Об оценках числа нулей неприводимых характеров конечной группы

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G-неабелева группа, χ-её нелинейный неприводимый характер*); $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$ — множество всех его нулей. Множество T_χ, как показал Бернсайд [1] всегда непусто. Ввиду этого представляют интерес нижние оценки числа $n_\chi = |T_\chi|$ нулей характера χ. Известна следующая, принадлежащая П. Галлахеру [11], оценка для величины n_χ: $n_\chi \geqq \chi(1)^2 - 1$. В настоящей работе устанавливаются неравенства существенно другого типа, также оценивающие величину n_χ снизу. В отличие от неравенства Галлахера, нижняя грань для n_χ в них зависит не от степени $\chi(1)$ характера χ, а от порядка $|G|$ группы G. Так например, доказано, что $|G| \leqq n_\chi(n_\chi - 1)$, откуда, в частности, вытекает конечность класса K_n групп, обладающих хотя бы одним неприводимым характером с заданным числом n нулей. В основе вывода этой и других полученных в работе оценок для n_χ лежит один общий результат А. И. Вейцблита [5], полученный им с помощью некоторого обобщения неравенства Галлахера. Пусть χ_H-ограничение характера χ на подгруппу H группы G. Если χ_H приводим, то, как доказано в [5], $|H| \leqq n_\chi$. В §§ 3—5 настоящей работы, составляющих её ядро, исследуются условия достижения в неравенстве $|H| \leqq n_\chi$ знака равенства. В связи с этим, мы вводим понятие χ-максимальной подгруппы группы G. Подгруппу H назовём *χ-максимальной*, если χ_H приводим и $|H| = n_\chi$**). Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $\langle T_\chi \rangle = G$ *и подгруппа* H *группы* G *χ-максимальна, то* $|G:H| = 2$ *и* $G \setminus H = T_\chi$. *Обратно, если* $|G:H| = 2$ *и* $G \setminus H = T_\chi$, *то* $\langle T_\chi \rangle = G$ *и подгруппа* H *χ-максимальна.*

Теорема 2*).** *Если G—разрешимая группа с χ-максимальной подгруппой H, причем χ точен и* $\langle T_\chi \rangle = G$, *то* (i) *Центр* $Z(G)$ *и коммутант* G' *группы* G *цикличны,* $|G'|$ *нечетно и* $H = Z(G) \times G'$; (ii) $G/Z(G) \cong D_m$, *где* $m = |G'|$ *и* D_m-*группа диэдра порядка* $2m$; (iii) $\chi(1) = 2$.

Доказательство теоремы 2 использует, кроме теоремы 1, результаты из § 2, дающие достаточные условия существования общих нулей системы непри-

---

*) В работе рассматриваются только конечные группы и их **C**-характеры.

**) Примеры групп с χ-максимальной подгруппой: D_m (m нечетно) $-\chi(1) = 2$, $n_\chi = m$; S_4 — $\chi(1) = 3$, $n_\chi = 8$; $S_5 - \chi(1) = 5$, $n_\chi = 24$.

***) Автор, совместно с С. И. Островской, получили полное описание групп, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

водимых характеров группы. Заключительная часть работы (§ 6) посвящена выводу и исследованию неравенств для n_χ, а также — применениям результатов §§ 3—5 к группам, обладающим неприводимым характером χ, для которого n_χ — степень простого делителя порядка группы.

Основные обозначения

$\subset$-символ строгого включения; $|M|$-число элементов конечного множества **N**; **Z**, **Q**, **C** соответственно — множества натуральных, целых, рациональных, комплексных чисел; $H \leqq G$ — «H-подгруппа группы G»; $O(g)$-порядок элемента $g \in G$; $g^t = t^{-1}gt$ $(t, g \in G)$; если $M \subseteqq G$, то $M^t = \{g^t | g \in M\}$, $\mathrm{Cl}\,(M)$-класс подмножеств G-сопряженных с M, $g^M = \{g^t | t \in M\}$, в частности, $g^G = \mathrm{Cl}\,(g)$-класс сопряженных элементов группы G, порождённый элементом g; $\langle M \rangle$-подгруппа, порождённая M, $M^{\#} = M \setminus \{1\}$, $\hat{M} = M \cup \{1\}$; $C_G(g)$ — централизатор $g \in G$; $\mathrm{Aut}\,(G)$-группа автоморфизмов группы G; $[H_1, H_2]$-взаимный коммутант подгрупп H_1 и H_2; $\pi(G)$-множество всех простых делителей $|G|$; $\pi(g) = \pi(\langle g \rangle)$; $C(n)$-циклическая группа n-го порядка; $\mathrm{Char}\,(G)$-множество всех характеров группы G; $Irr\,(G) = \{\chi \in \mathrm{Char}\,(G) | \chi$ неприводим$\}$; если $\chi \in \mathrm{Char}\,(G)$, $\alpha \in \mathrm{Aut}\;(G)$, то $\chi^\alpha(g) = \chi(\alpha g)$ $(g \in G)$; ψ^G-характер группы G индуцированный характером ψ подгруппы $H \leqq G$; ψ^t $(t \in G)$-характер подгруппы $N \lhd G$ G-сопряженный с $\psi \in \mathrm{Char}\,(N)$: $\psi^t(g) = \psi(tg\,t^{-1})$ $(g \in N)$; $I_G(\psi) = \{t \in G | \psi^t = \psi\}$-группа инерции характера $\psi \in \mathrm{Irr}\,(N)$; $\mathrm{Ker}\,\chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$-ядро характера $\chi \in \mathrm{Char}\,(G)$; $Z(\chi) = \{g \in G \,\|\chi(g)| = \chi(1)\}$; $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$; $U_\chi = \{g \in G | \chi(g)| = 1\}$; 1_G-главный характер группы G; $(\theta_1, \theta_2)_G = |G|^{-1} \Sigma\, \theta_1(g)\overline{\theta_2(g)}$-скалярное произведение функций θ_i: $\mathbf{G} \to \mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$; (a, b)-наибольший общий целых чисел a, b.

§ 1. Некоторые леммы

В этом пункте G неабелева, $\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)$, $\chi(1) > 1$.

Лемма 1.1. [1] $T_\chi = \emptyset$.

Лемма 1.2 [5]. *Если* $H < G$, *то*

$$(\chi_H, \chi_H)_H \leqq 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}. \tag{1}$$

Знак равенства в (1) *достигается тогда и только тогда, когда* $G \setminus H \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. Пусть $\Delta = G \setminus (H \cup T_\chi)$. Если $\Delta \neq \emptyset$, то $\alpha = \prod_{g \in \Delta} \chi(g)$ — отличное от нуля целое алгебраическое число поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/|G|}$. Так как α выдерживает все автоморфизмы поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, то $\alpha \in \mathbf{Z}$, откуда $\alpha^2 = \prod_{g \in \Delta} |\chi(g)|^2 \geqq 1$. Применяя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, приходим к утверждениям леммы. Случай $\Delta = \emptyset$ тривиален.

Следствие. *Если* $|T_\chi \setminus H| < |H|$, *то* $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$. *В частности,* $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$, *если* $|H| > |T_\chi|$.

2. Пусть γ-действие группы $\mathfrak{G}$ на n-элементном ($n > 1$) множестве «точек» Ω; $k \in \mathbf{N}$. Действие γ называется *строго k-транзитивным*, если 1) γ k-транзитивно; 2) пересечение γ-стабилизаторов k различных точек тривиально*). Пусть $\mathrm{St}\,\omega$-стабилизатор точки $\omega \in \Omega$; γ_ω-действие подгруппы $\mathrm{St}\,\omega$ на $\Omega_\omega = \Omega \setminus \{\omega\}$, порождённое действием γ.

Лемма 1.3. *Действие γ группы $\mathfrak{G}$ на Ω k-транзитивно (строго k-транзитивн) тогда и только тогда, когда* 1) *γ транзитивно;* 2) *γ_ω $(k-1)$-транзитивно (строго $(k-1)$-транзитивно).*

Назовём действие γ группы $\mathfrak{G}$ на Ω *F-действием*, если 1) γ транзитивно, но не регулярно, 2) пересечение стабилизаторов любых двух различных точек тривиально.

Следующее утверждение вытекает из хорошо известных свойств групп Фробениуса.

Лемма 1.4. *Если γ — F-действие группы $\mathfrak{G}$ на Ω, то* 1) *действие γ точно (т. е. $\bigcap\limits_{\omega} \mathrm{St}\,\omega = \{1\}$),* 2) *$\mathfrak{G}$-группа Фробениуса с ядром порядка $n = |\Omega|$.*

Лемма 1.5. *Пусть $\mathfrak{G}$-группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка n, γ — транзитивное действие группы $\mathfrak{G}$ на n-элементном множестве Ω. Тогда γ — F-действие; если, в частности, $|\mathfrak{G}| = n(n-1)$ **), то действие γ строго 2-транзитивно.*

Доказательство. $|\mathfrak{G}:\mathrm{St}\,\omega| = n$ для любой точки $\omega \in \Omega$. Так как $n = |\mathfrak{N}|$, то $|\mathrm{St}\,\omega| = |\mathfrak{G}:\mathfrak{N}|$ и, следовательно, $(|\mathrm{St}\,\omega|, |\mathfrak{N}|) = 1$. Поэтому $\mathrm{St}\,\omega$ — дополнительный множитель группы Фробениуса $\mathfrak{G}$. Следовательно, $N_{\mathfrak{G}}(\mathrm{St}\,\omega) = \mathrm{St}\,\omega$, откуда $|\mathrm{Cl}\,(\mathrm{St}\,\omega)| = |\mathfrak{G}:\mathrm{St}\,\omega| = n$. Поэтому $\mathrm{St}\,\omega_1 \neq \mathrm{St}\,\omega_2$, если $\omega_1 \neq \omega_2$; так как различные дополнительные множители группы Фробениуса имеют тривиальное пересечение, то $\mathrm{St}\,\omega_1 \cap \mathrm{St}\,\omega_2 = \{1\}$. Так как $|\mathrm{St}\,\omega| = |\mathfrak{G}:\mathfrak{N}| > 1$, то действие γ не регулярно. Следовательно, γ — F-действие. Если $|\mathfrak{G}| = n(n-1)$, то, как легко видеть, действие γ_ω подгруппы $\mathrm{St}\,\omega$ на $\Omega_\omega = \Omega \setminus \{\omega\}$ транзитивно. В силу леммы 1.3 отсюда следует, что действие γ строго 2-транзитивно.

Следующее утверждение легко доказывается при помощи результатов Цассенхауза классифицирующих строго 3-транзитивные группы подстановок.*):

Лемма 1.6. *Строго 3-транзитивная группа $\mathfrak{G}$ подстановок степени $q+1$ ($q = p^\alpha$, p-простое число) является простой лишь при $p = 2$, $\alpha \geqq 2$; при этом $\mathfrak{G} \cong PSL(2, q)$.*

Лемма 1.7. ([2] *теорема* 8.28.) *Пусть $m > 1$ индекс подгруппы $\mathfrak{H} < PSL(2, q)$ (q-степень простого числа). Тогда $m \geqq q+1$ за исключением следующих случаев:* 1) $q = 2$, $m = 2$; 2) $q = 3$, $m = 3$; 3) $q = 5$, $m = 5$; 4) $q = 7$, $m = 7$; 5) $q = 9$, $m = 6$; 6) $q = 11$, $m = 11$.

---

*) Это определение отлично от определения принятого в [6].

**) В общем случае $|\mathfrak{G}| = n \cdot m$, где m делит $n-1$.

*) См. напр., [3] теорема 20.5 и её следствия стр. 263.

§ 2. Общие нули системы групповых характеров

1. Семейство $S=\{H_1, \ldots, H_m\}$ собственных подгрупп группы G назовём *покрытием* длины m этой группы, если $\cup H_i=G$. Покрытия минимальной длины назовём *минимальными покрытиями*. Через $\varrho(G)$ обозначим длину минимальных покрытий группы G $\left(\varrho(G)=\infty\right.$, если группа G не допускает покрытий). Если все подгруппы H_i покрытия S максимальные, будем называть S M-покрытием. Минимальную длину M-покрытий группы G обозначим через $\varrho_M(G)$. $\left(\varrho_M(G)=\infty\right.$, если группа G не допускает M-покрытий).

Множество $\mathfrak{D}(G)$ всех покрытий группы G естественным образом упорядочивается: если $S=\{H_1, \ldots, H_m\}$ и $T=\{K_1, \ldots, K_l\}$ — покрытия группы G, то $S \leqq T$, если $m=l$ и $H_i \leqq K_i$ $(i=1, \ldots, m)$. Очевидно, M-покрытия — максимальные элементы множества $\mathfrak{D}(G)$.

Предложение 2.1. $\varrho(G)=\infty$ *тогда и только тогда, когда* G *— циклическая группа.*

Доказательство. Если G циклична, $G=\langle g\rangle$, то ϱ не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G. Поэтому $\mathfrak{D}(G)=\emptyset$, откуда $\varrho(G)=\infty$. Если G не циклична, то множество циклических подгрупп группы G является её покрытием. Поэтому $\varrho(G)<\infty$.

