Vervollständigung der Arbeit „Characterization of generalized q-additive functions“ [1)]

Von JÁNOS FEHÉR

1.

Es bezeichnen $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{C}$ die Menge der positiven, der nichtnegativen ganzen Zahlen bzw. der komplexen Zahlen. Für $S\subset\mathbf{N}$ sei $\bar{S}=S\cup\{0\}$. Falls $S(\subset\mathbf{N}_0)$ endlich ist, bezeichnet $|S|$ die Anzahl der Elemente von S.

Definition 1. Es seien R_i $(i=0, 1, \dots)$ endliche aber nicht leere Untermengen von $\mathbf{N}$. Das Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ wird *R-System* genannt, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:
(a) das kleinste Element von R_i ist kleiner als das kleinste Element von R_j $(0\leqq i<j)$,
(b) jede positive ganze Zahl n kann eindeutig in der Form

$$n=r_{i_1}+\dots+r_{i_s}\quad (r_{i_j}\in R_{i_j}) \tag{1.1}$$

aufgeschrieben werden, wobei auch der Fall $s=1$ zugelassen ist.[2)]

Definition 2. Die Funktion $f\colon \mathbf{N}_0\to\mathbf{C}$ wird *(bezüglich eines gegebenen R-Systems) R-additiv* genannt, falls $f(0)=0$ und $f(n)=f(r_{i_1})+\dots+f(r_{i_s})$ gelten, wobei n der Form (1.1) ist.

Es sei $q>1$ eine gegebene natürliche Zahl und

$$R_i=q^i\{1, \dots, q-1\}=\{q^i m|m=1, \dots, q-1\}\quad (i=0, 1, \dots).$$

Dann ist $\{R_0, R_1, \dots\}$ das Zahlensystem von der Basis q. Die additive Funktionen, bezüglich des Zahlensystems von der Basis q, heißen q-additiv. Der Begriff der q-Additivität stammt von A. O. GELFOND [6]. Die R-Additivität wurde als eine Verallgemeinerung der q-Additivität in [3] eingeführt.

Die Funktionen von der Form $f(n)=cn$, wobei c eine komplexe Konstante ist, sind — bezüglich jedes R-Systems — R-additiv und sehr regelmäßig. Im Bereich der R-additiven Funktionen spielen sie dieselbe Rolle, was die Funktionen $c\cdot\log n$

---

1) In der Arbeit [5] wurde der Hauptsatz dieser Arbeit bei der Bedingung der Monotonität von dem vorliegenden R-System bewiesen.

2) Bei N. G. DE BRUIJN [1] wurde das Mengensystem $\{R_0, R_1, \dots\}$ ohne die Bedingung der Endlichkeit von R_i Zahlensystem genannt. In dieser Arbeit wird die Endlichkeit der Mengen R_i fest ausgenützt, und deshalb ist die unterscheidende Benennung „R-System“ begründet.

im Bereich der additiven Funktionen spielen. Es sei c eine ganze Zahl. Dann ist die Funktion $f(n)=cn$ R-additiv, ganzwertig und es gilt: $n|f(n)$ $(\forall n\in\mathbf{N})$. Der Hauptzweck dieser Arbeit ist zu zeigen, daß diese Eigenschaft eine ganzwertige R-additive Funktion f nur im Falle $f(n)=cn$ besitzen kann.

2.

