Конечные группы с данным числом классов сопряженных элементов

Я. Г. БЕРКОВИЧ

§ 1. Введение

Пусть G — конечная группа порядка g; G' — ее коммутант порядка g'; $r(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G (число G-классов); $Irr(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G. Известно, что $|Irr(G)|=r(G)$, g/g' — число линейных (одномерных) характеров группы G; поэтому $n(G)=r(G)-g/g'$ — число нелинейных характеров группы G, которые неприводимы.

В работе [1] имеется список конечных групп G с $r(G)\leqq 9$. Цель этой статьи — классифицировать группы G с $r(G)\in\{10, 11, 12\}$. Эти результаты мы выводим из данной в статье [2] классификации конечных групп с $n(G)\leqq 7$. Кроме того мы пользуемся списком неабелевых простых групп G с $r(G)\leqq 12$, имеющимся в статье [3].

Приводим основные обозначения.

p, q — простые числа; m, n, a, b, r, t — натуральные числа; $A[B$ — полупрямое произведение A и B с инвариантным множителем B (у нас всегда $A[B\neq A\times B$); $(A, B)=A[B$ — группа Фробениуса с ядром B; $C(m)$ — циклическая группа порядка m; $E(p^a)$ — элементарная абелева группа порядка p^a; $ES(m, p)$ — экстраспециальная группа порядка p^{1+2m}; $S(64)$ — специальная группа порядка 64, все инволюции которой лежат в ее центре, равном $E(4)$; $S^0(64)$ — специальная группа порядка 64 с центром, равным $E(4)$, содержащая более трех инволюций; $D(2m)$ — группа диэдра порядка $2m>4$; $Q(2^m)$ — обобщенная группа кватернионов порядка 2^m; $SD(2^m)$ — полудиэдральная группа порядка 2^m; S_n — симметрическая группа степени n; A_n — знакопеременная группа степени n; $AGL(m, p)=GL(m, p)[E(p^m)$; $ASL(m, p)=SL(m, p)[E(p^m)$; M_g — стабилизатор точки в группе Матье M_{11} степени 11; $Z(G)$ — центр группы G; $\varphi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G; $C_G(H)$ — централизатор подмножества H в группе G; $A*B$ — центральное произведение подгрупп A и B; для $H\subseteqq G$ через $r_G(H)$ обозначим число G-классов, содержащих элементы из $H-\{1\}$; $\hat{S}_n$ — накрывающая S_n с кватернионной силовской 2-подгруппой, $\check{S}_n$ — накрывающая S_n с полудиэдральной силовской 2 — подгруппой, $n=4, 5$; $F(G)$—подгруппа Фиттинга группы G. Если $G'<G$, то через $f(G)$ обозначим число смежных систем $xG'\neq G'$ с $r_G(xG')>1$. Запись $\bar{h}=\bar{h}(G)=(\ldots, h_i^{a_i}, \ldots)$ означает, что среди G-классов имеется точно a_i классов длины h_i; запись $\bar{d}=\bar{d}(G)=(\ldots, d_i^{b_i}, \ldots)$ означает, что в $Irr(G)$ имеется точно b_i характеров степени d_i. Если G — p-группа, то $z_i = |\{x \in G \,\|G: C_G(x)| = p^i\}|$.

Во избежание большого числа повторений мы во второй главе более или менее подробно рассматриваем лишь случай $r(G)=12$. Прочитавший статью без труда восстановит доказательства в случаях $r(G)=10, 11$.

Благодарю Л. С. Казарина за большую помощь во время длительной работы над этой статьей.

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе дан список всех G с $r(G) \in \{10, 11, 12\}$. Группы, записанные в каждой из трех теорем над горизонтальной чертой — это все те группы, удовлетворяющие условиям этих теорем, у которых число нелинейных неприводимых характеров не превосходит 7.

Теорема 1. *Если* $r(G)=10$, *то* G — *одна из перечисленных ниже групп:*

1—25. $C(10)$; $Q(8) \times C(2)$; $D(8) \times C(2)$; $Q(8) * C(4)$ *и* $D(8) * C(4)$ *порядка 16; минимальная неабелева группа порядка 16;* $D(28)$; $C(4)[C(7)$; $C(8)[C(5)$ *с центром порядка 2;* $AGL(1, 5) \times C(2)$; $(C(3), C(7)) \times C(2)$; $C(4)[A_4$; $S_4 \times C(2)$; $C(6)[C(9)$ *и* $C(6)[E(9)$ *с* $\bar{h}=(1, 2, 3^2, 6^3, 9^3)$; $C(6)[E(16)$ *и* $C(6)[(C(4) \times C(4))$ *с* $\bar{h}=(1, 3, 4, 6^2, 12, 16^4)$; $(C(4), C(25))$; $(C(4), E(25))$; $(C(4)[C(3), E(49))$; $ASL(2, 3)$; $(Q(16), E(49))$; *нормализатор силовской 2-подгруппы в простой группе Судзуки* $Sz(8)$; $(C(8), C(17))$; $(C(6), E(25))$.

26—34. $D(34)$; $C(2)[ES(1, 3)$ *экспоненты 6,* $\bar{h}=(1^3, 6^4, 9^3)$, $\bar{d}=(1^2, 2^4, 3^4)$; $D(6)[E(16)$, $D(6)[(C(4) \times C(4))$, $\bar{h}=(1, 3^3, 6, 12^4, 32)$; $A_5 \times C(2)$; $D(10)[E(16)$, $\bar{h}=(1, 5^3, 20^4, 32^2)$; M_{11}; $PSL(3, 4)$; $(SL(2, 5), E(121))$.

Теорема 2. *Если* $r(G)=11$, *то* G — *одна из перечисленных ниже групп:*

1—20. $C(11)$; $ES(1, 3)$; $D(32)$; $Q(32;)$ $SD(32)$; $g=32$, $z_0=2$, $z_1=6$, $g'=4$; $E(4)[ES(1, 3)$, $g/g'=4$, $\bar{h}=(1, 2, 6^2, 9^3, 12, 18^3)$; $AGL(1, 11)$; $(C(4), C(29))$; $(C(5), C(31))$; $(C(9), C(19))$; $(C(6), C(31))$; $G/E(4)=C(4)[A_4$ *или* $S_4 \times C(2)$, $\bar{h}=(1, 3, 4, 12^2, 24^4, 32^2)$; $(C(8), E(25))$; $(C(7), C(29))$; $AGL(1, 5)[E(16)$, $\bar{h}=(1, 5, 10, 20^2, 40^5, 64)$; $(Q(8), E(49))$; $(Q(8)[C(3), E(49))$.

21—32. $D(38)$; $(C(3), E(25))$; $C(3)[ES(2, 2)$, $\bar{h}=(1^2, 6^5, 16^4)$; $SL(2, 7)$; $AGL(2, 3)$; *нерасщепляемое расширение* $E(8)$ *посредством* $SL(3, 2)$ *и тривиальным центром;* S_6; $PGL(2, 9)$; $AGL(3, 2)$; Aut $PSL(2, 8)$; $PSL(2, 17)$; $Sz(8)$.

