Характеризация локально циклических нильполугрупп

К. БУЗАШИ (Дебрецен)—Н. И. ВИШНЯКОВА (Харьков)

Будем называть полугруппу A локально циклической, если каждое конечное подмножество $M \subset A$ содержится в некоторой циклической полугруппе $(a) \subset A$.

Очевидно, каждая локально циклическая полугруппа коммутативна.

В этой статье находится полная система инвариантов произвольной локально циклической нильполугруппы A, определяющая полугруппу A с точностью до изоморфизма.

Если A — локально циклическая нильполугруппа, то через A' будем обозначать полугруппу, полученную из A формальным присоединением единицы.

Предложение 1. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1. *A — локально циклическая нильполугруппа,*
2. *A' — мультипликативная полугруппа всех главных идеалов некоторого целостного примарного кольца нормирования R.*

Доказательство. Пусть A — локально циклическая нильполугруппа. Тогда полугруппа A допускает линейную упорядоченность по делимости:

$$b \leqq c, \quad \text{если} \quad b = cd \quad (b, c, d \in A).$$

Кроме того, в A' выполняется следующее свойство сокращения:

$$\text{из} \quad bc = dc \neq 0 \quad \text{следует} \quad b = d.$$

Следовательно, по теореме 1 из [2] существует кольцо нормирования R, мультипликативная полугруппа главных идеалов которого изоморфна полугруппе A'. Так как каждый необратимый элемент кольца R нильпотентен, то R имеет единственный простой идеал, совпадающий с нильрадикалом кольца.

Наоборот, если R — примарное целостное кольцо нормирования, то все главные идеалы $(a) \subset R$, $(a) \neq R$ образуют нильполугруппу A. Так как идеалы кольца R образуют цепь, то A — локально циклическая полугруппа. Предложение доказано.

Следствие. *Пусь A — локально циклическая нильполугруппа. Тогда:*

1) *A' либо циклическая полугруппа, либо объединение счетной возрастающей последовательности циклических нильполугрупп.*

2) *Если полугруппа A не циклическая, то идеал $I \subset A'$ тогда и только тогда содержит максимальный подидеал, когда I — ненулевой главный идеал в A'. Если $J \subset I$ — идеалы в A' и J — немаксимальный идеал в I, то существует*

такой главный идеал $(a)\subset A'$, *что имеют место строгие включения:*

(1) $$J\subset(a)\subset I.$$

Доказательство. Пусть R — примарное кольцо нормирования, мультипликативная полугруппа идеалов которого изоморфна A'. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между идеалами кольца R и идеалами полугруппы A', причем для идеалов кольца R выполняется утверждение 2 (см. лемму 1 в [1]). Следовательно, 2.) имеет место и для идеалов в A'.

Так как R имеет только один простой идеал, то каждый идеал в R обладает не более чем счетной системой образующих (см. следствие из леммы 6 в [2]). Отсюда следует первое утверждение следствия.

В силу следствия из предложения 1, любую локально циклическую нециклическую нильполугруппу A можно задать в виде

(2) $$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i),\quad a_1^{p_1}=0,\quad a_{i+1}^{p_{i+1}}=a_i\quad (i=1,\ldots),$$

причем, не нарушая общности, можно предполагать, что все числа p_i в (2) — простые.

Пусть

(3) $$\mathfrak{M}=\{p_1,p_2,\ldots\}-$$

семейство всех простых p_i $(i=1,2,\ldots)$, участвующих в (2). Каждое простое $p_i\in\mathfrak{M}$ имеет в $\mathfrak{M}$ конечную или счетную кратность.

В дальнейшем будут рассматриваться только нециклические полугруппы A. Им соответствуют семейства $\mathfrak{M}$ счетной мощности. Два семейства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ вида (3) будем считать совпадающими, если в $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ входят одни и те же различные простые числа и все простые $p_i\in\mathfrak{M}_1$ имеют в $\mathfrak{M}_2$ ту же кратность, что и в $\mathfrak{M}_1$.