Es sei für das R-System $\{R_0, R_1, \ldots\}$ $R=\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$. I. Kátai und der Autor haben in [2] den folgenden Satz bewiesen:

Satz A. *Es seien g und f ganzwertige R-additive Funktionen. Setzen wir voraus, daß eine Primzahl p mit den folgenden Eigenschaften existiert:*
(a) *es genügt unendlich(viel)mal* $p\nmid g(r)$ $(r\in R)$,
(b) $p^a|g(n)\Rightarrow p^a|f(n)$ $(\forall n\in\mathbf{N})$.
Dann ist $f(n)=c\cdot g(n)$, wobei c eine passende rationale Konstante ist.[3])

Ein Spezialfall des Satzes A $\big(g(n)=n\big)$ ist

Satz B. *Setzen wir voraus, daß es zu dem vorliegenden R-System eine Primzahl p mit der folgenden Eigenschaft existiert: es genügt unendlich(viel)mal $p\nmid r$ $(r\in R)$. Dann ist die Funktion $f=0$ die einzige ganzwertige R-additive Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

$$f(1)=0 \quad \text{und} \quad n|f(n) \quad (\forall n\in\mathbf{N}). \tag{2.1}$$

Die Bedingungen des Satzes A sind nicht mit der Bedingung $g(n)|f(n)$ $(\forall n\in\mathbf{N})$ vertauschbar. Es gilt nämlich (vgl. [2]):

Satz C. *Zu jedem R-System können die ganzwertigen R-additiven Funktionen g, f so gegeben werden, daß die Folgenden gelten sollen:*

(a) $g(n)\neq 0$ $(\forall n\in\mathbf{N})$,

(b) $g(n)|f(n)$ $(\forall n\in\mathbf{N})$,

(c) $\dfrac{f(n)}{g(n)}\neq$ *konstant.*

3.

Man kann leicht ein die Bedingung des Satzes B nicht erfüllendes R-System konstruieren. Deshalb hat der folgende Hauptsatz ein besonderes Interesse.

Hauptsatz. *Bei einem beliebig gegebenen R-System ist $f=0$ die einzige ganzwertige R-additive Funktion, die die Bedingungen (2.1) erfüllt.*

[3]) In [2] wurden Satz A und Satz C für q-additiven Funktionen bewiesen. Mit denselben Methoden kann man diese allgemeineren Sätze beweisen.

Folgerung 1. *Es sei h eine ganzwertige R-additive Funktion. Wenn* $n|h(n)$ $(\forall n\in \mathbf{N})$ *gilt, dann ist* $h(n)=cn$, *wobei c eine ganze Konstante ist.*

Bei einem R-System es bezeichne T_{i_0} die Menge der Zahlen n, für die in (1.1) $i_0 \leqq i_1 < \ldots < i_s$ ist.

Folgerung 2. *Es sei f eine ganzwertige R-additive Funktion und i_0 ein gegebener Index. Wenn* $n|f(n)$ $(\forall n\in T_{i_0})$ *gilt, dann ist* $f(n)=cn$ $(\forall n\in T_{i_0})$, *wobei c eine ganze Konstante ist.*

Die Folgerungen 1—2. sind bei verschiedenen Verwendungen von besonderem Interesse (vgl. [4]).

Eine Permutation g von $\mathbf{N}_0$ wird „R-additive Permutation" genannt, falls g gleichzeitig auch R-additiv ist.

Folgerung 3. *Es sei f eine ganzwertige R-additive Funktion, g eine R-additive Permutation und i_0 ein gegebener Index. Wenn* $g(n)|f(n)$ $(\forall n\in T_{i_0})$ *gilt, so ist* $f(n)= =c\cdot g(n)$ $(\forall n\in T_{i_0})$, *wobei c eine passende ganze Konstante ist.*

Die Folgerung 3 zeigt, daß $g(n)$ im Satz C keine R-additive Permutation sein kann.

4.

Wir lassen einige Begriffe, Bezeichnungen und Hilfssätze vorausgehen.

Definition 3. Das R-System $\{R_0, R_1, \ldots\}$ wird *monoton* genannt, falls jedes Element von R_i kleiner als das kleinste Element von R_j $(0\leqq i<j)$ ist.