Теорема 3. *Если* $r(G)=12$, *то* G — *одна из перечисленных ниже групп:*

1—19. $C(12)$; $E(4) \times C(3)$; $C(8)[C(3)$; $(C(4)[C(3)) \times C(2)$; $C(4) \times D(6)$; $E(4) \times D(6)$; $C(3) \times D(10)$; $C(9)[E(4)$ *с центром порядка 3;* $A_4 \times C(3)$; $C(8)[E(9)$ *с центром порядка 2;* $(C(4), E(9)) \times C(2)$; $A_4 \times D(6)$; $AGL(1, 7)[C(3)$, $\bar{h}=(1, 2, 6^3, 7^2, 14^2, 21^3)$; $G/Z(G)=(Q(8), E(9))$ *и* $Z(G)=C(2)$ *не выделяется в* G *прямым множителем;* $(Q(8), E(9)) \times C(2)$; $AGL(1, 7)[E(4)$, $\bar{h}=(1, 3, 6^4, 7, 21, 28^4)$; $C(6)[G'$, $G'=S(64)$ *или* $S^0(64)$, $\bar{h}=(1, 3, 12, 16, 24^4, 64^4)$; $(C(8)[C(5), E(81))$ *с* $Z(C(8)[C(5))=C(2)$.

20—21. $C(4)[C(9)$ *и* $C(4)[E(9)$ *с центром порядка 2.*

22—51. $(C(2), E(9))\times C(2)$; $D(36)$; $D(42)$; $D(16)[C(3)$ *и* $SD(16)[C(3)$ *с* $C_G(C(3))=D(8)\times C(3)$; $SD(16)[C(3)$ *и* $Q(16)[C(3)$ *с* $C_G(C(3))=Q(8)\times C(3)$; $D(10)\times D(6)$; $(C(3), E(4)\times C(7))$; $SL(2,3)[E(4), G'=Q(8)\times E(4), \bar{h}=(1^2, 3^2, 6^4, 16^4)$; $C(4)[E(27), g/g'=4, \bar{h}=(1, 2, 4^6, 9, 18, 27^2)$; $Q(8)[E(27), \bar{h}=(1, 2, 8^3, 9, 18^4, 54^2)$; $\hat{S}_5$; $\check{S}_5$; $PSL(2,7)\times C(2)$; $D(6)[H, H=S(64)$ *или* $S^0(64)$, $\bar{h}=(1, 3, 12^5, 48^4, 128)$; $A[H$, $A=C(4)[C(3)$ *или* $D(12)$, $H=S(64)$ *или* $S^0(64)$, $g/g'=4$, G' *— группа Фробениуса,* $\bar{h}=(1, 3, 12, 16, 48^2, 96^4, 128^2)$; $(Q(16), E(81))$; $(C(4)[C(5), E(81))$; $G/E(16)\simeq S_5$, $\bar{h}=(1, 15, 40, 60^2, 120^2, 320^2, 240^2, 384)$; $(SL(2,3), E(121))$; $PSL(2,19)$; $PSL(3,3)$; M_{22}; $(SL(2,5), E(361))$; $Z(G)=C(2)$, $G/Z(G)=(C(3), C(4)\times C(4))$, *G содержит нормальную подгруппу* $E(4)$ *с* $G/E(4)\cong SL(2,3)$, $\bar{h}=(1^2, 3^2, 6^4, 16^4)$.

§ 3. Известные результаты

В лемме 1 мы не указываем $\bar{h}$, отсылая к [3].

Лемма 1*. *Если G неабелева простая с* $r(G)\leqq 12$, *то* $G\in\{A_5, PSL(2,7), A_7, PSL(2,9), PSL(2,11), PSL(2,13), PSL(2,8), PSL(3,4), M_{11}, Sz(8), PSL(2,17), M_{22}, PSL(2,19), PSL(3,3)\}$.

Мы предполагаем, что читателю знаком список всех G с $r(G)\leqq 9$ *из* [1].

Лемма 2. *Пусть R нормальная в G,* $\bar{x}=xR\neq R$, $\bar{G}=G/R$. *Если* $r_G(xR)=1$, *а* $C_{\bar{G}}(\bar{x})=\bar{L}$, *то* $R\leqq L'$.

Лемма 3. *Пусть R — минимальная нормальная p-подгруппа в G,* Q/R *— нормальная подгруппа порядка q в* G/R. *Если Q ненильпотентная, она является группой Фробениуса.*

Лемма 4. *Пусть x — элемент порядка m в G,* $|N_G(\langle x\rangle): C_G(x)|=t$. *Тогда образующие* $\langle x\rangle$ *принадлежат точно* $\varphi(m)/t$ *различным G-классам (здесь* φ *— функция Эйлера).*

Лемма 5. *Пусть R — минимальная нормальная p-подгруппа в G;* Q/R *— такая нормальная подгруппа в* G/R *(порядок* Q/R *равен степени p), что все подгруппы порядка p из* Q/R *сопряжены в* G/R. *Если Q неабелева, она специальная и* $\exp Q=p$ *или* $\langle x\in Q|x^p=1\rangle=R$. *Если* $|Q/R|=p^2$ *и Q неабелева, то* $|R|=p$ *и* $\exp Q=p$ *или* $Q=Q(8)$.

Леммы 2—5 см. в [2].

Лемма 6. *Неинвариантная силовская подгруппа группы Фробениуса циклическая или обобщенная группа кватернионов, инвариантный множитель нильпотентен.*

Лемма 7. *(Бернсайд). Пусть H нормальна в G,* $|G:H|=p$, $\chi\in Irr(G)$. *Тогда* $\chi_H\in Irr(H)$ *или* $\chi_H=\varphi_1+\ldots+\varphi_p$, *где различные* $\varphi_i\in Irr(H)$.

Лемма 8. *Пусть H нормальна в G,* $|G:H|=p$, *и число всех тех* $\varphi\in Irr(H)$, *для которых* $\varphi^G\notin Irr(G)$, *равно u. Тогда* $r(H)=pr(G)-(p^2-1)u$.

Это легко следует из леммы 7 и закона взаимности Фробениуса.

* Неабелевых простых групп G с $r(G)=13$ нет (сообщение Э. М. Комиссарчика).

Лемма 9 *(см. [2]). Пусть H нормальна в G и $|G:H|=p$, $s=r_G(G-H)$, k — число всех тех H-классов, которые являются также G-классами. Тогда* $r(G)=$ $=s+\frac{1}{p}(r(H)-k)+k$.

Мы часто используем теорему Н. Ито о том, что степень неприводимого характера делит индекс нормальной абелевой подгруппы.

Если $G=A\times B$, то $r(G)=r(A)r(B)$. Поэтому определение групп $G=A\times B$ с $A\neq 1\neq B$ сводится к определению групп A и B с $r(A)$, $r(B)<r(G)$.

В связи со сказанным можем считать, что

(А) $r(G)\in\{10, 11, 12\}$.

(Б) G непростая.

(В) G не разлагается в нетривиальное прямое произведение.

(Г) $n(G)>7$.

В связи с большим обьемом полного текста статьи мы вначале классифицируем все G с полупростым G', а затем ограничиваемся лишь теми G, для которых $r(G)=12$. Интересующемуся читателю предлагается самому провести пропущенные доказательства.

Глава 1

Группы с полупростым коммутантом

§ 4. Редукционные леммы

1°. Вначале докажем несколько лемм общего характера, не предполагая, что $r(G)\leqq 12$.