Семейство (3) играет важную роль в характеризации полугрупп A вида (2). Ниже мы покажем, что класс изоморфных между собой полугрупп A определяет $\mathfrak{M}$ с точностью до конечного числа простых конечной кратности.

Сопоставим семейству $\mathfrak{M}$ множество $S(\mathfrak{M})$ всех рациональных чисел $\dfrac{m}{n}\in(0,1]$, знаменатели n которых имеют вид

$$n=p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_s};\ p_{i_j}\in\mathfrak{M}.$$

(Напомним, что простые $p_i\in\mathfrak{M}$ отличаются друг от друга своими индексами.) Множество $S(\mathfrak{M})$ превращается в аддитивную полугруппу, если сумму элементов $a,b\in S(\mathfrak{M})$ определить обычным образом при $a+b\leqq 1$ и положить $a+b=1$, если при обычном сложении $a+b>1$. Полугруппа $S(\mathfrak{M})$ является объединением возрастающей последовательности циклических нильполугрупп

(4) $$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}(b_i);\ (b_1)\subset(b_2)\subset\ldots$$

где

(5) $$b_i=\frac{1}{p_1\cdot\ldots\cdot p_i}.$$

$S(\mathfrak{M})$ допускает следующую мультипликативную запись:

$$(6) \qquad S(\mathfrak{M})\colon\ b_1^{p_1}=0,\ b_{i+1}^{p_{i+1}}=b_i \quad (i=1,2,\ldots),$$

где нуль соответствует числу 1 при аддитивной записи операции в полугруппе.

Отметим, что показатель нильпотентности элемента b_i вида (5) равен $p_1\cdot\ldots\cdot p_i$. (Для элементов a_i в (2) также выполняется равенство $a_i^{p_1\cdot\ldots\cdot p_i}=0$, но при этом показатель нильпотентности элемента a_i в A может быть меньше, чем $p_1\cdot\ldots\cdot p_i$.)

Заметим, что линейная упорядоченность элементов полугруппы $S(\mathfrak{M})$ по делимости совпадает с естественным линейным порядком чисел из $S(\mathfrak{M})$ на числовой прямой.

В силу сделанных выше замечаний о показателях нильпотентности элементов a_i и b_i соответственно в (2) и (4) полугруппа $S=S(\mathfrak{M})$ допускает гомоморфизм на полугруппу A:

$$(7) \qquad \varphi\colon S(\mathfrak{M})\to A;\ \varphi(b_i)=a_i \quad (i=1,2,\ldots).$$

Пусть

$$(8) \qquad I=\{b\in S\mid \varphi(b)=0\}—$$

ядро гомоморфизма φ. Очевидно, I — идеал полугруппы $S(\mathfrak{M})$.

Лемма 1. *Полугруппа A вида* (2) *изоморфна фактор-полугруппе Рисса $S(\mathfrak{M})/I$ по идеалу I вида* (8).

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно установить, что прообраз в $S=S(\mathfrak{M})$ каждого элемента $a\in A;\ a\neq 0$ при отображении φ состоит точно из одного элемента.

Пусть $a\in A$, $a\neq 0$ и $\varphi(c)=a$; $\varphi(d)=a$, где $c, d\in S$, $c\neq d$. Тогда, например $c=dt$, $t\in S$, откуда $a=a\varphi(t)$. Так как $a\neq 0$, то последнее равенство в A невозможно. Лемма доказана.

В силу леммы 1 изучение всевозможных локально циклических полугрупп A сводится к изучению всевозможных фактор-полугрупп Рисса $S(\mathfrak{M})/I$, где I — идеал в $S(\mathfrak{M})$.