Hilfssatz 1. *Das Mengensystem* $\{R_0, R_1, \ldots\}$ *ist genau dann ein monotones R-System, wenn*

$$\begin{cases} R_i = d_i\{1, \ldots, k_i-1\} \quad (i=0,1,\ldots), \quad \textit{wobei} \\ d_0 = 1, d_i = k_0\cdot \ldots \cdot k_{i-1} \quad (i=1,2,\ldots) \quad \textit{sind.}^{4)} \end{cases} \tag{4.1}$$

(Den Notwendigkeitsbeweis kann der Leser leicht durchführen. Bekanntlich ist die Bedingung auch hinreichend.)

Es sei $\{R_0, R_1, \ldots\}$ ein R-System und I_s eine endliche aber nicht leere Untermenge von $\mathbf{N}_0$. Dann ist

$$\sum_{i\in I_s} * \bar{R}_i := \Big\{\sum_{i\in I_s} r_i \,|\, r_i\in \bar{R}_i\Big\}.$$

Definition 4. Es seien I_s $(s=0, 1, \ldots)$ endliche aber nicht leere und paarweise gliederfremde Untermengen von $\mathbf{N}_0$. Das Mengensystem $\{I_0, I_1, \ldots\}$ wird *I-System* genannt, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $\bigcup_{s=0}^{\infty} I_s = \mathbf{N}_0$,

(b) das kleinste Element von I_s ist kleiner als das kleinste Element von I_t $(0\leqq s<t)$.

---

[4]) Bei N. G. DE BRUIJN wurden die monotonen R-Systeme *„britisches Zahlensystem"* (British Number System) genannt.

Es seien $\{R_0', R_1', \ldots\}$, $\{I_0, I_1, \ldots\}$ ein R'-System bzw. ein I-System. Offenbar ist das durch die Relationen

$$R_s = (\sum_{i\in I_s} {}^* \bar{R}_i')\setminus\{0\} \quad (s = 0, 1, \ldots) \tag{4.2}$$

definierte Mengensystem $\{R_0, R_1, \ldots\}$ ein R-System.

Definition 5. Es seien $\{R_0, R_1, \ldots\}$, $\{R_0', R_1', \ldots\}$ zwei R-Systeme und $\{I_0, I_1, \ldots\}$ ein I-System. Man sagt, daß $\{R', I\}$ eine *Zerlegung* des R-Systems $\{R_0, R_1, \ldots\}$ ist, falls (4.2) erfüllt ist. Diese Zerlegung heißt *monoton,* falls das R'-System monoton bzw. trivial, falls $I_s=\{s\}$ $(s=0, 1, \ldots)$ ist. Das R-System wird *primitiv* genannt, wenn es keine nichttriviale Zerlegung besitzt. Die Zerlegung $\{R', I\}$ heißt *primitiv,* falls das R'-System primitiv ist.

Hilfssatz 2. *Jedes R-System hat eine monotone Zerlegung.*

Beweis. Siehe N. G. De Bruijn [1].

Hilfssatz 3. *Das R-System* $\{R_0, R_1, \ldots\}$ *ist genau dann primitiv, wenn* $|\bar{R}_i| = $ *Primzahl* $(i=0, 1, \ldots)$ *ist.*

Beweis. 1. Nehmen wir im Gegenteil an, daß $|\bar{R}_i|=$ Primzahl $(i=0, 1, \ldots)$, $\{R', I\}$ eine Zerlegung des R-Systems und mindestens einmal $|I_s|\geqq 2$ sind. Dann ist für einen solchen Index s $|\bar{R}_s| = \prod_{i\in I_s} |\bar{R}_i'|$, was aber wegen $|\bar{R}_i'|\geqq 2$ unmöglich ist.