Лемма 10. *Пусть $M=S_1\times\ldots\times S_k$ — нормальная подгруппа группы G, все S_i неабелевы простые, $k>1$. Тогда $r_G(M)\geqq 3k+3$.*

Доказательство. По $\{p, q\}$-теореме Бернсайда $r_G(S_i)\geqq 3$. Пусть x_i, y_i, z_i — элементы различных простых порядков в S_i, $1\leqq i\leqq k$. Для любого $x\in G$ имеем $S_i^x\in\{S_1, \ldots, S_k\}$. Поэтому следующие $3k+3$ элементов из M попарно не сопряжены в G:

$$x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2\ldots x_k,$$

$$y_1, y_1y_2, \ldots, y_1y_2\ldots y_k,$$

$$z_1, z_1z_2, \ldots, z_1z_2\ldots z_k,$$

$$x_1y_2, x_1z_2, y_1z_2.$$

Так как все эти элементы неединичные, лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть M — нормальная подгруппа индекса 2 в G, $P\in\mathrm{Syl}_2(G)$. Если $|P|>4$ и P не максимального класса, то $s=r_G(G-M)\geqq 4$.*

Доказательство. Если $x \in G-M$, то x имеет четный порядок. Так как $|C_G(x)|>4$, то $r_G(G-M) \geqq 2$.

Пусть $s=2$. Тогда $G-M$ разбивается на два G-класса длин $g/2m$ и $g/2n$ соответственно, откуда $g/2=g/2m+g/2n$, $1/m+1/n=1$. Это дает $m=n=2$, что невозможно, так как $|C_G(x)|>4$ в силу того, что P не максимального класса.

Пусть $s=3$. Тогда для натуральных m, n, t имеем $g/2=g/2m+g/2n+g/2t$, откуда $1/m+1/n+1/t=1$. Пусть $m \leqq n \leqq t$. Тогда последнее уравнение имеет решения $\{m, n, t\}=\{3, 3, 3\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 4\}$. Так как $|P|>4$ и P не максимального класса, лыбое из чисел m, n, t больше 2 и одно из них кратно 4. Противоречие, доказывающее лемму.

2°. С этого момента и до конца главы предполагается, что

(A′) $F(G')=1$, $r(G) \in \{10, 11, 12\}$.

Лемма 12. $F(G)=1$.

Доказательство. Пусть $M=F(G)>1$. Тогда $MG'=M \times G'$, а из $g/g' \leqq 4$ и (B) имеем $M=C(2)$, $g/g'=4$, так что $r(G)=12$. Но $(G/M)'<G/M$. Поэтому из списка в [1] следует $r(G/M) \geqq 7$, а из $\{p, q\}$-теоремы Бернсайда выводим $r(G/M) \leqq 9$. Обращаясь вновь к [1] и перебирая все G/M с $7 \leqq r(G/M) \leqq 9$ и $(G/M)'<G/M$, легко получим противоречие.

3° Для сокращения некоторых рассуждений удобно воспользоваться таким результатом: Если G — неабелева простая группа, то ее группа внешних автоморфизмов разрешима. Это — гипотеза Шрейера, вытекающая из классификации конечных простых групп.

Лемма 13. $G'<G$.

Доказательство. Пусть $G'=G$, и возьмем в $\mathbf{G}$ минимальную нормальную подгруппу M. Если M непростая, что $r_G(M) \geqq 9$ по лемме 10. Так как $G'=G$ и $M<G$, то $r(G/M) \geqq 5$ (так как G/M неразрешима, то $r(G/M) \geqq 5$ по [1]), и поэтому $r(G)>12$, противоречие. Пусть M простая. Тогда $G/MC_G(M)$ разрешима и $G=M \times C_G(M)$, что противоречит (B).

Лемма 14. G' — *простая группа.*

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $M \leqq G'$ по лемме 12. По лемме 10 и лемме 11 подгруппа M простая и даже является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Поэтому $C_G(M)=1$, так что G/M разрешима. Предположим, что $M<G'$. Тогда G/M неабелева. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Предположим, что $\dfrac{g}{g'}=4$. Тогда $P \cap G'$ нециклическая по теореме Бернсайда о сдвиге, и отсюда следует, что P не максимального класса (так как в 2-группе максимального класса все нормальные подгруппы индекса 4 циклические). Пусть $G'<G_1<G$. Тогда $r_G(G-G_1) \geqq 4$ по лемме 11. Очевидно, $r_G(G_1-G') \geqq 2$, так что $r_G(G-G') \geqq 6$. А так как $M<G'$, то $r_G(M) \leqq 3$ (здесь нужны рассуждения, аналогичные доказательству леммы 11), так что $M=A_5$. Теперь из $C_G(M)=1$ следует: G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}\, A_5=S_5$, что противоречит нашим предположениям о G.

Пусть $\frac{g}{g'}=3$. Тогда легко показать, как и в лемме 11, что $r_G(G-G')\geqq 6$. Благодаря тому, что $Sz(2^{2n+1})$ — единственная неабелева простая группа, порядок которой не делится на 3 [4], можем считать, что 3 делит $|M|$. Так как $r_G(G'-M)\geqq 2$, то $r_G(M)\leqq 3$, и снова получается противоречие, как и в предыдущем абзаце.

Пусть, наконец, $\frac{g}{g'}=2$. Так как простые группы с силовской 2-подгруппой максимального класса известны и для них известна группа внешних автоморфизмов, можем считать, что P не максимального класса. Тогда $r_G(G-G')\geqq 4$ по лемме 11. Отметим, что G/M неабелева разрешимая, $|G/M:G'/M|=|G/M:(G/M)'|=2$. Как и выше, $r_G(M)>3$. Но, если $r_G(M)=4$, то строение такой M известно по теореме М. Судзуки о группах с нильпотентными централизаторами, в частности, $\operatorname{Out} M$ абелева: тогда $M<G'$ невозможно. Итак, $r_G(M)\geqq 5$. Так как $r_G(G')\leqq 5$, получаем $M=G'$. Лемма доказана.

Итак, G' простая и $\frac{g}{g'}\leqq 4$.

§ 5. $\frac{g}{g'}=2$

В этом параграфе $P\in \operatorname{Syl}_2(G)$.

Если $P\cap G'$ максимального класса или абелева, то применение известных классификационных результатов дает две группы: $G=PGL(2,9)$ и $G=S_6$, $r(G)=11$. Далее считаем, что $P\cap G'$ не максимального класса и неабелева. Тогда $s=r_G(G-G')\geqq 4$ по лемме 11. Кроме того, в обозначениях леммы 9 имеем $k\geqq 2$.

1°. $r(G)=10$. Тогда по лемме 9.

$$10=r(G)=s+\frac{1}{2}(r(G')+k),$$

откуда $r(G')\leqq 10$. Перебирая все простые G' с $r(G')\leqq 10$ (см. лемму 1), убеждаемся, что $r(G)\neq 10$. При этом используется тот факт, что $G/G'\cong C(2)$ действует как группа перестановок на G-классах одной и той же фиксированной длины, и это соображение позволяет оценить k снизу, что существенно уменьшает проверку.

2°. $r(G)=11$. Тогда из $r(G)=s+\frac{1}{2}(r(G')+k)$ следует $r(G')\leqq 12$. Но $r(G')=2r(G)-3u$, где $u\geqq 0$ целое (лемма 8). Итак, $r(G')=22-3u$, то есть $r(G')\equiv 1 \pmod 3$. Поэтому $r(G')\in\{7, 10\}$, и снова, перебирая группы из леммы 1, убеждаемся, что это невозможно.

