Von der Berührung zur Formung von Flächen[1)]

Von PETER PAUKOWITSCH (Wien)

1. Eine reguläre, zusammenhängende C^4-Fläche $\Phi\subset\mathbf{R}^3$ ist bekanntlich genau dann Teil einer Quadrik, falls Φ in jedem Punkt von einer Quadrik hyperoskuliert wird [7]. Diese Aussage habe ich auf reguläre, zusammenhängende C^4-Hyperflächen aus Quadriken des reellen projektiven n-Raums $\mathbf{P}^n$, $n\geqq 4$ sowie aus quadratischen Kegeln mit s-dimensionalem Spitzenraum in $\mathbf{P}^n$, $0\leqq s\leqq n-4$ verallgemeinert [11]. Weiter kann eine reguläre, zusammenhängende C^3-m-Fläche Φ aus einem m-dimensionalem Unterraum von $\mathbf{P}^n$, $1\leqq m\leqq n-1$ bzw. aus einer m-Sphäre in $\mathbf{R}^n$, $2\leqq m\leqq$ $\leqq n-1$ dadurch gekennzeichnet werden, daß zu jedem Punkt $P\in\Phi$ ein Φ oskulierender m-dimensionaler Unterraum bzw. eine Φ oskulierende m-Sphäre existiert ([5], 6.2.5, 6.3.5). Die lineare bzw. quadratische Struktur einer Fläche ist jedoch nicht notwendig für die Charakterisierbarkeit unter Benützung oskulierender oder hyperoskulierender Flächen, denn ich konnte zeigen [12], [13]: Eine reguläre, zusammenhängende Fläche $\Phi\subset\mathbf{R}^3$ liegt genau dann in einer Regelfläche bzw. in einer Gesimsfläche, insbesondere in einer Drehfläche, wenn Φ in jedem Punkt von einer Regelfläche bzw. Gesimsfläche, insbesondere von einer Drehfläche hyperoskuliert wird. Die vorliegende Note enthält zwei exemplarische Sätze, mit deren Hilfe differentialgeometrisch ausgezeichnete Flächenklassen durch eine Aussage der folgenden Bauart gekennzeichnet werden: *Wird eine reguläre, zusammenhängende, hinreichend oft differenzierbare Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einem Exemplar aus einer Flächenklasse von geeigneter Ordnung berührt, so ist Φ eine Fläche dieser Klasse.*

2. Der erste zentrale Satz stützt sich auf Flächenkurven. Es sei Φ eine reguläre C^r-Fläche, $r\geqq 3$ in $\mathbf{R}^3$. Eine Menge $\mathscr{C}$ von Flächenkurven aus Φ nennen wir i. f. ein *Kurvensystem,* falls gilt:

(K1) In allen Nichtwendepunkten der Kurven aus Φ genügen die Schmiegebenen einer vorgegebenen geometrischen Bedingung.

(K2) Zu jedem Linienelement (P, t) von Φ gibt es lokal genau eine t in P berührende Systemkurve[2)].

(K3) Ist P nicht Wendepunkt aller durch P laufenden Systemkurven, so existiert eine Flächentangente in P derart, daß die zugehörige Systemkurve in P einen Henkelpunkt aufweist. Ist P dagegen doch Wendepunkt aller Systemkurven

[1)] Über die Ergebnisse berichtete der Verfasser am 20. 12. 1983 im Rahmen des Mathematischen Kolloquiums an der TU München.

[2)] Die Urkurven in $\mathbf{R}^2$ des Systemkurven aus Φ sind daher Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Bauart $y''=f(x, y, y')$.

durch P, so existiert eine Flächentangente in P derart, daß sie die zugehörige Systemkurve in P hyperoskuliert.

(K4) Es gibt Flächen, die eine stetige Schar wendepunktfreier ebener Kurven tragen, deren Ebenen die gemäß (K1) gegebene geometrische Bedingung erfüllen.