Предложение 2.2. $\varrho(G)=\varrho_M(G)$.

Доказательство. Очевидно, $\varrho_M(G) \geqq \varrho(G)$. Допустим, что $\varrho(G)<\infty$ и $S=\{H_1, \ldots, H_m\}$ — минимальное покрытие группы G. Пусть $H_i \subseteq M_i$, где M_i — максимальная подгруппа группы G. Тогда $T=\{M_1, \ldots_n, M\}$ — M-покрытие. Поэтому $\varrho_M(G) \leqq m=\varrho(G)$. Следовательно, $\varrho(G)=\varrho_M(G)$. Если $\varrho(G)=\infty$, то, очевидно, также и $\varrho_M(G)=\infty$.

Предложение 2.3. *Если* $N \lhd G$, *то* $\varrho(G/N) \geqq \varrho(G)$.

Доказательство. Если $\varrho(G/N)=\infty$, утверждение очевидно. Допустим, что $\varrho(G/N)=n<\infty$ и $\{H_1/N, \ldots, H_n/N\}$ — минимальное покрытие группы G/N. Тогда $\{H_1, \ldots, H_n\}$-покрытие группы G, откуда следует, что $n \geqq \varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G/N) \geqq \varrho(G)$.

Предложение 2.4. *Если* $N \lhd G$, $K \lhd G$, $N \subseteq K$, *то* $\varrho(G/N) \leqq \varrho(G/K)$.

Доказательство. $\varrho(G/K)=\varrho(G/N/N/K) \geqq \varrho(G/N)$ в силу предложения 2.3.

Предложение 2.5. $\varrho(G)=\varrho(G/\Phi(G))$, *где* $\Phi(G)$-*подгруппа Фраттини группы* G.

Доказательство. В силу предложения 2.2 $\varrho(G)=\varrho_M(G)$. Пусть $\{H_1, \ldots, H_n\}$ — M-покрытие группы G. Так как $H_i \supseteq \Phi(G)$, то $\{H_1/\Phi(G), \ldots, H_n/\Phi(G)\}$ — M-покрытие группы $G/\Phi(G)$. Поэтому $n \geqq \varrho(G/\Phi(G))$, откуда $\varrho(G)=\varrho_M(G)= =\min n \geqq \varrho(G/\Phi(G))$. С другой стороны, в силу предложения 2.3 $\varrho(G/\Phi(G)) \geqq \geqq \varrho(G)$. Поэтому $\varrho(G)=\varrho(G/\Phi(G))$.

Предложение 2.6. *Если* $N \lhd G$, $N \subseteq \Phi(G)$, *то* $\varrho(G/N)=\varrho(G)$.

Доказательство. В силу предложений 2.4 и 2.5 $\varrho(G/N) \leqq \varrho(G/\Phi(N))=$

$=\varrho(G)$. С другой стороны, $\varrho(G/N)\geqq\varrho(G)$ в силу предложения 2.3. Следовательно, $\varrho(G/N)=\varrho(G)$.

Предложение 2.7. *Если группа G нильпотентна, то* $\varrho(G)=\varrho(G/G')$.

Доказательство. Так как $G'\subseteqq\Phi(G)$, то в силу предложения 2.6 $\varrho(G/G')=\varrho(G)$.

Предложение 2.8. *Если* $G=A\times B$, *то* $\varrho(G)\leqq\min\{\varrho(A),\varrho(B)\}$. *При этом* $\varrho(G)=\min\{\varrho(A),\varrho(B)\}$, *если* $(|A|,|B|)=1$.

Доказательство. Так как $A\cong G/B$, то $\varrho(A)=\varrho(G/B)\geqq\varrho(G)$ в силу предложения 2.3. Аналогично $\varrho(B)\geqq\varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G)\leqq\min\{\varrho(A),\varrho(B)\}$.

Допустим, что $(|A|,|B|)=1$. Если H — максимальная подгруппа группы G, то, как легко видеть, $H=A_1\times B_1$, где $A_1=H\cap A$, $B_1=H\cap B$. Так как $H\neq G$, то $A_1\neq A$ или $B_1\neq B$. Если $A_1\neq A$, то $H\cdot B=A_1\times B\neq G$. Отсюда, ввиду максимальности H, вытекает, что $H=A_1\times B$. Если $B_1\neq B$, то $H=A\times B_1$.

Пусть $S=\{H_1,\ldots,H_n\}$ — минимальное M-покрытие группы G и пусть $H_i=A_i\times B$ $(i=1,\ldots,r)$, $H_{r+i}=A\times B_i$ $(i=1,\ldots,\varrho=n-r)$. Очевидно, A_i — максимальные подгруппы группы A, B_i — максимальные подгруппы группы B. Пусть $S_A=\{A_1,\ldots,A_r\}$, $S_B=\{B_1,\ldots,B_\varrho\}$ (не исключено, что $S_A=\emptyset$ или $S_B=\emptyset$). Допустим, что $r>0$ и $\varrho>0$. Докажем, что тогда S_A-покрытие A или S_B-покрытие B. Если это не так, то найдутся такие $a\in A$, $b\in B$, что $a\notin\bigcup A_i$, $b\notin\bigcup B_i$. Пусть $g=a\cdot b$. Так как S-покрытие группы G, то существует такое i, что $g\in H_i$. Если $i\leqq r$, то $a\in A_i$ — противоречие; если $i>r$, то $b\in B_i$, что также невозможно. Итак, либо S_A-покрытие A, либо S_B-покрытие B. В первом случае $\{H_1,\ldots,H_r\}$-покрытие $A\times B=G$, что, ввиду $r<n$ противоречит минимальности покрытия S. Вторая возможность также приводит к противоречию. Тем самым доказано, что $s=0$ или $r=0$. Если, например, $s=0$, то $H_i=A_i\times B$ $(i=1,\ldots,n)$ $H_n=A_n\times B$ и $\{A_1,\ldots,A_n\}$ — M-покрытие подгруппы A. Следовательно, $\varrho(A)=$ $=\varrho_M(A)\leqq n=\varrho(G)$. С другой стороны, в силу доказанного выше $\varrho(A)\geqq\varrho(G)$. Поэтому $\varrho(G)=\varrho(A)$. Аналогично, если $r=0$, то $\varrho(G)=\varrho(B)$. Так как $\varrho(G)\leqq$ $\leqq\min\{\varrho(A),\varrho(B)\}$, то $\varrho(G)=\min\{\varrho(A),\varrho(B)\}$.

Предложение 2.8. *Пусть p — простое число и G — нециклическая p-группа. Тогда* $\varrho(G)=p+1$.

Доказательство. В силу предложения 2.5 $\varrho(G)=\varrho(G/\Phi(G))$. Так как $G/\Phi(G)$ — нециклическая элементарная абелева группа, то достаточно рассмотреть случай, когда G является элементарной абелевой p-группой. В этом случае $|G|=p^n$, где $n\geqq 2$. Пусть $D<G$, $|G:D|=p^2$. Очевидно, существует ровно $p+1$ максимальных подгрупп $M_1,\ldots,M_{p+1}$ группы G, содержащих D. Легко видеть, что $\{M_1,\ldots,M_{p+1}\}$-покрытие группы G. Пусть $\{H_1,\ldots,H_k\}$ — произВольное М-покрытие Группы G. Так как $\bigcap H_i\neq\emptyset$, то $p^n=|G|=|\bigcup H_i|<\sum_{i=1}^{k}|H_i|=kp^{n-1}$, откуда вытекает, что $k\geqq p+1$. Таким образом, $\{M_1\ldots,M_{p+1}\}$— минимальное M-покрытие группы G, откуда следует, что $\varrho(G)=p+1$.

Для произвольной конечной группы G положим

$$\pi_0(G)=\{p\in\pi(G)|\text{силовские } p\text{-подгруппы нецикличны}\}.$$

Предложение 2.9. *Если G — нециклическая нильпотентная группа, то* $\varrho(G)=$ $=\min\limits_{p\in\pi_0(G)}(p+1)$.

Доказательство. Пусть $\pi(G)=\{p_1, \ldots, p_k\}$ и $G=P_1\times\ldots\times P_k$, где P_i — силовская p_i-подгруппа группы G $i=1, \ldots, k)$. Допустим, что $P_1, \ldots, P_r$ нецикличны, остальные силовские подгруппы — цикличны. Тогда $\pi_0(G)=$ $=\{p_1, \ldots, p_r\}$. В силу предложений 2.7 и 2.8 $\varrho(G)=\min\{\varrho(P_1), \ldots, \varrho(P_k)\}=$ $=\min\{p_1+1, \ldots, p_r+1, \infty, \ldots, \infty\}$, ибо $\varrho(P_k)=\infty$ при $i>r$. Итак, $\varrho(G)=$ $=\min\{p_1+1, \ldots, p_r+1\}=\min\limits_{p\in\pi_0(G)}(p+1)$.

Пусть G — разрешимая группа и $G\supset G'\supset\ldots\supset G^{(l)}=\{1\}$ — её производный ряд. Введём обозначение

$$\varrho_0(G)=\min\{\varrho(G/G'), \varrho(G'/G''), \ldots, \varrho(G^{(l-1)})\}.$$

Легко показать, что $\varrho_0(G)=\infty$ тогда и только тогда, когда группа G циклична либо метациклична.

Предложение 2.10. *Если группа G нильпотентна, то* $\varrho_0(G)=\varrho(G)$.

Доказательство. Так как $G^{(i)}$ нильпотентна, то в силу предложения 2.7 $\varrho(G^{(i)}/G^{(i+1)}=\varrho(G^{(i)})$. Заметим, что, если $H\leqq G$, то $\pi_0(H)\subseteqq\pi_0(G)$, откуда вытекает в силу предложения 2.9, что $\varrho(H)\geqq\varrho(G)$. В частности, $\varrho(G^{(i)})\geqq\varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G^{(i)}/G^{(i+1)})\geqq\varrho(G)$ $(i=0, 1, \ldots, l-1)$. Так как $\varrho(G)=\varrho(G/G')$, отсюда следует, что $\varrho_0(G)=\varrho(G/G')=\varrho(G)$.

2. Пусть $X=\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ — система «длины n» неприводимых нелинейных характеров неабелевой группы G. Общие нули характеров χ_i будем называть нулями системы X. Множество всех нулей системы X обозначим через T_X:$T_X=$ $=\bigcap T_{\chi_i}$. Если $\bigcap\operatorname{Ker}\chi_i=\{1\}$, будем называть систему X точной. Будем называть систему $X=\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ A-системой, если $\chi_i=\chi_1^{\alpha_i}$, где $\alpha_i\in\operatorname{Aut}(G)$ $(i=1, \ldots, n)$.

Примечание. Группа $\operatorname{Aut}(G)$ естественным образом действует на множестве $\operatorname{Irr}(G)$. Если $\chi\in\operatorname{Irr}(G)$, то $\chi^{\operatorname{Aut}(G)}$ — орбита характера χ. A-система является частью такой орбиты.

Предложение 2.11. *Пусть G — неабелева нильпотентная группа и $X=$ $=\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ — система её неприводимых нелинейных характеров, причем $n<\varrho(G)$. Тогда $T_X\neq\emptyset$.*

Доказательство. Характер χ_i индуцируется из некоторой максимальной подгруппы H_i группы G $(i=1, \ldots, n)$. Так как $H_i\lhd G$, то $G\setminus H_i\subseteqq T_{\chi_i}$ $(i=1, \ldots, n)$. Если $T_X=\emptyset$, то $\bigcup H_i=G$. Следовательно, $\{H_1, \ldots, H_n\}$ — M-покрытие группы G. Отсюда вытекает, что $n\geqq\varrho_M(G)=\varrho(G)$ — противоречие. Таким образом, $T_X\neq\emptyset$.