2. Nehmen wir umgekehrt an, daß das R-System primitiv ist. Denn laut des Hilfssatzes 2 R monoton ist, genügt es laut des Hilfssatzes 1 zu sehen, daß bei $a, b>1$ die Gleichung $\{0, 1, \ldots, ab-1\}=\{0, 1, \ldots, a-1\}\oplus a\{0, 1, \ldots, b-1\}$ gilt. (Dabei ist für $A, B\in \mathbf{N}_0$ $A\oplus B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$.) ∎

Aus den Obigen folgt unmittelbar

Hilfssatz 4. *Jedes R-System besitzt eine primitive Zerlegung.*

Es seien im R-System $\{R_0, R_1, \ldots\}$ $m=r_{t_1}+\ldots+r_{t_u}$ $(r_{t_i}\in R_{t_i})$ bzw. n von der lorm (1.1). m und n heißen (zu einander, bezüglich des vorliegenden R-Systems) R-fremd, falls $\{t_1, \ldots, t_u\}\cap\{i_1, \ldots, i_s\}=\emptyset$ ist. Falls n und m R-fremd und f R-additiv sind, gilt $f(n+m)=f(n)+f(m)$.

Beweis des Hauptsatzes. Es sei $\{R', I\}$ eine primitive Zerlegung des vorliegenden R-Systems, und nehmen wir an, daß die ganzwertige R-additive Funktion f den Bedingungen (2.1) entspricht.

Wenn es mindestens eine Primzahl p von der Eigenschaft $|\bar{R}_i'|\neq p$ $(i=0, 1, \ldots)$ existiert, so gilt wegen der Monotonität von R' $p\nmid d_i'$ $(i=0, 1, \ldots)$. (Für die Bedeutung von d_i' vgl. (4.1)!) So gilt also nach dem Hilfssatz 1 unendlich(viel)mal $p\nmid r$ $(r\in R')$. Weil $R'\subseteq R$ ist, folgt unsere Behauptung aus dem Satz B.

In Folgenden werden wir annehmen, daß es zu jeder Primzahl p ein Index i von der Eigenschaft $|\bar{R}_i'|=p$ existiert. Es bezeichne $i(p)$ für die Primzahl p den kleinsten Index von der Eigenschaft $|\bar{R}_{i(p)}'|=p$. Falls p und q verschiedene Primzahlen sind, ist also $i(p)\neq i(q)$.

Es sei $(1<)b\in\mathbf{N}$. Wir werden $f(b-1)=0$ annehmen, und $f(b)=0$ beweisen.

Der Index i_0 soll so fixiert werden, das die folgenden Eigenschaften erfüllt sein sollen:

(a) $1, \dots, b-1,\ b \in \bar{A}_{i_0} = \sum_{s=0}^{i_0-1} {}^* \bar{R}_s = \sum_{s \in I'} {}^* \bar{R}'_s$, wobei $I' = \bigcup_{j=0}^{i_0-1} I_j$ ist,

(b) $p \leqq \max(b, |f(b)|)$ (p Primzahl) $\Rightarrow i(p) \in I'$.

Es sei a_0 das größte Element von I'. Der Index $h(>i_0)$ soll so fixiert werden, daß das kleinste Element von $I_h > a_0$ sein soll. Es sei m das größte Element von I_h und p ein Primteiler von d'_m+1. Dann, wegen $p \nmid d'_m$, es gilt $i(p) \notin I'$, und deshalb folgt aus (b) $p>2$.

Fall 1. Falls $i(p)=m$ ist, so ist $2d'_m \in R'_m = d'_m\{1, \dots, p-1\}$. Es sei q ein Primteiler von $2d'_m+1$. Wegen $q \nmid d'_m$ gilt $i(q) \geqq m$. Da d'_m+1 und $2d'_m+1$ teilerfremd sind, ist $p \neq q$, und deshalb ist $i(q)>m$.

Fall 2. $i(p)>m$.