Wir nennen eine in (K3) beschriebene Flächentangente eine *H-Tangente* bzw. die nach (K4) existierenden Flächen *Formflächen bezüglich der in* (K1) *genannten geometrischen Bedingung* (kurz *H-Tangente* bzw. *Formfläche*). Benötigt man zur analytischen Fassung der Bedingung (K1) das Flächenelement l-ter Ordnung, so bezeichnen wir das Kurvensystem $\mathscr{C}$ *abhängig vom Flächenelement l-ter Ordnung*[3]). Dann gilt

Satz 1. *Es sei Φ eine reguläre, zusammenhängende C^r-Fläche, die ein vom Flächenelement l-ter Ordnung abhängiges Kurvensystem trägt* ($2 \leqq l \leqq r-1$). *Existiert zu jedem Punkt $P \in \Phi$ eine Φ in P von* $(l+1)$*-ter Ordnung berührende Formfläche, so ist Φ eine Formfläche.*

Beweisskizze. Sind Φ_1, Φ_2 zwei reguläre C^r-Flächen, die ein vom Flächenelement l-ter Ordnung abhängiges Kurvensystem zur selben geometrischen Schmiegebenenbedingung (K1) tragen, und berühren[4]) einander Φ_1 und Φ_2 im gemeinsamen Punkt P von $(l+1)$-ter Ordnung, so erkennt man unter Benützung von Fn. 1, 2 und 3:

(a) Die Systemkurven auf Φ_1 und Φ_2 zu in P gemeinsamer Flächentangente hyperoskulieren einander in P.

(b) Die H-Tangenten von Φ_1 und Φ_2 stimmen in P überein.

(c) Existieren in P nicht nur H-Tangenten, so bestimmen lokal um P die H-Tangenten wegen $l \leqq r-1$ stetig differenzierbare Vektorfelder auf Φ_1 und Φ_2, und für diese gilt: Die Integralkurven auf Φ_1 und Φ_2 zu einer H-Tangente in P oskulieren einander in P.

Denken wir Φ überzogen mit der stetigen Schar $\mathfrak{S}$ der Integralkurven jener H-Tangenten, welche auch Tangenten der ebenen wendepunktfreien Systemkurven der Φ von $(l+1)$-ter Ordnung berührenden Formflächen sind. (Die ebenen Systemkurven der Formflächen sind natürlich auch Integralkurven.)

---

[3]) Trägt eine C^r-Fläche Φ ein vom Flächenelement l-ter Ordnung, $2 \leqq l \leqq r-1$ abhängiges Kurvensystem $\mathscr{C}$, so sind die H-Tangenten im Punkt $P \in \Phi$ Begriffsbildungen des Flächenelements l-ter Ordnung, was wie folgt einzusehen ist: Die Kurven aus $\mathscr{C}$ sind nach Fn. 1 aus C^{r-l+2}. Die Torsion τ, die geodätische Torsion $\tau^g(\dot{C}_f)$ sowie das orientierte Winkelmaß α der Schmiegebene gegen die Flächennormale längs einer Wendepunktfreien Systemkurve $c_f(I) \subset f(U) = \Phi$ sind durch $\tau^g(\dot{C}_f) = \tau + \frac{d\alpha}{dt} \|\dot{C}_f\|^{-1}$ mit $c_f = f \circ c$, $\dot{c}_f(t_0) := (c_f(t_0); \dot{c}_f(t_0)) \in T_{c(t_0)} f$, $t_0 \in I$, $c(t_0) \in U$ gekoppelt ([5], 7.1.2). Die Funktion $\frac{d\alpha}{dt}: I \to \mathbf{R}$ hängt in einem Henkelpunkt $c_f(0)$ daher nur von der geodätischen Torsion $\tau^g \circ \dot{c}_f(0)$ der Kurve, also nur von den ersten l Ableitungsordnungen des Flächenkurvenweges $c_f: I \to \mathbf{R}^3$ ab.

[4]) Die Berührung k-ter Ordnung zweier C^r-Flächen $\Phi_1, \Phi_2 \subset \mathbf{R}^3$ ($1 \leqq k \leqq r$) in einem gemeinsamen regulären Punkt P erklärt man über die Existenz von Parametrisierungen f_i: $U_i \subset \mathbf{R}^2 \to f_i(U_i) = \Phi_i$, $f_i(a_i) = P$, $a_i \in U_i$, $i = 1, 2$ derart, daß die Ableitungen fon f_1, f_2 an der Stelle a_1 bzw. a_2 bis Ordnung k übereinstimmen ([5], 4.3.1).