Предложение 2.12. *Пусть $X=\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ — точная A-система разрешимой неабелевой группы G, причем $n<\varrho_0(G)$. Тогда $T_X\neq\emptyset$. В частности, $T_X\neq\emptyset$, если G метациклична.*

Доказательство. Допустим, что $T_X=\emptyset$. Положим $\chi_1=\chi$, $\chi_i=\chi^{\alpha_i}$, где $\alpha_i\in\operatorname{Aut}(G)$. Рассмотрим характер $\chi_{G'}$. Допустим сначала, что $\chi_{G'}$ не изотипичен, т. е., что $\chi_{G'}=e(\psi^{(1)}+\ldots+\psi^{(l)})$, $l>1$, $\psi^{(i)}\in\mathrm{Irr}\,(G')$ $(i=1, \ldots, l)$. Положим $\psi^{(1)}=\psi$. Так как $l>1$, то χ индуцируется из подгруппы $H=I_G(\psi)$. Эта подгруппа собственная, так как $|G:H|=l>1$. Так как $H\supseteq G'$, то $H\lhd G$, и следовательно, $G\setminus H\subseteq T_\chi$*). Положим $H_i=\alpha_i^{-1}(H)$. Так как $\alpha_i^{-1}(T_\chi)=T_{\chi_i}$, то $G\setminus H_i\subseteq T_{\chi_i}$ $(i=1, \ldots, n)$. Так как $\cap T_{\chi_i}=T_X=\emptyset$, то $\cup H_i=G$, т. е. $\{H_1, \ldots, H_n\}$-покрытие группы G. Очевидно $H_i\supseteq G'$ $(i=1, \ldots, n)$ и $\{H_1/G', \ldots, H_n/G'\}$-покрытие группы G/G'. Поэтому $n\geqq\varrho(G/G')$, что невозможно, так как по условию $n<\varrho_0(G)=\min\,\{\varrho(G/G'), \ldots, \varrho(G^{(l)})\}$. Таким образом, $\chi_{G'}$ изотипичен, т. е. $\chi_G=e\psi$, где $\psi\in\mathrm{Irr}\,(G')$. Вместе с тем $(\chi_i)_{G'}=(\chi^{\alpha_i})_{G'}=e\psi^{\bar\alpha_i}$, где $\bar\alpha_i=\alpha_i|_{G'}\in\mathrm{Aut}\,(G')$. Отсюда вытекает в случае, если $\psi(1)=1$, что $G'\subseteq Z(\chi_i)$ и, следовательно, $[G, G']\subseteq\mathrm{Ker}\,\chi_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, $[G, G']\subseteq\cap\,\mathrm{Ker}\,\chi_i=\{1\}$, откуда следует, что группа G нильпотентна. Так как в силу предложения 2.10 $n<\varrho_0(G)=\varrho(G)$, то на основании предложения 2.11 $T_X\neq\emptyset$ — противоречие. Таким образом, $\psi(1)>1$. Положим $\psi_i=\psi^{\bar\alpha_i}$. Так как $\mathrm{Ker}\,\psi_i=\mathrm{Ker}\,\chi_i\cap G'$, то $\cap\,\mathrm{Ker}\,\psi_i=\{1\}$. Поэтому $X_1=\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ — точная A-система группы G'. Так как $T_{\psi_i}=T_{\chi_i}\cap G'$, то $T_{X_1}=\cap\,T_{\psi_i}=\emptyset$. При этом $n<\varrho_0(G')$, так как $n<\varrho_0(G)=\min\{\varrho(G/G'), \ldots, \varrho(G^{(l-1)})\}\leqq\min\,\{\varrho(G'/G''), \ldots, \varrho(G^{(l-1)})\}=\varrho_0(G')$.

Итак, если группа G обладает точной A-системой X длины $n<\varrho_0(G)$ и $T_X=\emptyset$, то $n<\varrho_0(G')$ и G' обладает точной A-системой X_1 длины n, для которой $T_{X_1}=\emptyset$. В частности, подгруппа G' — неабелева. Многократное повторение вышеизложенного рассуждения приводит к заключению, что при любом $i\leqq l-1$ подгруппа $G^{(i)}$ неабелева и обладает точной A-системой X_i длины $n<\varrho_0(G^{(i)})$. В частности, подгруппа $G^{(l-1)}$ оказывается неабелевой, что невозможно, так как $(G^{(l-1)})'=G^{(l)}=\{1\}$. Тем самым доказано, что $T_X\neq\emptyset$. Если группа G метациклическая, то $\varrho_0(G)=\infty$ и поэтому $T_X\neq\emptyset$ какова бы ни была длина n точной A-системы X.

Предложение 2.13. *Пусть G — неабелева конечная группа; N — такой неабелев разрешимый нормальный делитель группы G, что $|G:N|<\varrho_0(N)$; χ — точный неприводимый характер группы G. Тогда $T_\chi\cap N\neq\emptyset$.*

Доказательство. В силу теоремы Клиффорда $\chi_N=e(\psi_1+\ldots+\psi_n)$, где ψ $(i=1, \ldots, n)$.-неприводимые характеры подгруппы N G- сопряженные с $\psi=\psi_1$. Так как χ точен и N неабелев, то $\psi(1)>1$. Поэтому $X=\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ — A-система подгруппы N. Так как $n=|G:I_G(\psi)|\leqq|G:N|<\varrho_0(N)$, то в силу предложения 2.12 $T_X\neq\emptyset$. Если $g\in T_X$, то $\psi_i(g)=0$ $(i=1, \ldots, n)$ и, следовательно, $\chi(g)=0$. Таким образом, $T_\chi\cap N\neq\emptyset$.

Следствие 1. *Пусть G — неабелева конечная группа, N — её разрешимый неабелев нормальный делитель. Точный неприводимый характер χ группы G имеет в N по крайней мере один нуль, если выполнено одно из следующих условий:*

(I) *N — Z-группа.*)

(II) *N не является Z-группой и* $|G:N|\leqq\min\limits_{p\in\pi_0(N)} p$.

*) Это легко вытекает из явной формулы для индуцированного характера.

*) Z-группой называется группа с циклическими силовскими подгруппами. Как известно ([10] теорема 9.4.3), всякая нециклическая Z-группа метациклична.

Доказательство. Если N — Z-группа, то N имеет производный ряд $N \supset N' \supset N'' = \{1\}$ с циклическими факторами. Так как $\varrho(N/N') = \varrho(N') = \infty$, то $\varrho_0(N) = \min\{\varrho(N/N'), \varrho(N')\} = \infty$, откуда вытекает в силу предложения 2.13, что $T_\chi \cap N \neq \emptyset$. Если N не является Z-группой и $|G:N| \leqq \min\limits_{p \in \pi_0(N)} p$, то $|G:N| < \varrho_0(N)$. Действительно, очевидно $\pi_0(N^{(i)}/N^{(i+1)}) \subseteqq \pi_0(N)$. Так как в силу предложения 2.9 $\varrho(N^{(i)}/N^{(i+1)}) = \min\limits_{p \in \pi_0(N^{(i)}/N^{(i+1)})} (p+1)$ или ∞, то $\varrho(N^{(i)}/N^{(i+1)}) \geqq \min\limits_{p \in \pi_0(N)} (p+1)$. Поэтому $\varrho_0(N) = \min\{\varrho(N/N'), \ldots\} \geqq \min\limits_{p \in \pi_0(N)} (p+1)$, откуда и следует, что $|G:N| < \varrho_0(N)$. Итак, $|G:N| < \varrho_0(N)$ и, следовательно, в силу предложения 2.13 $T_\chi \cap N \neq \emptyset$.

Следствие 2. *Пусть N разрешимый нормальный делитель неабелевой группы G, χ — её точный неприводимый характер, $T_\chi \cap N = \emptyset$, $|G:N| \leqq \min\limits_{p \in \pi(N)} p$. Тогда N абелев. В частности, N абелев, если $|G:N| = 2$.*

Доказательство. Допустим, что N неабелев. В силу следствия 1 предложения 2.13 N не является Z-группой и $|G:N| > \min\limits_{p \in \pi_0(N)} p \geqq \min\limits_{p \in \pi(N)} p$ — противоречие. Таким образом, подгруппа N абелева.

§ 3. χ-Максимальные подгруппы

Как и в § 1, G — неабелева группа, χ — её нелинейный неприводимый характер. Если X — конечная группа, то $(\theta_1, \theta_2)_X$ будет обозначать скалярное произведение $|X|^{-1} \sum\limits_{x \in X} \theta_1(x)\overline{\theta_2(x)}$ функций θ_i: $X \to \mathbf{C}$ $(i = 1, 2)$.

Предложение 3.1. *Подгруппа $H < G$ χ-максимальна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:* (i) $H \cap T_\chi = \emptyset$; (ii) $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$; (iii) $G \setminus H \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. 1. Допустим, что H χ - максимальна. Если $H \cap T_\chi \neq \emptyset$, то $|T_\chi \setminus H| < |T_\chi| = |H|$, откуда в силу следствия леммы 1.2 $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$ — противоречие. Таким образом, $H \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому $|T_\chi \setminus H| = |T_\chi| = |H|$, $1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1} = 2$, откуда в силу (1) $(\chi_H, \chi_H)_H \leqq 2$. Так как $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$, то $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$. Поэтому $(\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1} (= 2)$, откуда следует, ввиду леммы 1.2, что $G \setminus H \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$. Таким образом все условия (i)—(iii) выполнены.

2. Допустим, что выполнены условия (i)—(iii). Из (ii) следует, что $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$: В силу (iii) и леммы 1.2 $(\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$, откуда, ввиду (i) и (ii), $2 = (\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi| \cdot |H|^{-1}$. Поэтому $|H| = |T_\chi|$, т. е. подгруппа H χ — максимальна.

Предложение 3.2. *Если $\langle T_\chi \rangle = G$, то χ-максимальные подгруппы группы G максимальны.*

Доказательство. Пусть $H < G$ χ-максимальна, $H < K \leqq G$. Так $|K| > |H| = |T_\chi|$, то ввиду следствия леммы 1.2 $\chi_K \in \mathrm{Irr}(K)$, откуда $(\chi_K, \chi_K)_K = 1$. Так как $G \setminus K \subset G \setminus H \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$, то ввиду леммы 1.2 $(\chi_K, \chi_K)_K = 1 + |T_\chi \setminus K| \cdot |K|^{-1}$.

Поэтому $|T_\chi\setminus K|=0$, откуда $K\supset T_\chi$. Так как $\langle T_\chi\rangle=G$, то $K=G$. Таким образом, подгруппа H максимальна.

Предложение 3.3. *Если* $\langle T_\chi\rangle=G$ *и подгруппа* $H\lhd G$ *χ-максимальна, то* $|G:H|=2$.

Доказательство. По теореме Клиффорда $\chi_H=e(\psi_1+\ldots+\psi_l)$, где $e\in\mathbf{N}$ и $\psi_i\in\mathrm{Irr}(H)$, $\psi_i\neq\psi_j$ при $i\neq j$. В силу предложения 3.1 $e^2l=(\chi_H,\chi_H)_H=2$, откуда $e=1$, $l=2$. Так как $|G:I_G(\psi_1)|=l>1$ и $I_G(\psi_1)\supseteqq H$, то ввиду предложения 3.2 $I_G(\psi_1)=H$ и $|G:H|=2$.

Пусть $H<G$ и $D=\bigcap\limits_{t\in G}H^t$.

Предложение 3.4. *Если подгруппа* H *χ-максимальна, то* (i) $G\setminus D\subseteqq T_\chi\cup U_\chi$; (ii) $Z(\chi)\subseteqq D$.

Доказательство. Если $g\in G\setminus D$, то $g\in G\setminus H^t=(G\setminus H)^t$ для некоторого $t\in G$. Так как подмножества T_χ и U_χ нормальны, то в силу предложения 3.1 $g\in(T_\chi\cup U_\chi)^t=T_\chi\cup U_\chi$. Таким образом, $G\setminus D\subseteqq T_\chi\cup U_\chi$. Если $g\in Z(\chi)$, то $|\chi(g)|=\chi(1)>1$, откуда $g\notin T_\chi\cup U_\chi$. Следовательно, $Z(\chi)\subseteqq D$. Таким образом, $Z(\chi)\subseteqq D$.

§ 4. Доказательство Теоремы 1.

Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\chi(1)>1$, $\langle T_\chi\rangle=G$ и H — χ-максимальная подгруппа группы G. Допустим, что $|G:H|>2$. Тогда $H\ntriangleleft G$ в силу предложения 3.3. Отсюда в силу предложения 3.4 вытекает, что $Z(\chi)\subseteqq D\subset H$. В связи с этим, рассмотрим два случая: (1) $Z(\chi)\neq D$; (2) $Z(\chi)=D$.

Случай 1. $Z(\chi)\neq D$.

Ввиду предложения 3.4 и леммы 1.2 $(\chi_D,\chi_D)_D=1+|T_\chi\setminus D|\cdot|D|^{-1}=1+|T_\chi|\cdot|D|^{-1}=1+|H|\cdot|D|^{-1}=1+|H:D|$. Таким образом,

$$(\chi_D,\chi_D)_D=1+|H:D| \tag{2}$$

Пусть

$$\chi_D=e(\varphi_1+\ldots+\varphi_l) \tag{3}$$

— клиффордовское разложение характера χ_D: $\varphi_i\in\mathrm{Irr}(D)$ G-сопряжены и различны, $e\in\mathbf{N}$, $l=|G:I_G(\varphi)|$, где $\varphi=\varphi_1$.

Если $l=1$, то $\chi_D=e\varphi$; так как $D\subset H$, то $T_\varphi=D\cap T_\chi=\emptyset$. Поэтому в силу леммы 1.1 $\varphi(1)=1$, откуда следует, что $D\subseteqq Z(\chi)$ — противоречие. Итак, $l>1$ и, следовательно, $K=I_G(\varphi)\neq G$. В силу (3) $\chi=\eta^G$, где $\eta\in\mathrm{Irr}(K)$. Поэтому $\chi_K\notin\mathrm{Irr}(K)$,*) откуда в силу леммы 1.2 $|K|\leqq|T_\chi|=|H|$. В силу (2) и (3) имеем

$$e^2l=1+|H:D|. \tag{4}$$

Так как $l=|G:I_G(\varphi)|=|G:K|$, то, ввиду (4) $(|G:K|,|H:D|)=1$. Так как $|G:H|\cdot|H:D|=|G:K|\cdot|K:D|$, отсюда вытекает, что $|G:K|$ делит $|G:H|$, а

*) Это легко доказывается при помощи теоремы взаимности Фробениуса.

