Sur les groupes hyperresolubles abeliens

JOHN BOWERS (Leeds) et FRANCIS MAURIN (Paris)

Theory of groups: On hypersoluble groups.

The hyperderived subgroup $G^{*(1)}$ of a group G is the subgroup generated by the elements $x^{-1}\theta(x)$ where x ranges over G and θ ranges over the automorphism group of G. Then G is *hypersoluble* if taking hyperderived subgroups successively leads to the identity in a finite number of steps. It is proved here that if the normal subgroup N of a group G is hypersoluble then N lies in the hypercentre of G and that every periodic hypersoluble group is a nilpotent 2-group. Finally, it is proved that an abelian group is hypersoluble if and only if it is a cyclic 2-group.

Dans (1) nous avons défini les groupes hyperrésolubles et montré comment ils constituent une généralisation des groupes résolubles. Nous avons également montré que les seuls groupes finis cycliques hyperrésolubles sont d'ordre 2^n. Nous continuons ici la recherche des groupes hyperrésolubles. Après avoir démontré que tout groupe hyperrésoluble est nilpotent et que tout groupe hyperrésoluble périodique est un 2-groupe nilpotent, nous démontrons que tout groupe hyperrésoluble abélien est un 2-groupe cyclique.

Définition 1. Soit un groupe G et soit $G^{*(1)}$ le groupe hyperdérivé de G, $G^{*(2)}$ le groupe hyperdérivé de $G^{*(1)}, \ldots, G^{*(i)}$ le groupe hyperdérivé de $G^{*(i-1)}$. S'il existe un nombre entier k tel que $G^{*(k)}=\{1\}$ groupe dont le seul élément est l'unité, nous dirons que G est *hyperrésoluble*.

Définition 2. Soit un groupe G et sa série centrale ascendante: $Z_0=\{1\}\subseteqq \subseteqq Z_1(G)\subseteqq \ldots \subseteqq Z_i(G)\subseteqq \ldots$ pour $i\in I$. Nous appellerons *hypercentre* de G le sous-groupe de G, $\bigcup_{i\in I} Z_i(G)$.

Théorème 1. *Tout sous-groupe normal hyperrésoluble d'un groupe G est contenu dans l'hypercentre de G.*

En effet, soit N un sous-groupe normal hyperrésoluble du groupe G et la série hyperdérivée de N:

$$N = N_m \supset N_{m-1} \supset \ldots \supset N_i \supset \ldots \supset N_1 \supset N_0 = \{1\}.$$

Comme N_i est caractéristique dans le sous-groupe normal N, cette série hyperdérivée est une série de sous-groupes normaux de G. Evidemment, $N_0 \subseteqq Z_0(G)$. Supposons que $N_i \subseteqq Z_i(G)$. Soit $x\in G$ et $y\in N_{i+1}$. N_{i+1} étant un sous-groupe normal de G, l'élément x induit un automorphisme Θ sur N_{i+1}. Comme $N_{i+1}^{*(1)}=N_i$, $y^{-1}x^{-1}yx=y^{-1}\Theta(y)\in N_i$.

Alors, $\forall x\in G$ et $y\in N_{i+1}$, $x^{-1}yx\equiv y (\mathrm{mod}\, N_i)$ et donc $x^{-1}yx\equiv y (\mathrm{mod}\, Z_i)$ à cause de l'hypothèse d'induction et il en résulte que $y\in Z_{i+1}(G)$. Nous avons donc démontré que $N_i \subseteqq Z_i(G) \Rightarrow N_{i+1} \subseteqq Z_{i+1}(G)$, et donc $N \subseteqq Z_m(G)$ qui est un sous-groupe de l'hypercentre de G.

