} < 1; \quad i = 1, \dots, n \\ \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) > \mathbf{0} \end{cases}$$

formuliert werden.

Es werden die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit λ, der maximale Eigenwert mit r (Satz 1.1 in [3], Seiten 1—2) und die Determinante $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ mit D bezeichnet. Die Implikationen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k < \infty \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow r < 1$$

und

$$\lambda \neq r \Rightarrow |\lambda| < r$$

sind im Falle $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ bekannt [2, 3].

Es kann leicht bewiesen werden, daß

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} a_{ii} < 1; \quad i = 1, \ldots, n \\ \text{und} \\ D > \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2}$$

Die Erfüllung der Relationen

$$a_{ii} < 1; \quad i = 1, \ldots, n$$

ist evident. Die Ungleichung $D > \mathbf{0}$ kann auf elementare Weise, mit der Induktion nach n gezeigt werden. (Sie folgt übrigens aus dem Satz 2.2 ([3], S. 28) für $s=1$, da $D=\Delta_n$ (1) ist.)

Die Umkehrung von (2) gilt aber nur für $n \leqq 3$. Im Falle $n=1$ ist die Behauptung evident.

Mit der Anwendung des Satzes 2.2 [3] erhalten wir für $n=2$ aus $D > \mathbf{0}$ und $1-a_{11} > \mathbf{0}$ die Relation $r < 1$. In dem Fall $n=3$ setzen wir voraus, daß $1 \leqq r$. Auf Grund des Satzes 2.2 [3] gibt es mindestens einen nicht-positiven (oberen) Hauptminor. Da die 1×1 und 3×3 Hauptminoren streng positiv sind, soll

$$\det\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}$$

nicht positiv sein.

Läßt sich die Determinante D nach der dritten Spalte entwickeln, so erhält man, daß $D < \mathbf{0}$, was ein Widerspruch ist.

Für $n=4$ wird ein Beispiel gezeigt, wo die Relationen

$$a_{ii} < 1\ (\forall i),\ D > \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \infty \tag{3}$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Seien nämlich

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls der Wert von } i+j \text{ mit 3 oder 7 gleich ist;} \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist jetzt $D = \frac{125}{16}$. Da jedes Element von $\mathbf{A}^{k+1}$ größer als 2^k $(k \in \mathbf{N})$ ist, gilt $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \infty$.

(Es können natürlich auch Matrizen von höherer Ordnung mit den Eigenschaften (3) angegeben werden.)

Unsere Bemerkung kann also auf folgende Weise formuliert werden.

Satz. *Ist* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *eine beliebige reelle* $n\times n$*-Matrix mit streng positiven Elementen, so gelten die Implikationen* (1) *nur für* $n \leqq 3$.

Literatur

[1] B. Barna, Unveröffentliche Handschrift (1965).
[2] F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung I—II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, *Berlin,* 1958, 1959.
[3] E. Seneta, Non-negative Matrices (An Introduction to Theory and Applications), George Allen and Unwin Ltd., *London,* 1973.

ADRESSE DES AUTORS:
ZOLTÁN SZABÓ
MATHEM. INST. DER UNIV.
H—4010 DEBRECEN, UNGARN

(Eingekommen am 22 Juni 1982)