потому $|H|$ делит $|K|$. Следовательно, $|H| \leqq |K|$. Таким образом,

(5) $$|K| = |H|$$

и, следовательно,

(6) $$l = |G\colon H| = |G\colon K|.$$

Так как e = степени некоторого неприводимого проективного представления группы K/D, то e делит $|K\colon D|$ *). Ввиду $|K\colon D| = |H\colon D|$ с помощью (4) получаем $e=1$. Учитывая это и (6), представим (3) и (4) в виде

(7) $$|G\colon K| = 1 + |K\colon D|,$$

(8) $$\chi_D = \varphi_1 + \ldots + \varphi_l.$$

Так как $\chi_K \notin \mathrm{Irr}(K)$ и $|K| = |T_\chi|$, то подгруппа K χ-максимальна. Так как $K = I_G(\varphi)$, то $D \leqq K < G$. Если $K \lhd G$, то в силу предложения 3.3 и равенства (5) будем иметь $|G\colon H| = |G\colon K| = 2$ — противоречие. Таким образом, $K \not\!\lhd\, G$. В силу предложения 3.1 $K \cap T_\chi = \emptyset$, откуда $K^G \cap T_\chi = \emptyset$, где $K^G = \cup K^t$. Так как χ индуцируется из K, то $G \setminus K^G \subseteqq T_\chi$, откуда ввиду $K^G \cap T_\chi = \emptyset$, получаем:

(9) $$G \setminus K^G = T_\chi.$$

Из (9) и равенства $|T_\chi| = |K|$ вытекает

(10) $$|K^G| = |G| - |K|.$$

Вычислим теперь $|K^G|$ другим способом. Так как $K \not\!\lhd\, G$ и так как в силу предложения 3.2 подгруппа K максимальна, то $N_G(K) = K$. Поэтому $|\mathrm{Cl}\,(K)| = |G\colon N_G(K)| = |G\colon K| = l$. Пусть $\mathrm{Cl}\,(K) = \{K_1 = K, \ldots, K_l\}$. Очевидно $K_i \supset D$ $(i = 1, \ldots, l)$. В силу (7) и (10) имеем: $|K^G| = |\cup K_i| = \left|D \cup \left\{\bigcup_i (K_i \setminus D)\right\}\right| \leqq |D + \sum |K_i \setminus D| = |D| + l(|K| - |D|) = |G| - |K| = |K^G|$. Отсюда следует, что

$$\left|D \cup \left\{\bigcup_i (K_i \setminus D)\right\}\right| = |D| + \sum_i |K_i \setminus D|.$$

Поэтому подмножества $\Delta_i = K_i \setminus D$ попарно не пересекаются. Рассмотрим транзитивное действие γ группы $\mathfrak{G} = G/D$ на множестве $\Omega = \mathrm{Cl}\,(K)$ порождённое действием группы G на Ω сопряжениями. Так как γ-стабилизатор $\mathrm{St}\, K_i$ «точки» K_i совпадает с $N_G(K_i)/D = K_i/D$ и $K_i \neq D$, то действие γ не регулярно. Если $i \neq j$, то $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, откуда следует, что $K_i \cap K_j = D$. Поэтому $\mathrm{St}\, K_i \cap \cap\, \mathrm{St}\, K_j = \{1\}$. Таким образом, γ — F-действие. В силу леммы 1.4 $\mathfrak{G}$-группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка $|\Omega| = l = |G\colon K|$. Пусть $\mathfrak{K} = K/D$. Так как $|\mathfrak{G}\colon \mathfrak{K}| = |G\colon K| = |\mathfrak{N}|$, то $\mathfrak{N}$ — дополнительный множитель в $\mathfrak{G}$. Пусть $D \subseteqq N < G$, $\mathfrak{N} = N/D$. Так как в силу (9) $T_\chi = G \setminus K^G$ и $D \subset K^t$ при любом $t \in G$, то, обозначив через $\overline{M}$ канонический образ подмножества $M \subseteqq G$ в группе $\mathfrak{G} = G/D$, будем иметь $\overline{T}_\chi = \overline{G} \setminus \overline{K}^G = \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{K}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}^{\#}$. Поэтому $T_\chi \subset N$, откуда $G = \langle T_\chi \rangle \subseteqq N$, что невозможно, так как $N/D = \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

---

*) См. напр. [2] Satz 17.5.

Случай 2. $Z(\chi)=D$.

Так как $(T_\chi \cup U_\chi)\cap Z(\chi)=\emptyset$, то в силу предложения 3.4 $G\setminus Z(\chi)=T_\chi\cup U_\chi$. Пусть $\theta_0=\chi\bar{\chi}$, где $\bar{\chi}$ — характер комплексно сопряженный с χ. Обозначив через $\bar{g}$ канонический образ элемента $g\in G$ в $\mathfrak{G}=G/Z(\chi)$, определим характер θ группы $\mathfrak{G}$, полагая $\theta(\bar{g})=\theta_0(g)=|\chi(g)|^2$. Это определение корректно, так Ker $\theta_0=Z(\chi)$. Пусть $A=T_\theta$, $B=\{\bar{g}\in\mathfrak{G}|\theta(\bar{g})=1\}=U_\theta$. Легко видеть, что $\mathfrak{G}^\#=$ $=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$ и

(11) $$A=\overline{T}_\chi,\quad B=\overline{U}_\chi.$$

В частности, $A\neq\emptyset\neq B$. В силу леммы 1.16 статьи [6] $\mathfrak{G}$ — несвязная группа с нормальным C-разбиением $\{A, B\}$. Так как $\langle T_\chi\rangle=G$, то виду (11) $\langle A\rangle=\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{H}=H/Z(\chi)$. Так как $|\mathfrak{H}|=|H|\cdot|Z(\chi)|^{-1}=|T_\chi|\cdot|Z(\chi)|^{-1}$ и $T_\chi Z(\chi)=T_\chi$, то T_χ разбивается на $|T_\chi|\cdot|Z(\chi)|^{-1}$ смежных классов по $Z(\chi)$. Поэтому

$$|T_\chi|\cdot|Z(\chi)|^{-1}=|\overline{T}_\chi|=|A|.$$

Таким образом,

(12) $$|\mathfrak{H}|=|A|$$

Заметим, кроме того, что $H\setminus Z(\chi)\subset G\setminus Z(\chi)=T_\chi\cup U_\chi$; так как $H\cup T_\chi=\emptyset$, то $H\setminus Z(\chi)\subseteq U_\chi$. Отсюда следует, что $\mathfrak{H}^\#\subseteq\overline{U}_\chi=B$. Так как централизаторы элементов из A содержатся в $\hat{A}=A\cup\{1\}$, то действие сопряжениями подгруппы $\mathfrak{H}$ на A полурегулярно. Пусть $\bar{g}\in A$. Тогда $\bar{g}^{\mathfrak{H}}\subseteq A$ и $|\bar{g}^{\mathfrak{H}}|=|\mathfrak{H}|$, откуда в силу (12) $\bar{g}^{\mathfrak{H}}=A$. Следовательно, $A=\mathrm{Cl}\,(\bar{g})$. Таким образом, A — класс сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$. Так как подмножество A замкнуто*), то в A существуют элементы простого порядка p. Так как A — класс сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$, то все элементы из A имеют порядок p. В силу леммы 1.16 статьи [6] элементы подмножества B являются p'-элементами. Так как $\mathfrak{H}\subseteq\hat{B}$, отсюда следует, что $\mathfrak{H}$ — p'-подгруппа. Пусть $\bar{g}\in A$. Тогда $|A|=|\mathrm{Cl}\,(\bar{g})|=$ $=|\mathfrak{G}:C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})|$. Так как $|A|=|\mathfrak{H}|$ и $\mathfrak{H}$ — p'-подгруппа, то $|\mathfrak{G}:C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})|$ не делится на p. С другой стороны, так как A замкнуто, то $C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})\subseteq\hat{A}$, откуда следует, что $C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})$ — p-подгруппа. Это показывает, что $C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})\in\mathrm{Syl}_p(\mathfrak{G})$. Таким образом, централизатор каждого нетривиального p-элемента группы $\mathfrak{G}$ является силовской p-подгруппой последней. Как известно ([4], теорема C) при этой ситуации силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ являются элементарными абелевыми CC-подгруппами**).

Пусть $\mathfrak{P}\in\mathrm{Syl}_p(\mathfrak{G})$. Тогда $\hat{A}=\mathfrak{P}^{\mathfrak{G}}$ — объединение всех силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{P}$ — централизатор некоторого элемента $\bar{g}\in A$, то $|\mathfrak{H}|=|A|=|\mathfrak{G}:\mathfrak{P}|$. Поэтому имеет место факторизация $\mathfrak{G}=\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{H}$. В частности, $|\mathfrak{G}|=q\cdot|\mathfrak{H}|$, где $q=p^\alpha=|\mathfrak{P}|$ — p-часть числа $|\mathfrak{G}|$.

Пусть $\mathrm{Syl}_p(\mathfrak{G})=\{\mathfrak{P}_0=\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r\}$. Так как $\mathfrak{P}_i$ — абелевы CC-подгруппы, то $\mathfrak{P}_i\cap\mathfrak{P}_j=\{\bar{1}\}$ при $i\neq j$. Ввиду $\hat{A}=\cup\mathfrak{P}_i$, отсюда следует, что

(13) $$|A|=r\,|\mathfrak{P}^\#|=r(q-1).$$

Так как $|A|=|\mathfrak{H}|$, $r=|\mathfrak{G}:N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})|$, $|\mathfrak{G}|=|\mathfrak{H}|\cdot|\mathfrak{P}|$, то $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}):\mathfrak{P}|=q-1$. Так как $q=|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|=|G:H|>2$, то $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})\neq\mathfrak{P}$. Так как $\mathfrak{P}$ — CC-подгруппа, отсюда

*) Определение замкнутости подмножества конечной группы см. в [6].

**) Подгруппа $\mathfrak{P}\leq\mathfrak{G}$ называется CC-подгруппой, если $\bar{g}\in\mathfrak{P}^\#$ влечет $C_{\mathfrak{G}}(\bar{g})\subseteq\mathfrak{P}$.

следует, что $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})$-группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{P}$. Ввиду $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}):\mathfrak{P}|=q-1=|\mathfrak{P}|-1$, $N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})$ изоморфна строго 2-транзитивной группе подстановок степени q.

Докажем, что

$$r = qk+1, \quad k\in\mathbf{Z}, \quad k \geqq 0. \tag{14}$$

Заметим, что $\hat{A}=\{\bar{x}\in\mathfrak{G}\,|\,\bar{x}^g=\bar{1}\}$. Поэтому в силу теоремы Фробениуса об уравнениях в группах $|\hat{A}|\equiv 0 \pmod q$, откуда вытекает, что $|A|\equiv -1 \pmod q$. Отсюда и из (13) следует, что $r\equiv 1 \pmod q$. Таким образом, (14) доказано. В силу (13) и (14) имеем

$$|A| = (qk+1)(q-1). \tag{15}$$

Так как $\sum_{\bar{g}\in\mathfrak{G}}\theta(\bar{g})=\theta(\bar{1})+\sum_{\bar{g}\in A}\theta(\bar{g})+\sum_{\bar{g}\in B}\theta(\bar{g})=\chi(1)^2+|B|$ и, с другой стороны, $\sum_{\bar{g}\in\mathfrak{G}}\theta(\bar{g})=|Z(\chi)|^{-1}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2=|Z(\chi)|^{-1}|G|=|\mathfrak{G}|$, то $|\mathfrak{G}|=\chi(1)^2+|B|$. Отсюда вытекает, ввиду равенства $|\mathfrak{G}|=1+|A|+|B|$, что

$$|A| = \chi(1)^2-1. \tag{16}$$

Следовательно, $(\chi(1),|\mathfrak{H}|)=(\chi(1),|A|)=1$. Так как $\mathfrak{G}=G/Z(\chi)$, то $\chi(1)$ делит $|\mathfrak{G}|=p^{\alpha}|\mathfrak{H}|$, откуда, учитывая последнее замечание, заключаем, что $\chi(1)$ делит p^{α}. Полагая $\chi(1)=p^{\lambda}$ $(\lambda\leqq\alpha)$, получаем в силу (16):

$$|A| = p^{2\lambda}-1 \leqq p^{2\alpha}-1. \tag{17}$$

Из (17) и (15) вытекает, что $k\leqq 1$. Если $k=0$, то, ввиду (14), $r=1$ и, следовательно, $\mathfrak{P}\lhd\mathfrak{G}$, откуда $\hat{A}=\mathfrak{P}^{\mathfrak{G}}=\mathfrak{P}$; поэтому $\langle A\rangle=\mathfrak{P}\neq\mathfrak{G}$ — противоречие. Итак, $k=1$, $r=q+1$ и, следовательно, $\mathrm{Cl}(\mathfrak{P})=\{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_q\}$, $\mathfrak{P}_0=\mathfrak{P}$.