Лемма 2. *Каждому идеалу $I\subset S(\mathfrak{M})=S$ соответствует точно одно число $\lambda(I)\in(0,1]$. Если $\mu\in(0,1]$, $\mu\notin S$, то существует точно один и притом неглавный идеал $I\subset S$, для которого $\lambda(I)=\mu$. Если $\mu\in S$, $\mu\neq 1$, то существуют точно два идеала $I\subset S$, для которых $\lambda(I)=\mu$: главный идеал (μ) и максимальный в (μ) идеал полугруппы S.*

Доказательство. Пусть I — идеал в S. Если $I=(\mu)$ — главный идеал, то положим $\lambda(I)=\mu$. Предположим, что I — неглавный идеал. Тогда I представляется в виде объединения сторого возрастающей последовательности главных идеалов

$$(9) \qquad I=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\lambda_i), \quad (\lambda_1)\subset(\lambda_2)\subset\ldots.$$

В силу (9)

$$(10) \qquad \lambda_1>\lambda_2>\ldots.$$

Тогда положим

$$\lambda(I) = \inf_i \lambda_i. \tag{11}$$

Определение (11) корректно. В самом деле, если

$$I = \bigcup_i^{\infty} (\delta_i), \quad (\delta_1) \subset (\delta_2) \subset \dots,$$

то для каждого $\lambda_i(\delta_j)$ существует такое $\delta_r(\lambda_k)$, что $\lambda_i \geqq \delta_r$ $(\delta_j \geqq \lambda_k)$. Следовательно, $\inf \lambda_i = \inf \delta_i$.

Заметим теперь, что для любого бесконечного семейства простых $\mathfrak{M} = \{p_1, p_2, \dots\}$ множество чисел $S(\mathfrak{M})$ всюду плотно на $(0, 1]$. Значит, для любого $\mu \in (0, 1]$ существует такая последовательность $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \dots$ $(\lambda_i \in S(\mathfrak{M}))$, что $\inf\limits_i \lambda_i = \mu$. Следовательно, отображение $I \to \lambda(I)$ есть отображение на $(0, 1]$.

Пусть. $I_1 \subset I_2$ и I_1 — немаксимальный идеал в I_2. Тогда по следствию из предложения 1 существует такой главный идеал (μ), $\mu \in S$, что имеют место строгие включения

$$I_1 \subset (\mu) \subset I_2.$$

Тогда, ввиду (9), (10), (11) имеем

$$\lambda(I_2) > \mu > \lambda(I_1).$$

Пусть $I = (\mu)$, $\mu \in S$ — главный идеал в S, а V — максимальный идеал в I. Если $\lambda(V) > \lambda(I) = \mu$, то существует такое число $\delta \in S$, что $\lambda(V) > \delta > \mu$. Тогда $V \subset (\delta) \subset I$, что противоречит максимальности идеала V в I. Следовательно, $\lambda(I) = \lambda(V)$. Это завершает доказательство леммы.

Пусть I — неглавный идеал в $S(\mathfrak{M}) = S$ и $\lambda(I) = \mu$. Тогда фактор-полугруппа Рисса $S/I = S^1(\mathfrak{M}, \mu) = S'(\mu)$ допускает следующую реализацию: $S'(\mu)$ состоит из всех чисел $\lambda \leqq \mu$, $\lambda \in S$. Операция в $S'(\mu)$ задается так: сумма чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1(\mu)$ определяется обычным образом, если $\lambda_1 + \lambda_2 \leqq \mu$, а если обычная сумма чисел λ_1, λ_2 превосходит число μ, то полагаем $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu$ (число μ играет роль нуля полугруппы). Очевидно, в полугруппе $S^1(\mu)$ нет минимально го идеала.

Пусть теперь $I = (\mu)$, $\mu \in S$, $\mu \neq 0$ — главтевей идеал в S. Тогда фактор-полугруппа Рисса $S/I = S^2(\mathfrak{M}, \mu) = S^2(\mu)$ реализуется следующим образом: $S^2(\mu)$ состоит из нуля (обычное обозначение 0) и всех чисел $\lambda \leqq \mu$, $\lambda \in S$. Сумма чисел $\lambda_1, \lambda_2 \leqq \mu$, $\lambda_i \in S$ определяется обычным образом, если $\lambda_1 + \lambda_2 \leqq \mu$, и по определению $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, если обычная сумма чисел λ_1 и λ_2 строго больше чем μ. Полугруппа $S^2(\mu)$ содержит минимальный идеал, состоящий из нуля и числа μ (главный идеал, порожденный элементом μ).