3°. $r(G)=12$. Тогда из $r(G)=s+\frac{1}{2}(r(G)+k)$ следует $r(G')\leqq 14$. По лемме 8, однако, $r(G')=2r(G)-3u=24-3u\equiv 0 \pmod 3$, откуда $r(G')\in\{6, 9, 12\}$. Пусть, например, $G'=PSL(3,3)$ с $\bar h(G')=(1, 104, 117, 432^4, 984, 702^3, 936)$. Так как имеется 6 «нечетных» показателей, то $k \geqq 6$, и поэтому $r(G)=12 \geqq 4+$ $+\frac{1}{2}(r(G')+6)$, откуда $r(G') \leqq 10 < 12 = r(PSL(3, 3))$, противоречие. Аналогично отбрасываются и другие кандидатуры на роль G'.

§ 6. $\frac{g}{g'} = 3$

Так как все неабелевы простые 3'-группы известны [4], можем считать, что 3 делит g'. Так как $r(G)=n(G)+\frac{g}{g'} \geqq 8+\frac{g}{g'}$, то $r(G) \geqq 11$. Так как $r_G(G-G') \geqq 6$, то $r_G(G') \leqq r(G)-7$. Если $r(G)=11$, то $r_G(G') \leqq 4$, так что $G' \in \{A_5, PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 9)\}$. Проверка дает $G = \mathrm{Aut}\, PSL(2, 8)$. Далее пусть $r(G)=12$. Тогда $r_G(G') \leqq 5$. В обозначениях леммы 9 имеем

$$12 = r(G) = s+\frac{1}{3}(r(G')-k)+k = s+\frac{1}{3}(r(G')+2k).$$

Так как из $3/g'$ следует $k \geqq 2$, то $r(G') \leqq 14$. По лемме 8 имеем

$$r(G') = 3r(G)-(3^2-1)u = 36-8u,$$

где $u \geqq 0$ целое. Это влечет $r(G')=12$. Из леммы 1 следует, что $r_G(G') \leqq 5$ лишь для $G' = PSL(2, 19)$. Тогда $|P \cap G'| = 4$, а этот случай уже рассмотрен.

§ 7. $\frac{g}{g'} = 4$

Тогда $r(G)=n(G)+\frac{g}{g'} \geqq 8+4=12$, то есть $r(G)=12$. Так как $P \cap G'$ нециклическая, P не максимального класса. Мы знаем, что $r_G(G-G') \geqq 6$, так что $r_G(G') \leqq 5$. Как и выше, $r_G(G') > 4$, так что $r_G(G')=5$. Если G_1-подгруппа индекса 2 в G, то $s=r_G(G_1-G') \geqq 4$ по лемме 11, а $k \geqq 2$ (см. обозначения в лемме 9), кроме того, $12=r(G)=s+\frac{1}{2}(r(G_1)+2)$, откуда $r(G_1) \leqq 14$. По лемме 8 имеем $r(G_1)=2r(G)-3u=24-3u \equiv 0 \pmod 3$. Так как $|G_1 : G_1'|=2$, по доказанному выше это невозможно.

Итак, все G с $r(G) \in \{10, 11, 12\}$ и $F(G')=1$ найдены.

Глава 2

Группы с неполупростым коммутантом

Как уже было сказано, в этой главе мы ограничиваемся случаем $r(G)=12$. Итак, все G с $r(G)\leqq 11$ считаются известными (см. [1] и теоремы 1, 2). Во всей этой главе используются такие обозначения: R — неединичная абелева G-допустимая подгруппа наименьшего порядка в G'; $|R|=p^a$; $\bar{G}=G/R$, $\bar{G}'=G'/R$, $|\bar{G}'|=\bar{g}'$, $|\bar{G}|=\bar{g}$. Очевидно, $r(\bar{G})<r(G)$, так что строение $\bar{G}$ известно. Далее, полагаем $Irr\,(G)-Irr(\bar{G})=\{\chi^{r(\bar{G})+1}, \ldots, \chi^{r(G)}\}$ (считаем, что $Irr\,(\bar{G})$ состоит из тех $\chi\in Irr\,(G)$, для которых $R\leqq\ker\chi$). Введем обозначение

$$\Sigma(G, R) = \chi^{r(\bar{G})+1}(1)^2+\ldots+\chi^{r(G)}(1)^2.$$

Очевидно, $\Sigma\,(G, R)=g-\bar{g}$. По известной теореме Н. Ито, $\chi^i(1)|\bar{g}$. Кроме того, в силу выбора R, $\chi^i(1)>1$ для $1+r(\bar{G})\leqq i\leqq r(G)$.

§ 8. Группа G нильпотентная

Так как предположено, что G не распадается в нетривиальное прямое произведение, то G — p-группа. Tak kak $\frac{g}{g'}\leqq 4$, то G—2-группа, а так как G неабелева, она — 2-группа максимального класса. Но у таких G число классов нечетно. Далее G предполагается ненильпотентной.

§ 9. $r(\bar{G})=2$

Тогда $\bar{G}=C(2)$ (здесь мы пользуемся списком в [1]; аналогично и во всех оставшихся случаях). Так как G ненильпотентная, то $G=\bigl(C(2), E(p^a)\bigr)$ по лемме 3. В этом случае $12=r(G)=2+\frac{1}{2}(p^a-1)$, $p^a=21$, противоречие.

§ 10. $r(\bar{G})=3$

Тогда $\bar{G}\in\{C(3), D(6)\}$ по [1].

1°. $\bar{G}=C(3)$. Тогда $G=\bigl(C(3), E(p^a)\bigr)$ по лемме 3, и $12=r(G)=3+\frac{1}{3}(p^a-1)$, $p^a=28$, противоречие.

2°. $\bar{G}=D(6)$. Если G' нильпотентная, то $p^a=3$ по выбору R, и тогда $r(G)<12$. Так как G' ненильпотентная, она является группой Фробениуса по лемме 3, $f(G)=1$ по лемме 6. Поэтому $r_G(R)\leqq r(G)-4=8$, $p^a\leqq 1+3+7\cdot 6=46$.

Так как $C_G(R)=R$, то $a>1$, так что $p^a\in\{4, 16, 25\}$. Кроме того, $G=N_G(Q)[R$ с $Q\in\mathrm{Syl}_3(G)$. Если $p^a=4$, то $G=S_4$ и $r(G)<12$. Если $p^a=16$, то $\Sigma(G, R)==90$, а это число нельзя представить в виде суммы 9 квадратов чисел, больших 1 и делящих 6. По той же причине $p^a\neq 25$.

§ 11. $r(\bar{G})=4$

Тогда $\bar{G}\in\{C(4), E(4), A_4, D(10)\}$.

1°. $G=C(4)$ или $E(4)$.

Так как G ненильпотентная, $p>2$. Если $P\in\mathrm{Syl}_2(G)$ и $P=E(4)$, то $Z(G)==C(2)$ выделяется в G прямым множителем, вопреки (B). Итак, $P=C(4)$. Если $G=(P, R)$, то $12=r(G)=4+\frac{1}{4}(p^a-1)$, $p^a=33$, противоречие. Итак, G — не группа Фробениуса. Тогда $Z(G)=C(2)$, $a=1$, $r\big(G/Z(G)\big)=6$, $p^a=1+2\cdot 4=9$, $a>1$, противоречие.

2°. $\bar{G}=D(10)$.

Как и выше, G' ненильпотентная, и поэтому является группой Фробениуса по лемме 3. Так как $C_G(R)=R$, то $a>1$. Далее, $f(G)=1$ по лемме 6, $p^a\leqq 1+5+6\cdot 10=66$, откуда, с учетом теоремы Силова, $p^a=16$. Но $g-\bar{g}=150==\Sigma(G, R)\equiv 2 \pmod 3$ (так как $\Sigma(G, R)$ — сумма восьми квадратов чисел, делящих 10), противоречие.