Рассмотрим действие γ группы $\mathfrak{G}$ сопряжениями на $\Omega=\mathrm{Cl}(\mathfrak{P})$. Подгруппа $\mathfrak{N}_i=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}_i)$ является γ-стабилизатором «точки» $\mathfrak{P}_i$. Пусть γ_0 — действие подгруппы $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_0$ на множестве $\Omega_0=\{\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_q\}$ порождённое действием γ. Так как γ_0-стабилизатор «точки» $\mathfrak{P}_1\in\Omega_0$ совпадает с $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1$, то длина s γ_0-орбиты точки $\mathfrak{P}_1$ равна $|\mathfrak{N}:\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1|$, откуда $s\cdot|\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1|=|\mathfrak{N}|=q(q-1)$, ибо $\mathfrak{N}=N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P})$ и, как было доказано выше, $|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{P}):\mathfrak{P}|=q-1$. Так как $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{P}_1=\{1\}$, то $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1$ — p'-подгруппа. Из равенства $s\cdot|\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1|=q(q-1)$ поэтому вытекает, что $|\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1|$ делит $q-1$. Полагая $q-1=|\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_1|\,t$ $(t\in\mathbf{N})$, получаем $s=qt\geqq q=|\Omega_0|$. Поэтому γ_0-орбита точки $\mathfrak{P}_1$ совпадает с Ω_0. Таким образом, действие γ_0 транзитивно. Так как $\mathfrak{N}$-группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{P}$, имеющая порядок $q=|\Omega_0|$ и так как $|\mathfrak{N}|=q(q-1)$, то на основании леммы 1.5 ($\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N}$ в формулировке леммы заменяются соответственно на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$; $n=q$) действие γ_0 строго 2-транзитивно. Ввиду транзитивности действия γ, отсюда в силу леммы 1.3 следует, что действие γ строго 3-транзитивно. В частности, γ точно. Можно поэтому считать, что $\mathfrak{G}$ — строго 3-транзитивная группа подстановок степени $q+1$. Докажем, что группа $\mathfrak{G}$ простая. Прежде всего, заметим, что, ввиду максимальности подгруппы H (см. предложение 3.2), подгруппа $\mathfrak{H}$ максимальна в $\mathfrak{G}$. Далее, так как $\bigcap_{t\in G} H^t=D=Z(\chi)$, то $\bigcap_{\bar{t}\in\mathfrak{G}}\mathfrak{H}^{\bar{t}}=\{\bar{1}\}$. Допустим, что $\{\bar{1}\}\neq\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{A}\subsetneqq\mathfrak{H}$, откуда, ввиду максимальности $\mathfrak{H}$, вытекает, что $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$. Поэтому $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\cong\mathfrak{H}/\mathfrak{A}\cap\mathfrak{H}$ — p'-подгруппа, откуда следует, что $\mathfrak{A}$ содержит все силовские

p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$. Так как $\hat{A}=\mathfrak{P}^{\mathfrak{G}}$ — объединение всех силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{A}\supseteq\hat{A}$, откуда следует, что $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}$, так как $\langle\hat{A}\rangle=\mathfrak{G}$. Тем самым, простота группы $\mathfrak{G}$ доказана. Ввиду несвязности, она не является циклической.

В силу леммы 1.6 $p=2$ и $\mathfrak{G}\cong PSL(2,q)$. Так как $|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|=q$ четно, то на основании леммы 1.7 $q=2$ и, следовательно, $\mathfrak{G}\cong PSL(2,2)$, что противоречит простоте группы $\mathfrak{G}$.

Таким образом, случай, когда $Z(\chi)=D$ также невозможен. Мы видим, что допущение $|G:H|>2$ во всех случаях приводит к противоречию. Тем самым, доказано, что $|G:H|=2$. Так как $H\cap T_\chi=\emptyset$ то $T_\chi\subseteq G\setminus H$. Из $|G:H|=2$ следует, что $|T_\chi|=|H|=|G\setminus H|$. Поэтому $T_\chi=G\setminus H$. Итак, основное утверждение теоремы доказано.

Обратное утверждение очевидно. Пусть $|G:H|=2$ и $G\setminus H=T_\chi$. Тогда, очевидно, $\langle T_\chi\rangle=\langle G\setminus H\rangle=G$. Так как $H\cap T_\chi=\emptyset$, то χ_H приводим. Так как, кроме того, $|H|=|G\setminus H|=|T_\chi|$, то подгруппа H χ-максимальна.

§ 5. Доказательство Теоремы 2.

1. Пусть G — неабелева разрешимая группа, обладающая χ-максимальной подгруппой H, где χ — точный неприводимый характер группы G удовлетворяющий условию $\langle T_\chi\rangle=G$. В силу теоремы 1 $|G:H|=2$ и $G\setminus H=T_\chi$. Ввиду следствия 2 предложения 2.13, отсюда вытекает, что подгруппа H абелева. Так как $\chi(1)>1$, то в силу теоремы Ито $\chi(1)=2$. Из точности характера χ следует, что центр $Z(G)$ группы G цикличен. Так как характер χ исчезает вне H то $Z(G)\subseteq H$. При этом, $Z(G)\neq H$, так как в противном случае группа G была бы абелевой. Докажем, что $|H:Z(G)|$ нечетно. Если $|H:Z(G)|$ четно, то $g^2\in Z(G)$ для некоторого элемента $g\in H\setminus Z(G)$. Пусть Γ — неприводимое представление группы G, порождающее характер χ. Так как $\chi(1)=2$, то $\Gamma(g)$ — матрица 2-го порядка. Мы можем считать её диагональной: $\Gamma(g)=\operatorname{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Так как $g^2\in Z(G)$, то матрица $\Gamma(g^2)=\operatorname{diag}\{\varepsilon_1^2,\varepsilon_2^2\}$ скалярна. Поэтому $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2$ откуда следует, что $\varepsilon_1=\pm\varepsilon_2$. Если $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, то $\Gamma(g)$ скалярна, откуда вытекает, ввиду точности Γ, что $g\in Z(G)$ — противоречие. Если $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$, то $\chi(g)=0$, что также невозможно, так как $T_\chi\cap H=\emptyset$. Тем самым, нечетность числа $|H:Z(G)|$ доказана.

2. Пусть $g\in G\setminus H$. Докажем, что тогда (i) $|C_G(g)|=|G:G'|$; (ii) $\mathrm{Cl}(g)=gG'$; (iii) $C_G(g)\cap H=Z(G)$; (iv) $|C_G(g):Z(G)|=2$. Прежде всего заметим, что, ввиду абелевости H, характер θ_H приводим, если $\theta\in\mathrm{Irr}(G)$, $\theta(1)>1$. Так как $G/H\cong C(2)$, то θ_H неизотипичен и, следовательно, ввиду максимальности H, θ индуцируется из H. Так как $H\lhd G$, то $T_\chi=G\setminus H\subseteq T_\theta$. Поэтому, если $g\in T_\chi$, то $|C_G(g)|=\sum\limits_{\theta\in\mathrm{Irr}(G),\theta(1)=1}|\theta(g)|^2+\sum\limits_{\theta\in\mathrm{Irr}(G),\theta(1)>1}|\theta(g)|^2=\sum\limits_{\theta\in\mathrm{Irr}(G),\theta(1)=1}|\theta(g)|^2=|G/G'|$. Тем самым, доказано (i). Далее, так как $g^t=g[t,g]$ для любого $t\in G$, то $\mathrm{Cl}(g)\subseteq gG'$. С другой стороны, в силу (1) $|\mathrm{Cl}(g)|=|G:C_G(g)|=|G'|=|gG'|$. Поэтому $\mathrm{Cl}(g)=gG'$. Тем самым, доказано (ii). Пусть, далее, $h\in C_G(g)\cap H$. Так как H абелева, то h перестановочен со всеми элементами из $H\cup Hg=G$. Поэтому $h\in Z(G)$. Таким образом, $C_G(g)\cap H\subseteq Z(G)$. Обратное включение

вытекает из результатов п. I. Таким образом, $C_G(g)\cap H=Z(G)$. Этим доказано утверждение (iii). Для доказательства (iv) заметим, что, ввиду максимальности H, $G=H\cdot C_G(g)$, откуда в силу (III) $G/H\cong C_G(g)/C_G(g)\cap H=C_G(g)/Z(G)$. Следовательно, $|C_G(g):Z(G)|=|G:H|=2$. Итак, (iv) доказано.

3. Пусть $S\in \mathrm{Syl}_2(G)$ и P — силовская 2-подгруппа подгруппы H. Так как $P\lhd G$, то $P\subset S$. Из $|G:H|=2$ следует, что $|S:Z|=2$. Легко видеть, что подгруппа S абелева. Действительно, так как $|H:Z(G)|$ нечетно, то $P\subseteqq Z(G)$, откуда вытекает, ввиду $S/P\cong C(2)$, что S абелева. Обозначив через Q нечетную компоненту $O(H)$ подгруппы H, будем, очевидно, иметь

$$H=P\times Q,\quad G=Q\cdot S. \tag{18}$$

4. Докажем, что G' — циклическая подгруппа нечетного порядка, причем $H=Z(G)\times G'$. Прежде всего, заметим, что в силу (18) и результатов п. 3 группа $G/Q\cong S$ абелева. Поэтому $G'\subseteqq Q$, откуда вытекает нечетность $|G'|$. Пусть $g\in S\setminus P$. Докажем, что $G'\cap C_G(g)=\{1\}$ и $G=G'\cdot C_G(g)$. Заметим, что $g\in G\setminus H$ и, следовательно, в силу результатов п. 2 $\mathrm{Cl}\,(g)=gG'$. Пусть $x\in C_G)g)\cap \cap G'$. Так как $|G'|$ нечетно, то $O(x)$ нечетно и, следовательно, $(O(x), O(g))=1$. Ввиду $xg=gx$ отсюда следует, что $O(gx)=O(g)\cdot O(x)$. Так как, с другой стороны, $gx\in gG'=\mathrm{Cl}\,(g)$, то $O(gx)=O(g)$. Поэтому $O(x)=1$ и, следовательно, $x\,\S 1$. Таким образом, $G'\cap C_G(g)=\{1\}$. Отсюда следует в силу п. 2, что $G=G'\cdot C_G(g)$. Так как $Z(G)\subseteqq C_G(g)$, отсюда вытекает, что $Z(G)\cap G'=\{1\}$. Для доказательства разложения $H=Z(G)\times G'$ заметим, что $G'\subseteqq H$ так как $G/H\cong C(2)$ и $Z(G)\subset H$ в силу п. 1. Поэтому $L=Z(G)\times G'\subseteqq H$. Пусть $g\in S\setminus P$.
Тогда на основании доказанного выше и утверждения (IV) из п. 2 будем иметь $|G:L|=|G'\cdot C_G(g):L|=|C_G(g):Z(G)|=2$, откуда вытєкает, что $L=H$. Таким образом, $Z(G)\times G'=H$. Для доказательства цикличности G' рассмотрим естественный гомоморфизм $g\mapsto \bar g$ группы G на $\bar G=G/Z(G)$. Так как $H=Z(G)\times G'$, то $\bar H=\bar G'=\bar G'$. Если $\bar g\in \bar G\setminus \bar H$, то $g\in G\setminus H$ и в силу п. 2 $\mathrm{Cl}\,(\bar g)=\bar g\bar G'$. Поэтому $|\bar G:C_{\bar G}(\bar g)|=|\mathrm{Cl}\,(\bar g)|=|\bar G'|=|\bar H|$, откуда $|C_{\bar G}(\bar g)|=|\bar G:\bar H|=|G:H|=2$. Таким образом, $C_{\bar G}(g)=\langle\bar g\rangle=\{\bar 1,\bar g\}$ и, следовательно, $C_{\bar G}(\bar g)\cap \bar H=\{\bar 1\}$. Отсюда вытекает, что $C_{\bar G}(\bar x)=\bar H$, если $\bar x\in \bar H^{\#}$. Поэтому $\bar G$-группа Фробениуса с ядром $\bar H=\bar G'$ и с дополнительныммно жителем $\langle\bar g\rangle\cong C(2)$. Так как $O(\bar g)=2$, то элементы из ядра $\bar G'$ группы Фробениуса $\bar G$ инвертируются элементом $\bar g$. Отсюда следует, что для любого $x\in G'$ имеет место $x^g=x^{-1}z$, где $z\in Z(G)$. Так как $z=xx^g\in Z(G)\cap G'$, то $z=1$ и, следовательно, $x^g=x^{-1}$. Таким образом, элементы из G' инвертируются элементами из $G\setminus H$. Так как $G'\subseteqq H$ и H абелева, то все подгруппы группы G' нормальны в G. Так как $\chi(1)=2$, $\mathrm{Ker}\,\chi=\{1\}$ и $G'\subsetneqq Z(G)$, то $\chi_{G'}=\varphi+\varphi'$, где φ и φ' G — сопряженные различные линейные характеры подгруппы G' удовлетворяющие условию $\mathrm{Ker}\,\varphi\cap \mathrm{Ker}\,\varphi'=\{1\}$. Пусть $\varphi'=\varphi^g$, где $g\in G$. Ввиду нормальности всех подгрупп группы G, входящих в G', $\mathrm{Ker}\,\varphi'=(\mathrm{Ker}\,\varphi)^g=\mathrm{Ker}\,\varphi$. Поэтому $\mathrm{Ker}\,\varphi=\{1\}$. Таким образом, абелева группа G' обладает точным линейным характером φ, откуда вытекает цикличность G'.