Итак, любому числу $\mu \in (0, 1]$ соответствует точно одна фактор-полугруппа Рисса $S^1(\mathfrak{M}, \mu)$ при $\mu \notin S(\mathfrak{M})$ или при $\mu = 1$ и точно две фактор-полугруппы $S'(\mathfrak{M}, \mu)$ и $S^2(\mathfrak{M}, \mu)$, если $\mu \in S(\mathfrak{M})$, $\mu \neq 1$.

Заметим, что ни одна из полугрупп $S'(\mu)$ не изоморфна ни одной из полугрупп $S^2(\lambda)$, $\lambda \in S$, ибо $S^2(\lambda)$ содержит минимальный идеал, а $S^1(\mu)$ не содержит.

Теорема. *Каждая локально циклическая нециклическая нильполугруппа изоморфна полугруппе $S^i(\mathfrak{M}, \lambda)$, где $\mathfrak{M}$ — семейство простых чисел, $\lambda \in (0, 1]$, $i=1, 2$. Полугруппы $S^i(\mathfrak{M}_1, \lambda_1)$ и $S^j(\mathfrak{M}_2, \lambda_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

1. $i=2$. *Семейства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ совпадают с точностью до конечного числа простых конечной кратности:*

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cup \tilde{\mathfrak{M}}_1, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \cup \tilde{\mathfrak{M}}_2; \quad \tilde{\mathfrak{M}}_i \cap \mathfrak{M} = \emptyset,^{*)}$$

где ни одно из простых не входит одновременно в $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ и эти семейства конечны:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_1 = \{p_1, \ldots, p_s\}, \quad \tilde{\mathfrak{M}}_2 = \{q_1, \ldots, q_r\}. \tag{12}$$

3. $\lambda_1 p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = \lambda_2 q_1 \cdot \ldots \cdot q_r p_{i_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_t}^{\alpha_t}$, *где $p_{i_1}, \ldots, p_{i_t}$ — произвольные простые бесконечной кратности в $\mathfrak{M}$, а α_i — целые числа.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon S^i(\mathfrak{M}_1, \lambda_1) \to S^j(\mathfrak{M}_2, \lambda_2)$ — изоморфизм. Тогда $i=j$, ибо в противном случае одна из полугрупп $S^i(\mathfrak{M}_1, \lambda_1)$, $S^j(\mathfrak{M}_1, \lambda_2)$ содержит минимальный идеал, а другая не содержит. Предполагаем, что одно из семейств $\tilde{\mathfrak{M}}_i$ $(i=1, 2)$, например $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ бесконечно: $\tilde{\mathfrak{M}}_1 = \{p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, \ldots\}$. Тогда полугруппа $S_1 = S^i(\mathfrak{M}_1, \lambda_1)$ содержит такие элементы a, что в S_1 при любом натуральном n разрешимо уравнение $p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_n} \cdot x = a$, но $S_2 = S^j(\mathfrak{M}_2, \lambda_2)$ таких элементов не содержит. Следовательно, семейства $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ состоят из конечного числа простых конечной кратности в $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

Установим пункт 3) теоремы. Выберем в S_1 элемент

$$a = \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t} < \lambda_1, \tag{12'}$$

где числа $p_1, \ldots, p_s$ — те же, что и в (12), а $p_{s+1}, \ldots, p_t \in \mathfrak{M}$. Тогда элементы

$$\frac{a}{p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_q}}, \tag{13}$$

где $\{p_{j_1}, \ldots, p_{j_q}\}$ — произвольное конечное подсемейство семейства

$$\mathfrak{M}_1 \setminus \{p_1, \ldots, p_s, p_{s+1}, \ldots, p_t\},$$

порождают полугруппу S_1.