3°. $\bar{G}=A_4$.

$Z(G)=1$, так как накрывающая A_4 имеет 7 классов. Если $p=2$, то $a=2$, G' абелева по лемме 5, $r(G)=8<12$. Итак, $p>2$. Если $p^a=3$, $Q\in\mathrm{Syl}_2(G)$, то G/Q абелева, противоречие. Итак, $p^a>3$. G' ненильпотентна по выбору R. Тогда $f(G)=2$ по лемме 6, и по этой же лемме G' содержит элемент порядка $2p$. Поэтому $p^a\leqq 1+4+3+5\cdot 12=68$. Так как $\bar{G}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}\, R$, возможно лишь $p^a=27$. Мы имеем $G=N_G(Q)[R$, где $Q\in\mathrm{Syl}_2(G')$. Если x — элемент порядка 3 в $N_G(Q)$, то $r_G(xG')\geqq 3$, $r_G(x^2G')\geqq 3$. Так как $r_G(R)\geqq 4$, $r(G)>12$.

§ 12. $r(\bar{G})=5$

1°. $\bar{G}=D(8)$ или $Q(8)$.

Легко проверить, что G не является группой Фробениуса. Так как G' ненильпотентна по выбору R, то G' — группа Фробениуса по лемме 3. Поэтому $\bar{G}=D(8)$, $f(G)\geqq 2$, $r_G(R)\leqq 5$, $p^a\leqq 1+2\cdot 4+3\cdot 8=33$. Далее, $C_G(R)=R$, $a>1$, $4|(p^a-1)$, откуда $p^a\in\{9, 25\}$. В первом случае $r(G)=9<12$. Во втором случае $192==g-\bar{g}=\Sigma(G, R)\equiv 1 \pmod 3$,* противоречие.

2°. $\bar{G}=C(5)$. Тогда $G=\big(C(5), E(p^a)\big)$, $p^a=1+5\cdot 7=36$, противоречие.

3°. $\bar{G}=D(14)$.

Если G' нильпотентная, то $g'\leqq 1+2\big(r(G)-2\big)=21$. Так как $g'=7p^a$, то возможно лишь $p^a=3$, и $G=\big(C(2), C(21)\big)=D(42)$.

* m.k. $\Sigma(G, R)$— сумма 7 квадратов чисел, делящих $\bar{g}=8$.

Если G' ненильпотентная, она — группа Фробениуса, $f(G)=1$, $a>1$, $p^a \leqq 1+7+14\cdot 5=78$, так что $p^a \in \{8, 64\}$. Так как $\mathrm{Aut}\, R$ содержит подгруппу, изоморфную $D(14)$, $p^a \neq 8$. Если $p^a=64$, то $r(G')=16=2r(G)-3u\equiv 0 \pmod 3$ по лемме 8, противоречие.

4°. $\bar{G}=(C(3), C(7))$.

Если G' нильпотентная, то $p^a>3$, $7p^a-1\leqq 3\cdot 9$, откуда возможно $p^a=4$, и получается $G=(C(3), E(4)\times C(7))$. Пусть G' ненильпотентная. Тогда она — группа Фробениуса по лемме 3, $a>1$, $f(G)=2$, $p^a\leqq 1+7+4\cdot 21=92$, откуда $p^a \in \{8, 64\}$. Противоречие теперь следует из леммы 8.

5°. $\bar{G}=AGL(1, 5)$.

Легко проверяется, что G' ненильпотентная. Тогда G'—группа Фробениуса по лемме 3, $a>1$, $p^a\leqq 1+10+5\cdot 20=111$, $p^a\in\{16, 81\}$. В первом случае $300= =g-\bar{g}=\Sigma\,(G, R)\equiv r(G)-r(\bar{G})\equiv 1 \pmod 3$, противоречие. Пусть $p^a=81$. Тогда $\bar{d}=(1^4, 4, 10^4, 20^3)$, так что число инволюций в G, $t(G)<4\cdot 1+4+4\cdot 10+3\cdot 20= =108$ по формуле Фробениуса—Шура для числа инволюций. Если x — инволюция в G, то $|G:C_G(x)|=t(G)<108$, так что $|G:C_G(x)|$ делит 45. Так как $r_G(xG')\geqq 5$, то $r(G)>12$.

6°. $\bar{G}=S_4$.

Так как накрывающая S_4 имеет 8 классов, $Z(G)=1$. Пусть $\bar{L}=L/R$ — нормальная подгруппа порядка 4 в $\bar{G}$.

(5а) $p>3$. Тогда L ненильпотентная по выбору R, $C_G(R)=R$, $a>1$, $r_G(R)\leqq 4$, так что $p^a\leqq 1+6+8+2\cdot 24=63$. Так как $\mathrm{Aut}\, R$ содержит подгруппу, изоморфную S_4, $p^a>63$.

(5б) $p=3$. Пусть L нильпотентная. Тогда $p^a=3$ по выбору R. Легко проверить, что в этом случае $r(G)=9<12$. Итак, L ненильпотентная. Тогда $C_G(R)=R$, $a>1$. Так как $r_G(G'-L)\geqq 3$, то $r_G(R)\leqq 3$ и $3^a\leqq 1+6+8+24=39$. Так как $\mathrm{Aut}\, R$ содержит S_4, то $3^a=27$. Если $Q\in \mathrm{Syl}_2(L)$, то $G=N_G(Q)[R= =S_4[E(27)$. Имеем $r_G(R)=3$, $R-\{1\}$ разбивается на три G-класса длин 6, 8 и 12 соответственно, и тогда G содержит не менее трех G-классов элементов, порядок которых делится на 6. Так как $G-R$ содержит не менее трех G-классов 3-элементов, $r(G)>12$.

(5в) $p=2$. Тогда из $a>1$ следует, что L абелева, а из $r_G(L)\leqq 6$ следует $a\leqq 3$. Если $a=2$, то из $72=g-\bar{g}=\Sigma\,(G, R)$ следует $r(G)\neq 12$. Если $a=3$, то $r_G(R)\geqq 3$, $r_G(L)\geqq 7$, $r_G(G-G')\geqq 4$ по лемме 11, $r_G(G'-L)\geqq 2$, $r(G)>12$.

7°. $\bar{G}=A_5$.

Тогда $Z(G)=1$, так как накрывающая A_5 имеет 9 классов. Так как $C_G(R)=R$, то $a>2$. Отсюда сразу же следует $p<7$. Если $p=5$, то $a=3$, и число G-классов, на которые разбиваются 5-элементы из $G-R$, не меньше 10, откуда $r(G)>12$. Итак, p не превосходит 3. Пусть $p=3$. Тогда $a=4$ и $r(G)>12$ по той же причине, что и в случае, когда $p=5$.

Итак, $p=2$. Снова $a\geqq 4$. Так как $r_G(R)<7$ по лемме 2, то $a\leqq 8$. Так как 2-элементы из $G-R$ распадаются не менее чем на четыре G-класса, то $r_G(R)\leqq 4$, так что $a\leqq 7$. Если a нечетно, то G содержит элемент порядка 6 и два G-класса элементов порядка 10, откуда $r_G(R)=1$, 2^a-1 делит 15, противоречие при $a \geqq 5$. Итак, $a \in \{4, 6\}$. Если $a=6$, то $r_G(R) \leqq 2$, что невозможно, так как число неединичных элементов в R не равно сумме двух чисел, одно из которых делит 12 и больше 4, а другое делит 60. Итак, $a=4$, а в этом случае $r(G)=9<12$ по [1].