5. Докажем, что $G/Z(G)\cong D_m$ (m нечетно). В силу п. 4 G' цикличен и $|G'|=m$ нечетно. Пусть $G'=\langle a\rangle$, $b\in G\setminus H$. Так как $G'\cap Z(G)=\{1\}$, то в обозначениях п. 4 $\langle\bar a\rangle=\bar G'\cong G'$ и, следовательно, $O(\bar a)=m$. Так как в силу п. 4 $\bar G=\langle\bar a,\bar b\rangle$, $O(\bar b)=2$ и, $\bar a^{\bar b}=\bar a^{-1}$, то $\bar G\cong D_m$. Все утверждения теоремы таким образом доказаны.

§ 6. Некоторые применения

В этом параграфе G — неабелева группа, $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\chi(1)>0$, $\langle T_\chi\rangle=N_\chi$, $|T_\chi|=n_\chi$.

Лемма 6.1 (Галлахер [10]). (I) $\chi_{N_\chi}\in\mathrm{Irr}(N_\chi)$ *(В частности, N_χ неабелева)*; (II) $G\diagdown N_\chi\subseteqq U_\chi$; (III) $|Z(\chi)|$ *делит* n_χ *и* $\frac{n_\chi}{|Z(\chi)|}\geqq\chi(1)^2-1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $G\diagdown Z(\chi)\subseteqq\subseteqq T_\chi\cup U_\chi$.

Доказательство.*) Пусть $N_\chi=H$. Так как $T_\chi\diagdown H=\emptyset$ и $(\chi_H,\chi_H)_H\geqq 1$, то в силу (1) $(\chi_H,\chi_H)_H=1$, т. е. $\chi_H\in\mathrm{Irr}(H)$ и неравенство (1) превращается в равенство $1=1$. В силу леммы 1.2 $G\diagdown H\subseteqq T_\chi\cup U_\chi$. Так как $T_\chi\subset H$, то $G\diagdown H\subseteqq U_\chi$. Положим, далее, $Z(\chi)=K$. Если $g\in K$, то $|\chi(g)|=\chi(1)$. Поэтому $(\chi_K,\chi_K)_K=\chi(1)^2$ и (1) даёт $\frac{n_\chi}{|K|}\geqq\chi(1)^2-1$. В силу леммы 1.2 знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $G\diagdown K=T_\chi\cup U_\chi$. То, что $|Z(\chi)|$ делит n_χ уже было отмечено при доказательстве теоремы 1.

Лемма 6.2 [7]. *Если* $g\in T_\chi$, *то* $C_G(g)\subset N_\chi$.

Доказательство. В [7] было доказано, что $C_G(g)\subseteqq N_\chi$. Если $C_G(g)=N_\chi$, то $g\in Z(N_\chi)$, что невозможно, так как $Z(N_\chi)\subseteqq Z(\chi)$ и $T_\chi\cap Z(\chi)=\emptyset$. Таким образом, $C_G(g)\subset N_\chi$.

Лемма 6.3 $|G:N_\chi|$ *строго делит* n_χ.

Доказательство. Пусть $C_1,\dots,C_{k_\chi}$ — классы сопряженных нулей характера χ, $|C_i|=h_i$, $g_i\in C_i$. В силу леммы 6.2 $|N_\chi|=|C_G(g_i)|m_i$, где $m_i\in\mathbf{N}$, $m_i>1$. Поэтому $h_i=|G:N_\chi|m_i$, откуда после сложения получаем $n_\chi=|G:N_\chi|m$, где $m=\sum m_i\geqq 2K_\chi>1$.

Лемма 6.4 [7]. $(\chi(1),|G:N_\chi|)=1$.

Доказательство. Пусть p-простой делитель $\chi(1)$ и $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. Если $P\not\subseteqq N_\chi$, то найдется $g\in P\cap\Delta_\chi$, где $\Delta_\chi=G\diagdown N_\chi$. В силу леммы 6.1 $g\in U_\chi$ и, следовательно, $\chi(g)$ — корень из единицы. С другой стороны, $\chi(g)=\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{\chi(1)}$, где ε_i — корни из 1 степени $p^\alpha=|P|$ (p-простое число). Пусть ε — первообразный корень из 1 степени p^α и $\lambda=1-\varepsilon$. Тогда $\varepsilon_i\equiv 1\pmod{\lambda}$ $(i=1,\dots,\chi(1))$ и, следовательно, $\chi(g)\equiv\chi(1)\pmod{\lambda}$. Так как $\chi(g)\in\mathbf{Q}(\varepsilon)$ и $\chi(g)$ — корень из 1, то, как известно, $\chi(g)=\pm\varepsilon^\nu$ $(\nu\in\mathbf{Z})$. Поэтому $\chi(g)\equiv\pm 1\pmod{\lambda}$. Таким образом, $\chi(1)\equiv\pm 1\pmod{\lambda}$, откуда следует, ввиду необратимости λ в кольце целых элементов поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, что $\chi(1)\equiv\pm 1\pmod{p}$. Таким образом, $(\chi(1),p)=1$ — противоречие. Итак, $P\subseteqq N_\chi$ и, следовательно, $(|G:N_\chi|,p)=1$. Так как p — любой простой делитель $\chi(1)$, то $(|G:N_\chi|,\chi(1))=1$.

Лемма 6.5 *Если* n_χ *нечетно, то* T_χ *содержит инволюцию.*

---

*) Доказательство заимствовано из [5].

Доказательство. Если $g \in T_\chi$, то и $g^{-1} \in T_\chi$, так как $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} = 0$. Если бы T_χ не содержало инволюций, то T_χ разбивалось бы на пары $\{g, g^{-1}\}$ и число n_χ было бы четным. Таким образом, T_χ содержит инволюцию.

Предложение 6.1. *Пусть* $H \leqq G$ *и* $Z(H) \setminus Z(\chi) \neq \emptyset$. *Тогда* $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$ *и* $|H| \leqq n_\chi$.

Доказательство. Если $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$, то $Z(H) \subseteq Z(\chi)$ — противоречие. Таким образом, $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$, откуда следует, ввиду леммы 1.2, что $|H| \leqq n_\chi$.

Следствие. *Если* $g \in G \setminus Z(\chi)$, *то* $|C_G(g)| \leqq n_\chi$.

Доказательство. Так как $g \in Z(H)$, где $H = C_G(g)$, то $Z(H) \setminus Z(\chi) \neq \emptyset$. Поэтому в силу предложения 6.1 $|H| \leqq n_\chi$.

Положим для подгруппы $H \leqq G$: $\tau_\chi(H) = |H \cap T_\chi|$. Так как $\tau_\chi(H) + |T_\chi \setminus H| = n_\chi$, то следствие леммы 1.2 равносильно утверждению: если $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$, то $|H| \leqq n_\chi - \tau_\chi(H)$.

Предложение 6.2. *Если* $g \in T_\chi$, *то* $|C_G(g)| \leqq n_\chi - 1$. *Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $G \cong S_3$.

Доказательство. Пусть $H = C_G(g)$. Так как $\tau_\chi(H) \geqq 1$, то в силу следствия леммы 1.2 $|H| \leqq n_\chi - 1$. Допустим, что $|H| = n_\chi - 1$. Тогда $\tau_\chi(H) = 1$ и, следовательно, $T_\chi \cap H = \{g\}$. Далее, так как $|H| = |T_\chi \setminus H|$, то в силу (1) $(\chi_H, \chi_H)_H \leqq 2$. С другой стороны, $(\chi_H, \chi_H)_H \geqq 2$, так как в силу предложения 6.1 $\chi_H \notin \mathrm{Irr}(H)$. Таким образом, $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$ и в (1) имеет место знак равенства. Поэтому на основании леммы 1.2 $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Следовательно, полагая $D = \bigcap_{t \in G} H^t$, будем иметь

$$G \setminus D \subseteq T_\chi \cup U_\chi.$$

Пусть $x \in D \cap T_\chi$. Тогда $x \in H \cap T_\chi = \{g\}$, откуда $x = g$. Таким образом, $D \cap T_\chi = \{g\}$. Так как $D \lhd G$ и T_χ нормально, то $g \in Z(G)$, что невозможно, так как $T_\chi \cap Z(G) = \emptyset$. Таким образом, $D \cap T_\chi = \emptyset$. В силу леммы 1.2 имеем $(\chi_D, \chi_D)_D = 1 + |T_\chi \setminus D| \cdot |D|^{-1}$. Так как $|T_\chi \setminus D| = |T_\chi| = n_\chi$, то $n_\chi = |D|[(\chi_D, \chi_D)_D - 1]$, откуда следует, что $|D|$ делит n_χ. Так как, с другой стороны, $D \leqq H$, то $|D|$ делит $|H| = n_\chi - 1$. Следовательно, $|D| = 1$. Отсюда следует, что $G^\# = T_\chi \cup U_\chi$. Так как $(\chi_D, \chi_D) = \chi(1)^2$, то

$$n_x = x(1)^2 - 1. \tag{19}$$

Следовательно, по терминологии статьи [9] G — VZ-группа. Она несвязна и $\{T_\chi, U_\chi\}$ — её нормальное C-разбиение. Так как $g \in T_\chi$ и подмножество T_χ замкнуто, то $H = C_G(g) \subseteq \hat{T}_\chi$. Поэтому ([6], лемма 3.7) $n_\chi - 1 = |H|$ делит $\chi(1)$. С другой стороны, в силу (19) $\chi(1)$ делит $n_\chi + 1$. Поэтому $n_\chi - 1$ делит $n_\chi + 1$, откуда вытекает, что $n_\chi \leqq 3$. Ввиду (19) случай $n_\chi \leqq 2$ невозможны. Поэтому $n_\chi = 3$ и $\chi(1) = 2$. Таким образом, $T_\chi = \{g_1, g_2, g_3\}$. Так как $T_\chi \cap Z(G) = \emptyset$, то действие группы G сопряжениями на T_χ транзитивно. Ядро этого действия поэтому совпадает с $\bigcap_{i=1}^{3} C(g_i) = \bigcap_{t \in G} H^t = D = \{1\}$. Поэтому группа G изоморфна некоторой подгруппе группы S_3. Так как G неабелева, то $G \cong S_3$. Легко проверить, что группа S_3 удовлетворяет условиям предложения.

Предложение 6.3. *Имеет место неравенство*

$$|G| \leqq \frac{n_\varkappa(n_\varkappa-1)}{k_\varkappa}, \tag{20}$$

где K_χ — число классов сопряженных нулей характера χ. Знак равенства в (20) достигается тогда и только тогда, когда $G \cong S_3$.

Доказательство. Пусть $C_1, \ldots, C_{K_\chi}$ — классы нулей характера χ; $h_i = |C\ |$; $g_i \in C_i$ $(i=1, \ldots, k_\chi)$. В силу предложения 6.2 $|C_G(g_i)| \leqq n_\chi - 1$. Поэтому $|G| \leqq$ $\leqq h_i(n_\chi - 1)$ $(i=1, \ldots, k_\chi)$. Складывая эти неравенства и замечая, что $\sum h_i = n_\chi$, получаем (20). Если $|G| = \dfrac{n_\chi(n_\varkappa-1)}{k_\chi}$, то, как видно из доказательства неравенства (20), должны выполняться равенства $C_G(g_i) = n_\chi - 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, k_\chi\}$. В силу предложения 6.2 $G \cong S_3$ и $k_\chi = 1$.

Следствие 1. $n_\chi > \sqrt{|G|}$.

Следствие 2. *Класс* K_n $(n \in \mathbf{N})$ *групп, обладающих неприводимым характером с n нулями, конечен.*

Примечание. Классы K_n описаны для $n \leqq 8$: $K_1 = K_2 = K_4 = \emptyset$, $K_p = \{D_p\}$, где $p \in \{3, 5, 7\}$, $K_6 = \{D_4, Q_8, D_6, \langle 2, 2, 3\rangle, SL(2, 3)\}$, где Q_8-группа кватернионов, $\langle 2, 2, 3\rangle$ — ZS-метациклическая группа 12-го порядка (терминология книги [12]); $K_8 = \{A_4, S_4\}$.