Пусть $\varphi(a) = b \in S_2$. Тогда элементы

$$\frac{b}{p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_q}}$$

(см. (13)) порождают полугруппу S_2. Пусть

$$b = \frac{m}{p_1' \cdot \ldots \cdot p_k'} \quad (p_1', \ldots, p_k' \in \mathfrak{M}_2). \tag{14}$$

---

*) Простые p_j в $\tilde{\mathfrak{M}}_i$ $(i=1, 2)$ отличаются друг от друга номерами.

Будем предполагать, что дробь (14) несократима. Предположим, что $m \equiv 0 \pmod p$, где p — простое число, входящее в $\mathfrak{M}_2$ с конечной кратностью $\gamma \geqq 0$ (если $\gamma=0$, то число p в $\mathfrak{M}_2$ не содержится). Тогда в S_2 разрешимо уравнение $p^{\gamma+1} \cdot x = b$, а уравнение $p^{\gamma+1} \cdot x = a$ в S_1 неразрешимо, что противоречит равенству $\varphi(a)=b$. Следовательно, число m делится только на такие простые, которые входят в $\mathfrak{M}$ с бесконечной кратностью. Далее, если среди чисел $p_1', \ldots, p_k'$ в (14) не встречается одно из простых $q_1, \ldots, q_r$ (см. (12)), скажем q_1, то в полугруппе S_2 разрешимо уравнение $q_1 x = b$, а уравнение $q_1 \cdot x = a$ в S_1 неразрешимо. Значит, среди чисел $p_1', \ldots, p_k'$ встречаются все числа $q_1, \ldots, q_r$.

Наконей, пусть p — любое из простых $p_{s+1}, \ldots, p_t$ (см. (12′)), имеющих конечную кратность, скажем γ, в семействе $\mathfrak{M}$. Если p не входит в знаменатель числа b (см. (14)), то в S_2 разрешимо уравнение $b = p^{\gamma+1} \cdot x$, а уравнение $a = p^{\gamma+1} \cdot x$ в S_1 не имеет решения, что снова дает противоречие. Пусть (после перенумерации) $p_{r+1}, \ldots, p_{r+f}$ — те из простых $p_{r+1}, \ldots, p_t$, которые имеют в $\mathfrak{M}$ конечную кратность. Имеем $p_1' \cdot \ldots \cdot p_k' = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_{s+f} \cdot p_{s+f+1} \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_{r+f+1}, \ldots, p_k$ входят в $\mathfrak{M}$ с бесконечной кратностью.

Занумеруем все простые p_i, принадлежащие семейству

$$\mathfrak{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_s, p_{s+1}, \ldots, p_t\}$$

(см. (12′)): $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots$. Положим

$$c_n = \frac{a}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Так как деление ненулевых элементов на натуральные числа в S_1 и S_2 выполняется однозначно, а $\varphi\colon S_1 \to S_2$ изоморфизм, то

$$d_n = \varphi(c_n) = \frac{b}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Значит, элементы c_n и d_n $(n=1, 2, \ldots)$ имеют соответственно в S_1 и S_2 один и тот же показатель нильпотентности γ_u. Тогда имеем

$$\frac{\gamma_n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}} \geqq \lambda_1,$$

$$\frac{\gamma_n - 1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}} < \lambda_1.$$

Следовательно,

$$\left| \lambda_1 - \frac{\gamma_n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}} \right| < \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t \cdot p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}},$$

$$\lambda_1 = \lim_{n \to \infty} \gamma_n c_n = \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t} \lim_{n \to \infty} \frac{\gamma_n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}}.$$

Точно так же

$$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \gamma_n d_n = \frac{m}{p_1' \cdot \ldots \cdot p_k'} \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}},$$

откуда

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_1' \cdot \ldots \cdot p_n'}{m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t} = \frac{q_1 \cdot \ldots \cdot q_r}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s} \hat{m},$$

где

(15) $$\hat{m} = p_{j_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_l}^{\alpha_l},$$