§ 13. $r(\bar{G})=6$

1°. $\bar{G}=D$ (12) или $C(4)[C(3)$.

Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a>2$ (так как число классов у накрывающей $\bar{G}$ не равно 12). Если $p=3$, то $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ абелева, откуда $a \leqq 2$. Если $a=1$, то $G=C(4)[C(9)$ или $G=C(4)[E(9)$, $Z(G)=C(2)$. Пусть $a=2$. Тогда $g-\bar{g}=108=\Sigma(G, R)$. Так как $\chi^i(1)|4$, то $\Sigma(G, R) \leqq 6 \cdot 4^2=96$, противоречие. Если $p \neq 3$, то G' ненильпотентна по выбору R, и тогда G'—группа Фробениуса по лемме 3. Имеем $G=N_G(Q)[R$ с $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$. В частности, $Z(G)=Z(N_G(Q)) \cong C(2)$, если $p>2$, и в этом случае, благодаря (В), должно быть $\bar{G}=C(4)[C(3)$. Из $C_{G'}(R)=R$ следует $a>1$. Если $\bar{G}=D(12)$, то $p>2$, $f(G)=3$ (по лемме 6), так что $r_G(R) \leqq 4$, $p^a \leqq 1+2 \cdot 6+2 \cdot 12=37$, $p^a=25$ и $g-\bar{g}=288=\Sigma(G, R)$, $r(G)-r(\bar{G})=6$, а это невозможно (так как все $\chi^i(1)$ делят 12). Пусть $\bar{G}=C(4)[C(3)$. Легко проверить, что тогда p нечетно, и тогда G'—группа Фробениуса, $p^a \leqq 1+6+4 \cdot 12=55$, так что $p^a \in \{25, 49\}$. Рассмотрение равенства $\Sigma(G, R)=g-\bar{g}$ приводит к противоречию.

2°. $\bar{G}=D(18)$ или $(C(2), E(9))$.

Если G' нильпотентна, то $p^a=3$ по выбору R. В этом случае $G'=ES(1, 3)$, $r(G)=10<12$.

Пусть G' ненильпотентная. Тогда $p^a>3$, $C_G(R)=R$, откуда $p^a>4$, $a>1$. Если $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $Q=E(9)$; x—элемент порядка 3 из Q, централизующий элемент из $R-\{1\}$, то $1<Z(\langle x, R\rangle)<R$, противоречие с минимальностью R. Итак, $\bar{G}=D(18)$. Тогда, как и выше, G'—группа Фробениуса, $f(G)=1$ (по лемме 6), $C_G(R)=R$, $a>1$, $p^a \leqq 1+9+4 \cdot 18=82$, $9|(p^a-1)$, так что $p^a=64$. Тогда $r(G')=16$, и по лемме 8 имеем $16=r(G')=2r(G)-3u=24-3u \equiv 0 \pmod 3$, противоречие.

3°. $\bar{G}=(C(4), E(9))$.

Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a>2$ (если $p^a=2$ и $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$, то G/Q абелева, противоречие, так как Q—собственная подгруппа коммутанта). Ясно, что $p>2$. Далее, $p^a \leqq 9$ по выбору R. Если $p^a=9$, то G' абелева и $r_G(G')>12$, противоречие. Итак, $p^a \in \{3, 5, 7\}$. Если G' неабелева, то $p^a=3$ и R совпадает с центром группы G по результату Л. С. Казарина, касающемуся именно этой группы, и теперь ясно, что $r(G)>12$. Итак, G' абелева. Тогда $p^a=3$ (так как $r_G(R) \leqq 8$) и $G=C(4)[E(27)$, $\bar{h}=(1, 2, 4^6, 9, 18, 27^2)$, $\bar{d}=(1^4, 2^2, 4^6)$. Если G' ненильпотентная, то, как и в 2°, $r(G)>12$.

4°. $\bar{G}=(Q(8), E(9))$.

Так как собетвенный эпиморфный образ 2-группы максимального класса не равен $Q(8)$, $p^a>2$. Если $p=3$, то $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ абелева по результату Л. С. Казарина из 3°, $a=1$, $P=E(27)$, $G=Q(8)[E(27)$, $\bar{h}=(1, 2, 8^3, 9, 18^4, 54^2)$, $\bar{d}=(1^4, 2^5, 8^3)$. Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a<9$ по выбору R, и $p=5, 7$

не подходят. Далее G' ненильпотентная. Если $p=2$, то $r(G)>12$ по лемме 2. Итак, $p>3$. Имеем $G=N_G(Q)[R$ с $Q\in \mathrm{Syl}_3(G)$. Если x—элемент порядка $3p$ в G, то образующие $\langle x\rangle$ лежат по крайней мере в $\varphi(3p)/2=p-1$ различных G-классах по лемме 4. Так как $C_G(R)=R$, $a>1$. Но G содержит элемент порядка $2p$ по лемме 6, и поэтому $r_G(R)=1$, $p^a-1|12$, противоречие.

5°. $\bar{G}=PSL(2, 7)$.

В этом случае можно показать, что групп G с $r(G)=12$ не получается (довольно длинное доказательство этого мы пропускаем).

§ 14. $r(\bar{G})=7$

1°. $G\in\{Q(16), D(16), SD(16)\}$.

Легко показать, что в этом случае $G=(Q(16), E(81))$.

2°. $G=D(22)$.

Тогда G' ненильпотентная, и поэтому является группой Фробениуса, $a>1$, $f(G)=1$, $p^a\leqq 1+11+3\cdot 22=78$, 11 делит p^a-1, противоречие.

3°. $\bar{G}=SL(2, 3)$.

Если G—группа Фробениуса, то $G=(SL(2, 3), E(121))$. Далее пусть G не является группой Фробениуса. Тогда $p>2$ по лемме 2. В этом случае $C_G(R)=R$ по выбору R, $a>1$. По лемме Фраттини $G=N_G(Q)[R$ с $Q\in \mathrm{Syl}_2(G)$, и даже $G=C_G(x)[R$ для инволюции $x\in G$. Очевидно, $p\neq 3$. Тогда G содержит элемент порядка $3p$, и теперь ясно, что $r(G)>12$.

4°. $\bar{G}=(C(3), C(13))$.//

Знак // мы ставим в том случае, если, как и в 4°, доказательство пропущено ввиду того, что оно похоже на одно из предыдущих, и при этом не получается новых групп G с $r(G)=12$.

5°. $\bar{G}=(C(4), C(13))$.

Тогда $G=(C(4), C(13))[E(27)=C(4)[(C(13), E(27))$. Но среди подгрупп $\mathrm{Aut}\, R$ нет изоморфных G, противоречие.

6°. $\bar{G}=S_5$.

Если $R=Z(G)$, то $G=\hat{S}_5$ или $G=\check{S}_5$. Далее $Z(G)=1$.

Как и при рассмотрении случая $\bar{G}=A_5$ получаем $p^a=16$, $R=E(16)$, $G/E(16)=S_5$, $\bar{h}=(1, 15, 40, 60^2, 120^2, 240^2, 320^2, 384)$, $\bar{d}=(1^2, 4^2, 5^2, 6, 15^4, 30)$.