Предложение 6.4. $K_1 = K_2 = K_4 = \emptyset$. *Если* $n > 4$, *то* $K_n \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $G \in K_n$, $n \in \{1, 2, 4\}$. В силу предложения 6.3 $|G| \leqq n(n-1)$, откуда сразу вытекает, что $K_1 = K_2 = \emptyset$. Допустим, что $n = 4$, $\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)$, $n_\chi = 4$. В силу леммы 6.1 $\dfrac{4}{|Z(\chi)|} \geqq \chi(1)^2 - 1$, откуда $|Z(\chi)| = 1$. Рассмотрим действие γ группы G сопряжениями на $T_\chi = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Если $N_\chi = G$, то $\mathrm{Ker}\,\gamma = Z(G) = \{1\}$. Так как $T_\chi \cap Z(G) = \emptyset$, то T_χ разбивается на две γ-орбиты длины 2, либо γ транзитивно. В первом случае $\exp G = 2$ и, следовательно, G абелева. Таким образом, γ транзитивно, откуда следует, что $|G|$ делится на 4. Пусть $H < G$, $|H| = 4$. Тогда $|H| = n_\chi$ и, так как H абелева, то $\chi_H \notin \mathrm{Irr}\,(H)$. Поэтому H χ — максимальна. Так как $N_\chi = G$, то в силу теоремы 1 $|G : H| = 2$. Поэтому $|G| = 8$ и, следовательно, $G \cong D_4$, либо $G \cong Q_8$. В обоих случаях $n_\chi = 6$. Таким образом, при $N_\chi = G$ группы с $n_\chi = 4$ не существуют. Если $N_\chi \neq G$, то, полагая $\chi_1 = \chi_{N_\chi}$, в силу леммы 6.1 будем иметь $\chi_1 \in \mathrm{Irr}\,(N_\chi)$, $N_{\chi_1} = N_\chi$, $n_{\chi_1} = n_\chi = 4$. В силу доказанного выше этот случай также невозможен. Таким образом, $K_4 = \emptyset$.

Пусть $n > 4$. Если n нечетно, то, очевидно, $D_n \in K_n$. Если $n = 2^k m$, где $k \geqq 1$ и m нечетно, то, как легко видеть, $H \times D_m \in K_n$, где H —любая группа порядка 2^k. Таким образом, $K_n \neq \emptyset$.

Оценка $n_\chi > \sqrt{|G|}$ может быть в некоторых случаях улучшена. Пусть $Sc(G)$ — цоколь группы G. Тогда $Sc(G) = Sc_z(G) \times Sc_N(G)$, где $Sc_z(G)$ — произведение всех минимальных нормальных делителей группы G, входящих в $Z(G)$, а $Sc_N(G)$ — произведение всех остальных минимальных нормальных делителей. Пусть $Sc_N(G) = F_1 \times \ldots \times F_k$, где F_i — минимальные нормальные делители группы G.

Предложение 6.5. *Если* $\operatorname{Ker} \chi = \{1\}$, *то* $n_\chi > |G|^{1-(1/k)}$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $k \geqq 2$. Если $f_i \in F_1^\#$, то очевидно $S_i = F_1 \times \ldots \times F_{i-1} \times F_{i+1} \times \ldots \times F_k \subseteqq C_G(f_i)$. Так как $F_i \cap Z(G) = \{1\}$ и, ввиду точности χ, $Z(\chi) = Z(G)$, то $f_i \in G \setminus Z(\chi)$. Отсюда вытекает, ввиду следствия предложения 6.1, что $|C_G(f_i)| \leqq n_\chi$. Следовательно, $|G|/|F_i| = |S_i| \leqq \leqq n_\chi$ $(i = 1, \ldots, k)$. Перемножая эти неравенства, получаем $\dfrac{|G|^k}{|Sc_N(G)|} \leqq n_\chi^k$. Так как $|S_N(G) \leqq |G|$, то $n_\chi^k \geqq |G|^{k-1}$, откуда $n_\chi \geqq |G|^{1-(1/k)}$.

Предложение 6.6. *Пусть G разрешима и $\chi(1) = p_1^{\lambda_1} \ldots p_r^{\lambda_r}$ — каноническое разложение $\chi(1)$ на простые множители. Тогда* $n_\chi > |G|^{1-(1/r)}$.

Доказательство. Пусть $|G| = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $|G|$. Положим $m_i = \dfrac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Пользуясь теоремой Ф. Холла, для каждого $i \leqq r$ найдём подгруппу M_i порядка m_i. Если $m_i > n_\chi$, то в силу следствия леммы 1.2 $\chi_{M_i} \in \operatorname{Irr}(M_i)$, откуда вытекает, что $\chi(1)$ делит m_i и, следовательно, $\chi(1)$ не делится на p_i — противоречие. Таким образом, $m_i \leqq n_\chi$ для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$. Перемножая эти неравенства, получим $|G|^r / p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \leqq n_\chi^r$, откуда, ввиду $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \leqq |G|$ вытекает, что $n_\chi \geqq |G|^{1-(1/r)}$. Нетрудно показать, что $n_\chi > |G|^{1-(1/r)}$.

Примечание. Если G нильпотентна, то $n_\chi \geqq \dfrac{1}{2}|G|$. Заметим, что в классе всех конечных групп отношение $\dfrac{n_\chi}{|G|}$ может принимать сколь угодно малые значения. Так, например, группа $G \cong PSL(2, q)$ при нечетном q обладает неприводимым характером χ степени q, для которого $\dfrac{n_\chi}{|G|} = \dfrac{2}{q}$. В связи с этим замечанием уместно отметить доказанное Дж. Томпсоном неравенство $\dfrac{|T_\chi \cup U_\chi|}{|G|} \geqq \dfrac{1}{3}$.*)

В заключение, в качестве ещё одного приложения полученных выше результатов, мы рассмотрим вопрос о группах, обладающих неприводимым характером χ, для которого $n_\chi = p^\lambda$ (p-простой делитель порядка группы). Как показывают примеры, такие группы существуют (A_4, S_4, где $\chi(1) = 3$, $n_\chi = 8$; D_{p^λ} с $p \neq 2$: $\chi(1) = 2$, $n_\chi = p^\lambda$)·

---

*) Если характер χ рациональнозначен, то $|T_\chi \cup U_\chi| \geqq \dfrac{3}{4}|G|$.

Предложение 6.7. *Пусть* $|G|=p^\alpha m$, $(m,p)=1$, $n_\chi=p^\lambda$. *Тогда* $\lambda\geqq\alpha$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$. Допустим, что $\lambda<\alpha$. Если $P\in\operatorname{Syl}_p(G)$, то $|P|=p^\alpha>p^\lambda=n_\chi$. Поэтому в силу следствия леммы 1.2 $\theta=\chi_P\in\operatorname{Irr}(P)$. В силу теоремы Блихфельдта характер θ индуцируется из некоторой максимальной подгруппы M группы P. Так как $M\lhd P$, то $P\setminus M\subseteq T_\theta\subseteq T_\chi$. Поэтому $p^\lambda=n_\chi\geqq|P\setminus M|=p^{\alpha-1}(p-1)\geqq p^\lambda(p-1)=n_\chi(p-1)$. Отсюда вытекает, что $p=2$ и $\lambda=\alpha-1$. Следовательно, $|M|=|P\setminus M|=2^{\alpha-1}=n_\chi$. Так как $P\setminus M\subseteq T_\chi$, то $P\setminus M=T_\chi$, откуда следует, что $M\cap T_\chi=\emptyset$. Поэтому $\chi_M\notin\operatorname{Irr}(M)$. Итак, M χ-максимальная подгруппа группы G. Так как $\chi_p\in\operatorname{Irr}(P)$ и $p=2$, то $\chi(1)=2^\beta$, $\beta\leqq\alpha$. С другой стороны, в силу леммы 6.3 $(\chi(1),|G:N_\chi|)=1$. Поэтому $|G:N_\chi|$ нечетно. Так как по лемме 6.2 $|G:N_\chi|$ делит n_χ, то $|G:N_\chi|=1$, т. е. $N_\chi=G$. Отсюда следует, в силу теоремы 1, что $|G:M|=2$, т. е. $|G|=2|M|=2\cdot 2^{\alpha-1}=2^\alpha$. Так как $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$ и G неабелева и разрешима, то в силу теоремы 2 $G/Z(G)\cong D_k$, где k нечетно. Таким образом $|G|=2^\alpha$ делится на нечетное число $k>1$ — противоречие. Поэтому $\lambda\geqq\alpha$. Справедливость утверждения при $\operatorname{Ker}\chi\neq\{1\}$ доказывается посредством перехода к $G/\operatorname{Ker}\chi$.

Предложение 6.8. *Пусть* $|G|=p^\alpha m$, $m>1$, $(m,p)=1$, $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$, $N_\chi=G$, $n_\chi=p^\alpha$, $H\in\operatorname{Syl}_p(G)$. *Тогда* (i) *Условия* $p=2$ *и* $\chi_H\in\operatorname{Irr}(H)$ *равносильны;* (ii) *Если* $p\neq2$, *то* $G=A\times D$, *где* A — *циклическая р-группа,* $D\cong D_{p^\sigma}$, $1\leqq\sigma\leqq\alpha$.

Доказательство. Допустим, что $p=2$ и $\chi\notin\operatorname{Irr}(H)$. Так как $|H|=2^\alpha=n_\chi$, то H χ-максимальна. Так как $N_\chi=G$, то по теореме 1 $m=|G:H|=2$- противоречие. Таким образом, $p=2$ влечет $\chi_H\in\operatorname{Irr}(H)$. Пусть теперь $\chi_H\in\operatorname{Irr}(H)$ и $p\neq2$. Тогда $\chi(1)$ делит $|H|=p^\alpha$ и, следовательно, нечетно. С другой стороны, так как $n_\chi=p^\alpha$ нечетно, то по лемме 6.5 T_χ содержит инволюцию g. Легко видеть, что $\chi(g)\equiv\chi(1) \pmod 2$, откуда вытекает, ввиду $\chi(g)=0$, что $\chi(1)$ четно — противоречие. Таким образом, $\chi_H\in\operatorname{Irr}(H)$ влечет $p=2$.

Допустим, что $p\neq2$. Тогда в силу (i) $\chi_H\notin\operatorname{Irr}(H)$. Подгруппа H, как было отмечено выше, в этом случае χ-максимальна. Так как $N_\chi=G$, то по теореме 1 $m=|G:H|=2$ и $G\setminus H=T_\chi$. Так как $|G|=2p^\alpha$, то G разрешима и, ввиду $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$, применима теорема 2, в силу которой $G/Z(G)\cong D_k$ ($k>1$ и нечетно) и $H=Z(G)\times G'$, $|G'|=k$. Так как $|H|$ нечетно и $H\lhd G$, то $G=H\cdot L$, где $L<G$, $|L|=2$. Поэтому $G=A\times D$, где $A=Z(G)$ циклична, ввиду $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$; $D=G'\cdot L\cong D_k$, причем $k=p^\sigma$, $1\leqq\sigma\leqq\alpha$, так как $k=|G'|$ и $G'\leqq H$.

Предложение 6.9. *Пусть* $|G|=p^\alpha m$, $m>1$, $(m,p)=1$, $\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$, $N_\chi\neq G$, $n_\chi=p^\alpha$, $H\in\operatorname{Syl}_p(G)$, $D=\bigcap_{t\in G}H^t$. *Тогда* (i) D — *абелева р-группа;* (ii) $m=q^\beta$, *где* q — *простое число* $\neq p$, *причем* $q=2$, *если* $p\neq2$; (iii) $G/D\cong\Phi_m$, *где* Φ_m — *2-транзитивная подстановочная группа Фробениуса степени* m; *ядро Фробениуса группы* G/D *совпадает с* N_χ/D, *а дополнительный множитель — с* H/D; (iv) $N_\chi=D\cdot M$, *где* M — *элементарная абелева группа порядка* m; *при этом,* $N_\chi\setminus D=T_\chi$, $\chi(1)=m$.

Доказательство. Если $\chi_H\in\operatorname{Irr}(H)$, то $\chi(1)=p^\lambda$, $1\leqq\lambda\leqq\alpha$. Так как по лемме 6.3 $|G:N_\chi|$ делит $n_\chi=p^\alpha$, то $|G:N_\chi|=p^\nu$, $1\leqq\nu\leqq\alpha$. С другой стороны, по лемме 6.4 $(\chi(1),|G:N_\chi|)=1$. Поэтому $|G:N_\chi|=1$ — противоречие. Итак, $\chi_H\notin\operatorname{Irr}(H)$. Поэтому H χ — максимальна. Заметим, что $(|G:N_\chi H|,p)=1$, так как $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$. С другой стороны, $|G:N_\chi H|$ делит p^ν. Следовательно, $G=N_\chi H$. Пусть $H<K\leqq G$. Тогда в силу предложения 3.1 $G \setminus K \subset G \setminus H \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$. В силу леммы 1.2 отсюда следует, что $(\chi_K, \chi_K)_K = 1+|T_\chi \setminus K| \cdot |K|^{-1}$. Так как $|K|>|H|=n_\chi$, то в силу леммы 1.2 $\chi_K \in \mathrm{Irr}(K)$, т. е. $(\chi_K, \chi_K)_K=1$. Таким образом, $T_\chi \setminus K=\emptyset$, т. е. $K \supset T_\chi$, откуда $K \supseteqq N_\chi$. Так как $K \supset H$, то $K \supseteqq N_\chi H=G$. Таким образом, H — максимальная подгруппа группы G. Так как $(\chi(1), |G:N_\chi|)= =1$ и $|G:N_\chi|=p^\nu$, то $(\chi(1), p)=1$, откуда следует, что $\chi(1)$ делит m.