Aufgrund von (c) stimmt die Schmiegebene jeder Kurve aus $\mathfrak{S}$ stets mit der Schmiegebene der die Kurventangente berührenden, wegen (K2) lokal eindeutig bestimmten Systemkurve auf Φ überein, sodaß $\mathfrak{S}$ eine stetige Schar von Systemkurven auf Φ abgibt. Die Kurven aus $\mathfrak{S}$ sind wegen (a) eben und wendepunktfrei, Φ ist daher lokal (im Sinne der Identifizierungstopologie bezüglich einer Parametrisierung von Φ) formflächig. Differentiationsklasse und Zusammenhang lassen Φ global als Formfläche erkennen. □

3. Anwendungen von Satz 1 auf differentialgeometrisch ausgezeichnete Flächenklassen.

(I) Die *Geodätischen* einer C^3-Fläche in $\mathbf{R}^3$ bestimmen ein vom Flächenelement zweiter Ordnung abhängiges Kurvensystem, die H-Tangenten fallen in die Krümmungstangenten ([5], 7.1.2), die Gesimsflächen mit wendepunktfreien Profilkurven geben die Formflächen ab ([5], A 7.1.8, 9). Nach Satz 1 gilt daher: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer C^3-Gesimsfläche mit wendepunktfreien Profilkurven hyperoskuliert, so ist Φ eine Gesimsfläche mit wendepunktfreien Profilkurven*[5]).

(II) Die (von den Schmieglinien verschiedenen) *Pseudogeodätischen* einer C^3-Fläche in $\mathbf{R}^3$, also jene Flächenkurven, in deren Nichtwendepunkten die Schmiegebenen festes Winkelmaß α mit $0 \leqq \alpha < \pi/2$ gegen die Flächennormalen aufweisen, bilden ein vom Flächenelement zweiter Ordnung abhängiges Kurvensystem mit den Krümmungstangenten als H-Tangenten ([5], 7.1.2). Die Formflächen tragen eine stetige Schar ebener pseudogeodätischer Krümmungslinien[6]), sodaß Satz 1 ergibt:

Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer C^3-Fläche hyperoskuliert, welche eine stetige Schar von ebenen wendepunktfreien Pseudogeodätischen trägt, so weist Φ eine stetige Schar von ebenen wendepunktfreien Pseudogeodätischen auf.

Sind die ebenen Pseudogeodätischen der Formflächen insbesondere durchwegs kreisförmig, liegen also kanalflächige[7]) Formflächen vor, so existiert nach 2(a) in jedem Kurvenpunkt der ebenen Pseudogeodätischen aus Φ ein hyperoskulierender Kreis; diese Pseudogeodätischen sind daher kreisförmig, Φ also kanalflächig. Wir fassen zusammen: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche Φ in jedem Punkt von einer C^3-Kanalfläche hyperoskuliert, so ist Φ eine Kanalfläche.*

(III) Ist (P, t) ein Linienelement einer regulären C^5-Fläche Φ und t keine Schmiegtangente, so erfüllen die Schmiegkegelschnitte der ebenen Schnittkurven von Φ mit den von der Tangentialebene in P verschiedenen Ebenen durch t die Moutard-

[5]) Diese Aussage habe ich in [12], [13] nur für Flächen der Klasse C^4 bewiesen. Die Reduktion der Differentiationsvoraussetzungen ist darin begründet, daß die jetzige Beweisidee Integralkurven von Vektorfeldern auf der Ausgangsfläche benützt, a.a.O. jedoch Parameterisierungen zu gegebenen Richtungsfeldern herangezogen werden.

[6]) Mit zwei der folgenden drei Eigenschaften besitzt eine Flächenkurve auch die dritte ([5], 7.1.2): Ebene Kurve, Pseudogeodätische, Krümmungslinie.

[7]) Die von den Flächennormalen längs einer kreisförmigen Pseudogeodätischen gebildete torsale Regelfläche ist drehkegelförmig; trägt eine Fläche Φ eine stetige Schar solcher Kurven, so hüllt Φ eine stetige Sphärenschar ein, Φ ist also eine Kanalfläche.

quadrik von (P, t) ([3], Bd. 1, 78). Eine wendepunktfreie Kurve $k \subset \Phi$ heißt eine *Pangeodätische,* falls die Schmiegebene in jedem Punkt $P \in k$ bezüglich der zur Kurventangente t in P gehörenden Moutardquadrik polar liegt zu jenem Gratpunkt der Φ längs umschriebenen torsalen Regelfläche, welcher der zu t konjugierten Flächentangente angehört ([3], Bd. 2, 220, 221). Die Pangeodätischen einer Fläche bestimmen daher ein vom Flächenelement vierter Ordnung abhängiges Kurvensystem. Die Formflächen tragen eine stetige Schar ebener pangeodätischer Schattengrenzen[8]), und Anwendung von Satz 1 ergibt: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^5-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer C^5-Fläche mit einer stetigen Schar ebener wendepunktfreier Schattengrenzen von fünfter Ordnung berührt, so trägt Φ eine stetige Schar ebener wendepunktfreier Schattengrenzen*[9]).