Dans le cas particulier oú $N=G$, la démonstration ci-dessus montre que la série

$$G \supseteqq G^{*(1)} \supseteqq \dots \supseteqq G^{*(i-1)} \supseteqq G^{*(i)} \supseteqq \dots \supseteqq \{1\}$$

est centrale, et nous pouvons énoncer le

Corollaire 1. *Tout groupe hyperrésoluble est nilpotent.*

En ce qui concerne les groupes infinis hyperrésolubles, nous pouvons démontrer le résultat suivant:

Théorème 2. *Tout groupe périodique hyperrésoluble est un 2-groupe nilpotent.*

En effet, si G est un groupe hyperrésoluble, G est nilpotent d'après le corollaire 1. G étant donc nilpotent et périodique, G est le produit de ses sous-groupes de Sylow: $G=G_2\times G_3\times\dots\times G_p\times\dots$.

Puisque chaque G_p est un sous-groupe caractéristique de G, tout automorphisme Θ de G peut être décomposé en le produit d'automorphismes Θ_2 sur G_2, Θ_3 sur $G_3, \dots, \Theta_p$ sur $G_p, \dots$, c'est-à-dire que si l'on a

$$x = (x_2, x_3, \dots, x_p, \dots)$$

avec $x\in G, x_2\in G_2, x_3\in G_3, \dots, x_p\in G_p, \dots$ alors on a:

$$\Theta(x) = \big(\Theta_2(x_2), \Theta_3(x_3), \dots, \Theta_p(x_p), \dots\big)$$

Réciproquement, à tout ensemble Θ_i $(i=2, 3, \dots, p, \dots)$ d'automorphismes de G_i correspond un automorphisme Θ de G. Il en résulte, puisque G est hyperrésoluble, que tout G_i est hyperrésoluble $\forall i=2, 3, \dots, p, \dots$. Or, nous avons démontré dans (1) que G_i ne peut être hyperrésoluble que si $i=2$. La décomposition de G se réduit donc à G_2, ce qui démontre le théorème 2.

Remarque. Tous les groupes hyperrésolubles infinis ne sont pas périodiques.

En effet, on peut montrer que le groupe H engendré par les 3 éléments a, b, c tels que $a^{16}=1$, $b^2=a^8$, $b^{-1}ab=a^{15}$, $c^{-1}ac=a^5$ et $bc=cb$ est tel que $H^{*(5)}=\{1\}$ et constitue donc un exemple de groupe infini non périodique hyperrésoluble.

Nous avons démontré dans (1) que les seuls groupes finis cycliques hyperrésolubles sont d'ordre 2^n; nous allons à présent démontrer que tout groupe *abélien* hyperrésoluble est cyclique d'ordre 2^n.

Nous dirons, dans la suite, qu'un groupe G est *d'exposant* k et nous écrirons $G^k=\{1\}$ si, $\forall x\in G$, $x^k=1$. Nous dirons que G est hyperrésoluble *de longueur* n si $G^{*(n)}=\{1\}$ et $G^{*(n-1)}\neq\{1\}$.

Lemme 3. *Si G est un groupe abélien hyperrésoluble de longueur n, alors G est d'exposant 2^n.*

En effet, si G est abélien, il admet l'automorphisme J:

$$J(x) = x^{-1}, \quad \forall x\in G \quad \text{et donc}$$

$$x^{-1}J(x) = x^{-2}\in G^{*(1)}$$

et donc $x^2\in G^{*(1)}$, si bien que

$$G^{*(1)} \supseteqq G^2 = \{x^2 | x\in G\}.$$

On démontre alors de la même façon que $G^{*(n)} \supseteqq G^{2^n}$ et puisque G est hyperrésoluble de longueur n,

$$G^{*(n)} = \{1\} \supseteqq G^{2^n} \quad \text{qui est donc } \{1\}.$$

Théorème 3. *Tout groupe hyperrésoluble abélien est cyclique d'ordre 2^n.*

En effet, soit $G \neq \{1\}$ un groupe abélien hyperrésoluble. D'après le lemme 3, G est d'exposant 2^n. D'après le théorème de Prüfer[2], G est donc le produit direct de cycles dont l'ordre divise 2^n.