Es seien in dem Fall 1 $x=2d'_m$ und $P=q$ bzw. in dem Fall 2 $x=d'_m$ und $P=p$. Mit diesen Bezeichnungen gelten

$$P \mid x+1 \quad \text{und} \quad x \in R'_m \subset R_h. \tag{5.1}$$

Es soll $i(P)$ in der Menge I_t liegen. Dann gelten offenbar $t \geqq i_0$ und $t \neq h$. Wegen $P \nmid d'_{i(P)}$ bildet $R'_{i(P)} = d'_{i(P)}\{1, \dots, P-1\} (\subset R_t)$ ein reduziertes Restsystem (mod P). Wegen (b) es gilt $P > b-1 > 0$, und deshalb existiert eine Zahl y mit den folgenden Eigenschaften:

$$P \mid y+b-1 \quad \text{und} \quad y \in R'_{i(P)} \subset R_t. \tag{5.2}$$

Aus ihrer Auswahl folglich sind x und 1 bzw. y und $b-1$ R-fremd, und deshalb folgen aus (5.1), (5.2), (2.1) und $f(b-1)=0$

$$P \mid f(x+1) = f(x)+f(1) = f(x) \quad \text{und} \quad P \mid f(y+b-1) = f(y). \tag{5.3}$$

Aus (5.1) und (5.2) folgt $P \mid x+y+b$. Wegen $h \neq t$ und (b) sind x, y, b paarweise R-fremd, und deshalb folgt aus (2.1)

$$P \mid f(x+y+b) = f(x)+f(y)+f(b). \tag{5.4}$$

Aus (5.3) und (5.4) gewinnt man, daß P in $f(b)$ aufeht, was aber nur, falls $f(b)=0$ ist, gelten kann. Damit ist der Hauptsatz bewiesen. ∎

Beweis der Folgerung 1. Die Funktion $f(n)=h(n)-h(1)n$ ist eine ganzwertige, R-additive, den Bedingungen (2.1) entsprechende Funktion, und deshalb ist die Behauptung eine unmittelbare Folgerung des Hauptsatzes. ∎

Beweis der Folgerung 2. Es seien: $\{R', I\}$ eine monotone Zerlegung des vorliegenden R-Systems $\{R_0, R_1, \dots\}$, $I' = \bigcup_{s=0}^{i_0-1} I_s$ und $a-1$ das größte Element von I'. Dann folgt aus $i \geqq a$ stets $i \in I'' = \bigcup_{s=i_0}^{\infty} I_s$. Für jedes $j \geqq i_0$ enthält I_j mindestens ein Element $\geqq a$. Lassen wir aus den Mengen $I'_{i_0}, I'_{i_0+1}, \dots$ ihre Elemente

$<a$ fallen, so erhalten wir die Mengen $I'_{i_0}, I'_{i_0+1}, \ldots$. Die Mengen $R_j^* = (\sum_{i \in I'_j}{}' * \bar{R}'_i) \setminus \{0\}$ $(j = i_0, i_0+1, \ldots)$ haben die folgenden Eigenschaften:

$$d'_a | r \quad (\forall r \in R_j^*, j = i_0, i_0+1, \ldots),$$

$$R_j^* \subset R_j \quad (j = i_0, i_0+1, \ldots).$$

Das durch die Relationen $R_k^{**} = (a'_a)^{-1} \cdot R_{i_0+k}^* = \{r/d'_a | r \in R_{i_0+k}^*\}$ $(k=0, 1, \ldots)$ definierte Mengensystem $\{R_0^{**}, R_1^{**}, \ldots\}$ ist ein R^{**}-System. Die Funktion $F(n) = f(d'_a n)$ ist eine ganzwertige, R^{**}-additive und die Bedingung $n | F(n)$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ erfüllende Funktion. Laut der Folgerung 1 ist also $F(n) = c_1 n$, wobei c_1 eine ganze Konstante ist. Wegen $d'_a | F(1)$ muß mit einem ganzen c $c_1 = c \cdot d'_a$ sein. Wir haben damit bewiesen, daß die Relation $f(r) = c \cdot r$ $(r \in R)$ unendlich(viel)mal gilt.