7°. $\bar{G}=A_6$.//

§ 15. $r(\bar{G})=8$

1°. $\bar{G}=AGL(1, 5)$ или $\bar{G}=C(4)[C(5)$ с $Z(G)=C(2)$, или $D(20)$.

В этом случае получаются такие группы: $G=E(4)[C(15)$,

$$\bar{h}=(1, 2^3, 3, 4^2, 5, 6^2, 10, 15),\quad \bar{d}=(1^4, 2^6, 4^2),$$

и $G=(C(4)[C(5), E(81))$.

2°. $\bar{G}=D(26)$.//

3°. $\bar{G}=(C(3), E(16))$ или $\bar{G}=(C(3), C(4)\times C(4))$.
В этом случае получаются такие группы: $\bar{G}=SL(2, 3)[E(4), \bar{h}=(1^2, 3^2, 6^4, 16^4)$, $\bar{d}=(1^3, 2^3, 3^5, 6)$, и $G=C(3)[G'$, G' минимальная неабелева с $Z(G')=E(8)$, $\bar{h}$ и $\bar{d}$ такие же, как и у предыдущей группы.

4°. $\bar{G}=GL(2, 3)$ или $\hat{S}_4$.//

5°. $\bar{G}=(C(4), C(17))$.//

6°. $\bar{G}=(C(3), C(7))[E(8)=C(3)[AGL(1, 8)$.

По теореме Томпсона о нильпотентности групп с регулярным автоморфизмом простого порядка имеем $p\in\{2, 3, 7\}$. Легко проверить, что при $p=3$ или $p=7$ имеем $r(G)>12$. Итак, $p=2$. Предположим, что G содержит элемент порядка 14. Тогда G не содержит элемента x порядка 6 с $x^3\in R$, и поэтому число a четное. Так как $r_G(R)\leqq 2$, то $a=2$. Если H — минимальная ненильпотентная подгруппа порядка 56 в G, то $H\cap R=1$ и $HR=H\times R$ (так как минимальная нормальная подгруппа лежит в центре подгруппы Фиттинга группы G). В частности, $P\in \mathrm{Syl}_2(G)$ абелева. Поэтому $\chi^i(1)|21$ для любого $\chi^i\in Irr(G)$, и равенство $g-\bar{g}=504=\Sigma(G, R)$ невозможно. Таким образом, G не содержит элемента порядка 14. Тогда G содержит элемент x порядка 6 с $x^3\in R$, так что $r_G(R)\leqq 2$, и теперь ясно, что $a=3$. По лемме 5 и известной характеризации 2-групп Судзуки, принадлежащей Хигману, G' изоморфна нормализатору силовской 2-подгруппы простой группы Судзуки $Sz(8)$, $r(G')=10$, и применение леммы 8 приводит к противоречию.

7°. $\bar{G}=(Q(8), E(25))$.//

8°. $\bar{G}=(C(4)[C(3), E(25))$.//

9°. $\bar{G}=(SL(2, 3), E(25))$.//

10°. $\bar{G}=PSL(2, 11)$.//

11°. $\bar{G}=M_9$.//

§ 16. $r(\bar{G})=9$

1°. $\bar{G}=D(8)[C(3)$ или $Q(8)[C(3)$.
Если G' ненильпотентная, то легко проверить, что $r(G)\neq 12$. Если G' нильпотентная, то получаются такие четыре группы: $G=Q(16)[C(3)$ и $G=SD(16)[C(3)$ с $C_G(C(3))=Q(8)\times C(3)$, $G=D(16)[C(3)$ и $G=SD(16)[C(3)$ с $C_G(C(3))=D(8)[C(3)$.

2°. $\bar{G}=S_3\times S_3$.//

3°. $\bar{G}=(C(3), C(19))$.//

4°. $\bar{G}=D(30)$.//

5°. $\bar{G}=C(4)[C(15)$.

Так как $F(G)$ централизует минимальный нормальный делитель группы G, $p \neq 3, 5$. Понятно, что $p \neq 2$. Тогда $C_G(R) = R$, $a > 1$, $\bar{G}$ изоморфна подгруппе из $\operatorname{Aut} R$, $r_G(R) \leqq 2$, откуда $p^a \leqq 1 + 30 + 60 = 91$, и теперь ясно, что $r(G) > 12$.

6°. $\bar{G} = D(8)[E(9)$.//

7°. $\bar{G} = D(18)[E(4)$.//

8°. $\bar{G} = (C(2), E(9))[E(4)$.

Легко видеть, что $p = 3$, $a \leqq 2$. Несложная проверка показывает, что нужно рассмотреть лишь возможность $a = 2$. Тогда $C_G(R) = R$. Но $\operatorname{Aut} R = GL(2, 3)$ не содержит нормальной подгруппы $E(4)$.

9°. $\bar{G} = SL(2, 5)$.

Если G—группа Фробениуса, то $G = (SL(2, 5), E(361))$. В остальных случаях $r(G) > 12$.

10°. $\bar{G} = (C(3), S(64))$ или $\bar{G} = (C(3), S^0(64))$.//

11°. $\bar{G} = SD(16)[E(9)$.//

12°. $\bar{G} = PSL(2, 9)$.//

13°. $\bar{G} = PSL(2, 8)$.

Тогда $p = 2$ по лемме 2, $C_G(R) = R$, $a \geqq 4$ и $a \equiv 0 \pmod 3$ (так как G не содержит элемента порядка 14), и поэтому $a \geqq 6$. Если $a = 9$, то G содержит элемент порядка 6, $r_G(R) \leqq 2$ и $|R| - 1$ не равно сумме двух индексов подгрупп из $\bar{G}$, противоречие. Если $a = 6$, подсчет числа G-классов, состоящих из 2-элементов в $G - R$, дает $r(G) > 12$.

14°. $\bar{G}/E(16) = A_5$.

Пусть $p = 2$. Тогда $C_G(R) = F(G)$, так что $a \geqq 4$. Так как G не содержит элемента порядка 10, то $a \equiv 0 \pmod 4$. Пусть $L/F(G)$—подгруппа порядка 12 в $G/F(G)$. Тогда L—группа Фробениуса порядка $3 \cdot 2^{6+a}$, откуда класс нильпотентности $P \in \operatorname{Syl}_2(L)$ по известному результату Бернсайда $\leqq 2$. Из $C_G(R) = F(G)$ следует $Z(P) \leqq F(G)$. Если $F(G)$ абелева, то $r_G(F(G)) \geqq 5$, и поэтому $r(G) > 12$. Итак, $F(G)$ неабелева, и поэтому она специальная по лемме 5, при этом $R = Z(F(G))$. Пусть $P \in \operatorname{Syl}_2(L)$. Имеем $Z(P) \leqq Z(F(G)) = R$, а из $\operatorname{cl} P = 2$ следует, что P/R абелева. Тогда $C_{G/R}(F(G)/R) = G/R$, что противоречит строению $\bar{G}$.

Пусть $p > 2$. Тогда $C_G(R) = R$, $a > 1$. Мы имеем $r_G(R) \leqq 2$, и поэтому $p^a \leqq 1 + 480 + 960 = 1441$, и ввиду $C_G(R) = R$, при $p > 5$ следует рассмотреть случай $p^a = 11^3$. Но $|R| - 1 = 11^3 - 1 = 1330$ не равно сумме одного или двух делителей числа $\bar{g} = 960$, противоречие. Из леммы 2 следует $p \neq 5$. Остается $p = 3$. Тогда из лемм 6, 2 следует $r_G(R) = 1$, так что $3^a - 1 | 960$. Так как G не содержит элемента порядка 15 (в противном случае $r(G) > 12$), то $3^a = 81$. Так как 3-элементы из $G - R$ распадаются не менее, чем на три G-класса, то $r(G) > 12$.