причем $p_{j_1}, \ldots, p_{j_l}$ — простые бесконечной кратности в $\mathfrak{M}$, а d_i — целые числа. Необходимость условий теоремы доказана. Установим их достаточность. Пусть

(16) $$\lambda_1 p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = \lambda_2 q_2 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot \hat{m},$$

где $\hat{m}$ — число вида (15). Пусть

$$a_0 = \frac{1}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_t} < \lambda_1,$$

$$b_0 = \frac{1}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_{s+l} \cdot \hat{m}} < \lambda_2,$$

где $p_{s+1}, \ldots, p_{s+l} \in \mathfrak{M}$. Положим

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_1 \setminus \{p_1, \ldots, p_s, p_{s+1}, \ldots, p_{s+l}\} = \mathfrak{M}_2 \setminus \{q_1, \ldots, q_r, p_{s+1}, \ldots, p_{s+l}\}.$$

Пусть (после перенумерации)

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \{p_1', p_2', \ldots\}.$$

Положим

$$a_i = \frac{a_0}{p_1' \cdot \ldots \cdot p_i'}, \quad b_i = \frac{b_0}{p_1' \cdot \ldots \cdot p_i'}, \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Полугруппа $S_1(S_2)$ порождается элементами $a_i(b_i)$ $(i=1, 2, \ldots)$. Покажем, что показатели нильпотентности элементов a_i и b_i соответственно в S_1 и S_2 совпадают. Действительно, если полугруппы S_1 и S_2 не содержат минимальных идеалов, то показатель нильпотентности элемента a_i есть такое наименьшее натуральное число γ, что

$$\frac{\gamma}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_{s+l} \cdot p_1' \cdot \ldots \cdot p_i'} \geqq \lambda_1,$$

что равносильно неравенству

(17) $$\frac{\gamma}{p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_{s+l} \cdot p_1' \cdot \ldots \cdot p_i'} \geqq \lambda_1 (p_1 \cdot \ldots \cdot p_s).$$

С другой стороны, показатель нильпотентности элемента b_i есть такое наименьшее натуральное число δ, что

$$\frac{\delta}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_{s+l} \cdot p_1' \cdot \ldots \cdot p_i' \hat{m}} \geqq \lambda_2,$$

или

$$\frac{\delta}{p_{s+1}\cdot\ldots\cdot p_{s+l}\cdot p_1'\cdot\ldots\cdot p_i'} \geqq \lambda_2 q_1\cdot\ldots\cdot q_r \hat{m}. \tag{18}$$

В силу (16) неравенства (17) и (18) для каждого натурального i имеют одно и то же наименьшее натуральное решение $\gamma=\delta$.

Итак, для полугрупп S_1 и S_2 без минимальных идеалов показатели нильпотентности элементов a_i и b_i $(i=1, 2, \ldots)$ совпадают. Если S_1 и S_2 — полугруппы с минимальными идеалами, то в (17) и (18) вместо знака $\geqq$ должно быть $>$. Это не меняет остальных рассуждений, и снова получаем, что индекс нильпотентности элементов a_i и b_i соответственно в S_1 и S_2 совпадают. Итак

$$S_1=\bigcup_i (a_i),\quad (a_1)\subset(a_2)\subset\ldots$$

$$S_2=\bigcup_i (b_i),\quad (b_1)\subset(b_2)\subset\ldots,$$

$$p_{i+1}' a_{i+1}=a_i,\quad p_{i+1}' b_{i+1}=b_i$$

и индекс нильпотентности элементов a_i и b_i $(i=1, 2, \ldots)$ совпадают. Значит, отображение φ: $\varphi(a_i)=b_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ определяет изоморфизм S_1 на S_2. Теорема доказана.

Литература

[1] С. Д. Берман, Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 171—176.

[1] С. Д. Берман, Н. И. Вишнякова, О спектре кольца нормирования. *Publ. Math. (Debrecen)* **30** (1983), 203—216.

(Поступило 14. августа 1983 г.)