Sei nun $b \in T_{i_0}$ fixiert. Nach den Obigen kann man ein $N \in T_{i_0}$ so auswählen, daß b und R-fremd, $f(N) = c \cdot N$ und $b+N > |f(b) - c \cdot b|$ sein sollen. Dann gilt wegen $b+N \in T_{i_0}$ $b+N | f(b+N) = f(b) - cb + c(b+N)$, woraus $b+N | f(b) - c \cdot b$ folgt, was aber nur im Falle $f(b) = c \cdot b$ gelten kann. ∎

Beweis der Folgerung 3. Das vorliegende R-System soll $\{R_0, R_1, \ldots\}$ sein. Weil g eine R-additive Permutation ist, bilden die Mengen $H_i = g(R_i)$ $(i=0, 1, \ldots)$ bei einer passenden Indexzuordnung ein R'-System $\{R'_0, R'_1, \ldots\}$. Wir nehmen den Index i_1 so an, daß für jedes $i \geqq i_1$ aus $g^{-1}(R'_i) = R_j$ die Relation $j \geqq i_0$ folgen soll. (Dabei bezeichnet g^{-1} die Inversfunktion von g.) Dann ist mit $N = g(n)$ die Funktion $F(N) = f(g^{-1}(N))$ eine ganzwertige, R'-additive und die Bedingung $N | F(N)$ $(\forall N \in T'_{i_1})$ erfüllende Funktion. Laut der Folgerung 2 haben wir — wegen $g^{-1}(T'_{i_1}) \subset T'_{i_0}$ — erhalten, daß die Relation $f(r) = c \cdot g(r)$ $(r \in R)$ unendlich(viel)mal gilt.

Es sei nun b eine beliebige Zahl aus T_{i_0}. Wir können also $M \in T_{i_0}$ so auswählen, daß b und M R-fremd, $f(M) = c \cdot g(M)$ und $g(b+M) > |f(b) - c \cdot g(b)|$ sein sollen, deshalb folgt $f(b) = c \cdot g(b)$ wie oben. ∎

Bemerkung. Laut der Folgerung 2 können statt „Theorem 2" bzw. statt „Corollary 1" in [4] die Folgenden stehen:

Theorem 2. Let $F, g_1, \ldots, g_s$ *be integervalued R-additive funktions,* $0 < M_1 < < M_2 < \ldots < M_s$ *be fixed integers. Assume that the relation*

$$\sum_{i=1}^{s} g_i(n+M_i) \equiv F(n) \pmod{n}$$

holds for every positive integer n.

Then

$$\sum_{i=1}^{s} g_i(n+M_i) = F(n) + cn$$

identically, with a suitable integer c.

Corollary 1. Let f be an integervalued R-additive function, $M \geqq 0$ be a fixed integer. Assume that

$$f(n+M) \equiv f(M) \pmod{n}$$

is satisfied for every $n \in \mathbf{N}$.

Then $f(n) = cn$ for every $n \in \mathbf{N}_0$.

Hiermit möchte der Autor den Professoren ZOLTÁN DARÓCZY und IMRE KÁTAI für ihre Hilfe bei der Abfassung dieser Arbeit den besten Dank sagen.

Literatur

[1] N. G. DE BRUIJN, On number systems, *Niew. Arch. Wisk. (3)* **IV.** (1956), 15—17.
[2] J. FEHÉR and I. KÁTAI, Some remarks on q-additive and additive funktions, *Proc. of the Conf. in Number Theory held in Budapest* (1981).
[3] J. FEHÉR, On a generalization of q-additive functions, *Annales Univ. Budapest* (Im Druck).
[4] J. FEHÉR, Characterization of integervalued R-additive functions, *Publ. Math. (Debrecen)* (Im Druck).
[5] J. FEHÉR, Characterization of generalized q-additive functions, *Annales Univ. Budapest* (Im Druck).
[6] A. O. GELFOND, Sur les nombres, ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arithm.* **13** (1968), 259—265.

(Eingegangen am 8 Oktober 1984)