Пусть $\chi_D=e(\varphi_1+\ldots+\varphi_l)$, $\varphi_i \in \mathrm{Irr}\,(D)$ — клиффордовское разложение характера χ_D. Так как $\varphi_1(1)=\ldots=\varphi_l(1)$, то $\chi(1)=e\,\varphi(1)$, где $\varphi=\varphi_1$. Так как $\varphi \in \mathrm{Irr}\,(D)$, то $\varphi(1)$ — степень p, откуда следует, ввиду $(\chi(1), p)=1$, что $\varphi(1)=1$. Ввиду точности χ, отсюда вытекает, что подгруппа D абелева.

Из χ-максимальности H в силу предложения 3.1 следует, что $\chi_H=\psi_1+\psi_2$, где $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Irr}(H)$, $\psi_1 \neq \psi_2$. Так как $|H|=p^\alpha$, то $\psi_i(1)$ $(i=1, 2)$ — степени p. Если $\psi_i(1)>1$ $(i=1, 2)$, то $\chi(1)=\psi_1(1)+\psi_2(1)$ делится на p, что противоречит условию $(\chi(1), p)=1$. Таким образом, если $\psi_2(1)>1$, то $\psi_1(1)=1$. Если, например, $\psi_1(1)=1$, то полагая $\psi_2(1)=p^\tau$, получим $\chi(1)=1+p^\tau$.

Докажем теперь, что $N_G(H)=H$. Если $N_G(H) \supset H$, то, ввиду максимальности подгруппы H, будем иметь $N_G(H)=G$. Таким образом, $H \lhd G$ и, следовательно, $\psi_1(1)=\psi_2(1)$. Так как $|G:I_G(\psi_1)|=2$ и $I_G(\psi_1) \supseteqq H$, то $I_G(\psi_1)=H$, откуда следует, что $|G:H|=2$ и χ индуцируется из H. Ввиду $H \lhd G$ отсюда вытекает, что $G \setminus H \subseteqq T_\chi$. Но тогда $N_\chi=\langle T_\chi \rangle=G$ — противоречие. Таким образом, $N_G(H)=H$. Далее мы почти дословно (с некоторыми упрощениями) повторяем доказательство теоремы 1. Как и в § 4, ввиду χ-максимальности H, имеем $G \setminus D \subseteqq T_\chi \cup U_\chi$, откуда $D \supseteqq Z(G)$ (так как $\mathrm{Ker}\,\chi=\{1\}$, то $Z(\chi)= =Z(G)$). Докажем, что $Z(G) \subset D$. Допустим, что $Z(G)=D$. Тогда, как и в § 4, $G \setminus D=T_\chi \cup U_\chi$, причем $U_\chi \neq \emptyset$, ввиду $\emptyset \neq H \setminus D \subseteqq U_\chi$. Полагая $\mathfrak{G}=G/D$, через A и B обозначим образы T_χ и U_χ при естественном гомоморфизме $x \mapsto \bar{x}$ G на $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ несвязна с нормальным C — разбиением $\{A, B\}$. Как и в § 4, A оказывается классом сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$; при этом, существует такое $q \in \pi(\mathfrak{G})$, что A — множество всех нетривиальных q-элементов, B — множество всех нетривиальных q'-элементов группы $\mathfrak{G}$. Силовские q-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ оказываются элементарными абелевыми CC-подгруппами и $\hat{A}$ — их объединение. Доказывается, что $\mathfrak{H}=H/D$ — q'-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и что $\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Syl}_q(\mathfrak{G})$. В частности, $|\mathfrak{G}|=p^\eta q^\beta$, где $p^\eta=|\mathfrak{H}|$ и $q^\beta=|\mathfrak{Q}|$. Заметим, что $q^\beta=|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|=|G:H|=m$, так что $|G|=p^\alpha q^\beta$. Всё это показывает, что группа G разрешима. Далее, из $\bigcap_{t \in G} H^t=D$ следует, что $\bigcap_{\bar{t} \in \mathfrak{G}} \mathfrak{H}^{\bar{t}}=\{\bar{1}\}$. Пусть $\{\bar{1}\} \neq \mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{L} \subsetneqq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{H}=\mathfrak{G}$, откуда $\mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}$ — q'-группа. Поэтому $\mathfrak{L}$ содержит все силовские q-подгруппы группы $\mathfrak{G}$, откуда следует, что $\mathfrak{L} \supseteqq \hat{A}$. Поэтому $\mathfrak{L} \supseteqq \langle A \rangle= =\langle \overline{T}_\chi \rangle=\overline{\langle T_\chi \rangle}=\overline{N}_\chi=N_\chi/D=\mathfrak{N}$.*) Это показывает, что $\mathfrak{N}=N_\chi/D$ — минимальный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ разрешима, то $\mathfrak{N}$-элементарная абелева группа. Так как $\mathfrak{N} \supset A$ и A состоит из q-элементов, то $\mathfrak{N}$-элементарная абелева q-группа. Так как D — p-группа и $N_\chi/D=\mathfrak{N}$ — q-группа, то, ввиду $p \neq q$, $D \in \mathrm{Syl}_p(N_\chi)$. В силу теоремы Шура—Цассенхауза $N_\chi=D\cdot M$, где $M \cong \mathfrak{N}$ — абелева. Так как $D=Z(G)$, то $N_\chi=D \times M$ абелева, что противоре-

*) Как легко видеть, $D=Z(D) \cap N_\chi$.

чит утверждению (i) леммы 6.1. Итак, доказано, что $Z(G)\subset D$. Возвращаясь к разложению $\chi_D=e(\varphi_1+\ldots+\varphi_l)$, мы, как и в § 4, докажем, что $l>1$ и затем, пользуясь тем, что χ индуцируется из $K=I_G(\varphi)$ докажем, что $|K|=|H|$. Таким образом, $K\in \mathrm{Syl}_p(G)$. Так как K и H сопряжены, то χ индуцируется из H и в дальнейшем можно вместо K иметь дело с H. Как и в § 4, доказываем, что $G\setminus H^G=\mathrm{T}_\chi$. Докажем теперь, не прибегая к проективным представлениям, что $e=1$. Для этого снова рассмотрим разложение $\chi_H=\psi_1+\psi_2$. Так как χ индуцируется из H, то $\chi=\psi_i^G$, где $i=1$ или $i=2$. Так как $\chi(1)=|G:H|\psi_i(1)$ и $\psi_i(1)$ — степень p, то, ввиду $(\chi(1),p)=1$ будем иметь $\psi_i(1)=1$. Следовательно, $\chi(1)=|G:H|$. С другой стороны, $\chi(1)=e\ \psi(1)=el=e|G:H|$, ибо $l=|G:H|$. Поэтому $e=1$. Как и в § 4, теперь получаем соотношение $|G:H|=$ $=1+|H:D|$. Далее, рассматривая действие группы $\mathfrak{G}=G/D$ на множестве $\Omega=\mathrm{Cl}\,(H)$, как и в § 4 доказываем, что $\mathfrak{G}$-группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка $|G:H|$ и с дополнительным множителем $\mathfrak{H}=H/D$. Так как $G/H^G=T_\chi$ и, согласно теории групп Фробениуса, $\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{H}^{\mathfrak{G}}=\mathfrak{N}^\#$, то, обозначив через $\overline{M}$ образ подмножества $M\subseteq G$ при естественном гомоморфизме группы G на $\mathfrak{G}$, получим $\overline{T}_\chi=\overline{G}\setminus\overline{H}^G=\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{H}^{\mathfrak{G}}=\mathfrak{N}^\#$, откуда $\overline{N}_\chi=\langle\overline{T}_\chi\rangle=\mathfrak{N}$. Так как $D\cap T_\chi=\emptyset$ и $D\lhd G$, то $D\subset N_\chi$*). Поэтому $\mathfrak{N}=\overline{N}_\chi=N_\chi/D$. Далее, так как $|\mathfrak{H}|=|H:D|=$ $=|G:H|-1=|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|-1=|\mathfrak{N}|-1$, то $\mathfrak{G}\cong 2$ — транзитивной группе Фробениуса с ядром порядка $|\mathfrak{N}|=|G:H|$. Ядро $\mathfrak{N}$ группы Фробениуса $\mathfrak{G}$ является поэтому минимальным нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$; вместе с тем, $\mathfrak{N}$ является, как известно, элементарной абелевой q-группой (q — простое число). Полагая $|\mathfrak{N}|=q^\beta$, получим $q^\beta=|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|=|G:H|=m$. Итак, $|G|=p^\alpha m=p^\alpha q^\beta$; в частности, G разрешима. Далее, так как D — p-подгруппа и $N_\chi/D=\mathfrak{N}$ — q-группа, то $D\in\mathrm{Syl}_p(N_\chi)$. В силу теоремы Шура—Цассенхауза $N_\chi=D\cdot M$, где $M<N_\chi$, $M\cong\mathfrak{N}$-элементарная абелева группа порядка $m=q^\beta$. Наконец, так как $D\cap T_\chi=\emptyset$, то $T_\chi\subseteq N_\chi\setminus D$. Замечая, что $|N_\chi\setminus D|=|N_\chi|-|D|=|D|(|\mathfrak{N}|-1)=|D|\cdot|\mathfrak{H}|=$ $=|H|=n_\chi=|T_\chi|$, получаем $N_\chi\setminus D=T_\chi$. В заключение, заметим, что, ввиду соотношения $|\mathfrak{H}|=1+|\mathfrak{N}|$, числа q и p имеют различные четности. Таким образом, все утверждения предложения доказаны.

Следствие. *Если* $|G|=p^\alpha m,\ (m,p)=1$ *и* $n_\chi=p$, *то* $p\neq 2$ *и* $G\cong D_p$.

Доказательство. Всилу леммы 6.1 $|Z(\chi)|$ делит p и $\dfrac{p}{|Z(\chi)|}\geqq\chi(1)^2-1$. Отсюда следует, что $Z(\chi)=\{1\}$, а потому и $\mathrm{Ker}\,\chi=\{1\}$. Далее, из леммы 6.3 вытекает, что $N_\chi=G$. В силу предложения 6.7 $\alpha=1$. Если $H\in\mathrm{Syl}_p(G)$, то $|H|=p$ и, следовательно, $\chi_H\notin\mathrm{Irr}\,(H)$. Из предложения 6.8 поэтому вытекает, что $p\neq 2$ и $G\cong D_p$, ибо, ввиду $Z(G)=Z(\chi)=\{1\}$, $A=\{1\}$*).

Примечание. Объединяя предложения 6.8 и 6.9, приходим к следующему выводу. Пусть $|G|=p^\alpha m,\ m>1,\ (m,p)=1,\ n_\chi=p^\alpha$. Тогда, за исключением того случая, когда ограничение χ на силовскую p-подгруппу группы неприводимо, группа G разрешима и $|G|=p^\alpha q^\beta$, где q — простое число $\neq p$, причем p и q — различной четности. Все группы вида $A\times D$, где A циклическая p-группа $p\neq 2$

*) Можно и непосредственно применить теоремы 1 и 2. Существует и более элементарное доказательство, использующее неравенство (20).

и $D \cong D_{p^\sigma}$ удовлетворяют условиям предложения 6.8. Примером группы, удовлетворяющей условиям теоремы 6.9 является S_4: она обладает двумя точными неприводимыми характерами χ_i $(i=1, 2)$ степени 3, каждый из которых имеет 8 нулей; при этом, $N_{\chi_i} = A_4$ и силовские 2-подгруппы χ_i — максимальны, а $D = V_4$.

Литература

[1] W. Burnside, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics. Proc. Lond. Math. Soc. 2. 1 (1904), 112—116.

[2] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.

[3] D. S. Passman, Permutation Groups. New York—Amsterdam, 1968.

[4] Z. Arad, D. Chillag, On finite groups with conditions on the centralizers of p-elements. J. Algebra, 51, № 1 (1978), 164—172.

[5] А. И. Вейцблит, О нулях неприводимых комплексных характеров конечных групп. Депонирована в ВИНИТИ 12 дек. 1978 г. № 3767—78 Деп.

[6] Э. М. Жмудь, О понятии «связности» конечной группы. Publ. Math. (Debrecen), **29**, fasc. 1—2 (1982), 177—189.

[7] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров. Успехи математических наук **32** (1977), 223—224.

[8] Э. М. Жмудь, Об ограничении групповых характеров на субнормальные подгруппы. Сборник «Вопросы теории групп и гомологической алгебры» Вып. 4, Ярославль, 1983.

[9] А. И. Вейцблит, Э. М. Жмудь, Обобщенные группы Цассенхауза. Publ. Math. (Debrecen), **29**, fasc. 1—2 (1982), 201—217.

[10] М. Холл, Теория групп. Москва, 1962.

[11] P. X. Gallagher, Zeros of characters of finite groups, J. Algebra 4.

[12] Г. Кокстер, У. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва, 1980.

(Поступило 4. VII. 1984 г.)