15°. $\bar{G} = PSL(2, 13)$.//

16°. $\bar{G}=(\hat{S}_4, E(49))$ или $\bar{G}=(SL(2, 3), E(49))$.

Тогда из лемм 2 и 6 следует $p=7$. Как и в аналогичных ситуациях выше, показывается, что $r(G)>12$.

17°. $\bar{G}=A_7$.//

§ 17. $r(\bar{G})=10$

В этом параграфе все $\bar{G}$ взяты из заключения теоремы 1.

1°. $\bar{G}=D(28)$ или $\bar{G}=C(4)[C(7)$.//

2°. $\bar{G}=C(4)[A_4$ или $\bar{G}=S_4\times C(2)$.

Легко видеть, что $p\leqq 3$. Если $p=2$, то $|G:C_G(R)|$ делит 6 и в $R-\{1\}$ имеется G-класс длины, делящей 3; поэтому $a\leqq 2$. Вычисления с равенством $g-\bar{g}=\Sigma\,(G, R)$ дают $r(G)>12$. Пусть $p=3$. Тогда $r_G(R)=1, g-\bar{g}$ — не сумма квадратов двух делителей $\bar{g}$ (по теоретико-числовой теореме Ферма), так что $r(G)>12$. (В этом случае $C_G(R)=R$ и $a=2$, так что $g-\bar{g}=384$.)

3°. $\bar{G}=D(34)$.//

4°. $\bar{G}=C(2)[ES(1, 3)$.

Если $p=3$, то $a=1$ и $g-\bar{g}$ — не квадрат и не сумма двух квадратов чисел, делящих 18, $r(G)>12$. Легко проверить, что $r(G)>12$, если $p\neq 3$.

5°. $\bar{G}=D(6)[E(16)$ или $D(6)[(C(4)\times C(4))$.

Тогда $p=2$, $R\leqq Z(P)$, где $P\in \mathrm{Syl}_2(G')$, и отсюда следует $a\leqq 2$. Так как $g-\bar{g}$ — сумма двух квадратов, $a=2$. Так как P' циклическая, если $P/R=C(4)\times C(4)$, то $\bar{G}=D(6)[E(16)$. Тогда G'—группа Фробениуса, и $R=Z(P)=P'$, так что P специальная. Отсюда $P=S(64)$ или $S^0(64)$, $G=D(6)[S(64)$ или $G=D(6)[S^0(64)$, $\bar{h}=(1, 3, 12^5, 48^4, 128)$, $\bar{d}=(1^2, 2, 3^3, 6, 12^2)$.

6°. $\bar{G}=(C(4), E(25))$ или $(C(4), C(25))$.//

7°. $\bar{G}=A_5\times C(2)$.//

8°. $\bar{G}=D(10)[E(16)$.

Понятно, что $p=2$, и G не содержит элемента порядка 10. Отсюда следует, что $a\equiv 0 \pmod 4$, и теперь ясно, что $a=4$. Но тогда $15\cdot 160=g-\bar{g}$ — не сумма двух квадратов, $r(G)\neq 12$.

9°. $\bar{G}=ASL(2, 3)$.

Применение леммы 2 дает $p\neq 2$. Из леммы 6 следует $p=3$, и теперь ясно, что $a\leqq 2$. Тогда $g-\bar{g}$ — не сумма двух квадратов, $r(G)\neq 12$.

10°. $\bar{G}=(C(4)[C(3), E(49))$.//

11°. $\bar{G}=(Q(16), E(49))$.//

12°. $\bar{G}=M_{11}$.

Тогда $p>2$ по лемме 2. Из леммы 6 следует $p=3$, $r_G(R)=1$. Далее, $C_G(R)=R$, $a\equiv 0 \pmod 4$, и теперь ясно, что $r_G(R)>1$, противоречие.

13°. $G=(SL(2, 5), E(121))$.//

14°. $\bar{G}=PSL(3, 3)$.//

§ 18. $r(\bar{G})=11$

В этом параграфе $g-\bar{g}$ — квадрат. Если $q\neq p$ — простой делитель $\bar{g}$, то силовская q-подгруппа Q группы G циклическая или обобщенная группа кватернионов по лемме 6 (так как QR-группа Фробениуса). Эти замечания позволяют значительно сократить число рассматриваемых случаев.

1°. $\bar{G}=Q(32)$.//

2°. $\bar{G}=D(38)$.//

3°. $\bar{G}/E(4)=C(4)[A_4$ или $S_4\times C(2)$.

Тогда $p=2$, $a\leqq 2$. Так как $g-\bar{g}$ — квадрат, $a=2$, и получаются такие четыре группы: $G=(C(4)[C(3))[P$ или $D(12)[P$, $P=S(64)$ или $S^0(64)$, $\bar{h}=(1, 3, 12, 16^3, 48^2, 96^2, 128^2)$.

4°. $\bar{G}=C(3)[ES(2, 2)$.//

5°. $\bar{G}=(C(3), E(25))$.//

6°. $\bar{G}=(C(4), C(29))$.//

7°. $\bar{G}=AGL(1, 5)[E(16)$.//

8°. $\bar{G}=SL(2, 7)$.//

9°. $\bar{G}=(Q(8), E(49))$.//

10°. $\bar{G}=(Q(8)[C(3), E(49))$.//

11°. $\bar{G}=PSL(2, 17)$.//

12°. $\bar{G}=\hat{S}_5$ или $\check{S}_5$.

Тогда $p>2$ по лемме 2, $\bar{G}=\hat{S}_5$ по лемме 6. Очевидно, G — не группа Фробениуса, и поэтому $p\in\{3, 5\}$. Так как $C_G(R)=R$, то $a>1$. Если $p=3$, то $a=4$ и $g-\bar{g}$ — не квадрат. Если $p=5$, то 5^a-1 делит 48, откуда $a=2$. Но в этом случае $g-\bar{g}$ — не квадрат.

13°. $\bar{G}=Sz(8)$.//

Тем самым доказательство теоремы 3 завершено.

Внимательный читатель заметит, что к приведенному в этой главе доказательству надо добавить совсем немного для того, чтобы получить доказательства теорем 2 и 1.

Э. Ландау показал, что если $r(G)\leqq k$, то порядок группы G ограничен сверху в терминах k. Однако до сих пор не получено хорошей верхней границы для порядка группы. Чтобы стимулировать активность в этой области, выскажем такую гипотезу: $r(G)\leqq\lambda(G)$, где $\lambda(G)$ — число простых множителей $|G|$. Для $r(G)\leqq 12$ эта гипотеза верна. Для разрещимых групп гипотеза довольно правдоподобна.

Литература

[1] В. А. Одинцов, А. И. Старостин, Конечные группы с 9 классами сопряженных элементов, *Матем. зап. Уральского университета*, 1976, с. 114—134.
[2] Ja. G. Berkovic, The class-number of a finite group *(to appear)*.
[3] Э. А. Комиссарчик, Конечные простые группы с числом классов сопряженности меньшим тринадцати, *ДАН СССР 237* (1977), 1269—1272.
[4] G. Glauberman, Factorizations in local subgroups of finite groups, *CBMS* **33** (Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc.) *Providence, RJ*, 1977.

344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЪСА 111, КВ. 18 БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ

(Поступило 4. VII. 1984 г.)