1) *Dans la décomposition de G en produits de cycles, il existe un seul cycle d'ordre le plus élevé 2^k.*

En effet, si $\langle a \rangle$ d'ordre 2^k, $G = \langle a \rangle \times B$ oû B est un sous-groupe de G. Si $d \in B$, $\exists$ un automorphisme Θ de G tel que.

$\Theta(a) = ad$ et Θ conserve tous les cycles de B, si bien que $a^{-1}\Theta(a) = d \in G^{*(1)}$ et donc $B \subseteqq G^{*(1)}$.

Si B contient un autre cycle $\langle b \rangle$ d'ordre 2^k, le même raisonnement montre que $a \in G^{*(1)}$ et finalement, puisque $B \subseteqq G^{*(1)}$ et $\langle a \rangle \subseteqq G^{*(1)}$, $G^{*(1)} = \langle a \rangle \times B = G$, ce qui est contraire à l'hypothèse que G est hyperrésoluble.

2) *Si $G = \langle a \rangle \times B$ où $\langle a \rangle$ est le seul cycle d'ordre 2^k, alors $B = \{1\}$:*

En effet, puisque
—d'une part $G^{*(1)} \supseteqq G^2$ (démonstration du lemme 3) $a^2 \in G^{*(1)}$ — d'autre part $B \subseteqq G^{*(1)}$ (démonstration de 1)), $G^{*(1)} = \langle a^2 \rangle \times B$ et on a $\langle a \rangle \times B \supset G^{*(1)} \supseteqq \langle a^{2m-1} \rangle \times B$ qui entraîne que $G^{*(1)} = \langle a^2 \rangle \times B$.

Si $B \neq \{1\}$, soit 2^i l'ordre le plus élevé des cycles contenus dans la décomposition de B, comme on a démontré que $G^{*(1)} = \langle a^2 \rangle \times B$, on montre que $G^{*(k-i)} = \langle a^2 \rangle \times B$ qui est alors un groupe abélien hyperrésoluble dont la décomposition en produit direct de cycles contient 2 cycles d'ordre le plus élevé 2^i, ce qui est impossible d'après 1). Il en résulte que $B = \{1\}$.

De 1) et 2), on déduit évidemment que G est cyclique d'ordre 2^k.

Le théorème 3 donne une propriété caractéristique des 2-groupes cycliques.

Remarque: il existe des 2-groupes non-abéliens hyperrésolubles.

Exemple 1. Le groupe dihèdre d'ordre 2^{n+1} n'est pas abélien et est hyperrésoluble. En effet, un tel groupe G est défini comme engendré par a et b tels que $a^{2^n} = b^2 = 1$ et $b^{-1}ab = a^{-1}$. On démontre que la série hyperdérivée de G est

$$G \supset \langle a \rangle \supset \langle a^2 \rangle \supset \ldots \supset \langle a^{2^{n-1}} \rangle \supset \{1\}.$$

Exemple 2. Le groupe généralisé des quaternions d'ordre 2^{n+1}, où $n > 2$, est non abélien mais hyperrésoluble. En effet, un tel groupe G est défini comme engendré par a et b tels que $a^{2^n} = 1$, $b^2 = a^{2^{n-1}}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. On démontre, en examinant quels peuvent être les automorphismes de G, que $G^{*(1)} = \langle a \rangle$ et donc que G est hyperrésoluble de longueur $(n+1)$.

On remarque cependant que pour $n = 2$ (groupe des quaternions) $G^{*(1)} = G$ et n'est donc pas hyperrésoluble.

Bibliographie

[1] F. Maurin, Sur les groupes hyperrésolubles. *C. R. Acad. Sci. Paris* **282**, série A (1976), p. 1081.
[2] L. Fuchs, Infinite abelian groups. *Academic Press*.

J. BOWERS
SCHOOL OF MATHEMATICS
THE UNIVERSITY
LEEDS, LS2 9JT
ENGLAND

FR. MAURIN
6, RUE MIZON
75015 PARIS

(Reçu le 23 juin 1984)