Bei den folgenden Flächenklassen existieren mehrere geometrisch ausgezeichnete Kurvensysteme.

(IV) Die doppelten Kanalflächen sind genau die Dupinschen Zykliden; zweimalige Anwendung von (II) ergibt: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer Dupinschen Zyklide hyperoskuliert, so ist Φ Teil einer Dupinschen Zyklide.*

(V) Trägt eine (nichtsphärische) Kanalfläche neben den ebenen kreisförmigen Pseudogeodätischen noch eine Schar von ebenen Geodätischen, so ist Φ drehflächig[10]). Aus (I) und (II) folgt daher: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer Drehfläche mit wendepunktfreiem Meridian hyperoskuliert, so ist Φ Teil einer Drehfläche mit wendepunktfreiem Meridian* (vgl. Fn. 5).

(VI) Die Tori sind genau die Dupinschen Drehzykliden. Aus (IV) und (V) erhalten wir: *Besitzt eine reguläre, zusammenhängende C^3-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte einen hyperoskulierenden Torus, so ist Φ Teil eines Torus.*

(VII) Eine Rückungsfläche, also eine Schiebfläche mit ebenen Schiebkurven, besitzt ein konjugiertes Netz ebener Parallelschattengrenzen, zweimalige Anwendung von (III) läßt daher erkennen: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^5-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer Rückungsfläche mit wendepunktfreien. Schiebkurven von fünfter Ordnung berührt, so ist Φ eine Rückungsfläche mit wendepunktfreien Schiebkurven.*

---

[8]) Nach ([3], Bd. 2, 201) besitzt eine wendepunktfreie Flächenkurve mit zwei der folgenden drei Eigenschaften alle drei: Ebene Kurve, Pangeodätische, Schattengrenze.

[9]) Nach W. Blaschke gehört eine Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ einer Quadrik an, falls alle Parallelschattengrenzen eben sind ([2], § 45). Ich konnte zeigen [10]: Sind die einer Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ aus den Punkten einer Geraden g berührend umschriebenen Kegel durchwegs quadratisch, so ist Φ Teil einer Quadrik, falls ein von der Auswahl des Lichtpunktes unabhängiges, bezüglich aller dieser Lichtkegel polares Paar (Punkt P, Ebene ε), $P \notin g$, $g \subset \varepsilon$ existiert. Nach U. Simon [17] ist eine Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ nichtverschwindender Gauss-scher Krümmung notwendig Teil einer Sphäre, falls jede Parallelschattengrenze auch Pseudogeodätische ist. Dies verallgemeinert eine Frage von W. Blaschke nach jenen Flächen, deren Parallelschattengrenzen stets auch Geodätische sind ([2], 193); eine elegante Lösung diese Frage findet sich bei J. Blank ([1], 45).

[10]) Nach [4] ist eine Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ sphärisch, falls Φ zwei Scharen von krummen, ebenen Geodätischen trägt.

(VIII) Unter den Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen wurden in der Literatur insbesondere jene studiert, die zugleich Regelflächen[11]) sind. Aus 1 und (III) folgt: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^5-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer Regelfläche mit einer stetigen Schar ebener wendepunktfreier Schattengrenzen von fünfter Ordnung berührt, so ist Φ eine Regelfläche und trägt eine stetige Schar ebener wendepunktfreier Schattengrenzen.*

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß auch in der affinen und projektiven, aber auch in der relativen Differentialgeometrie für „Sphären", „Rotationsflächen" und „Gesimsflächen" (bezüglich dieser Begriffe vgl. [2], [3], [6] und [14]) Kennzeichnungen unter Benützung berührender Formflächen gelten. Auch bieten sich Verallgemeinerungen hinsichtlich der Dimension und Codimension an.

3. Der zweite zentrale Satz benützt geometrisch definierte Funktionen auf Flächen; eine Fläche Φ nennen wir *Formfläche bezüglich einer solchen Funktionen F* (kurz *Formfläche), falls F auf Φ konstant ist.*

Satz 2. *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^r-Fläche $\Phi \subset R^3$ in jedem ihrer Punkte von einer C^r-Formfläche zu einer gewählten, geometrisch definierten, vom Flächenelement l-ter Ordnung abhängigen Funktion F $(1 \leqq l \leqq r-1)$ von $(l+1)$-ter Ordnung berührt, so ist Φ eine Formfläche bezüglich F.*

Beweis. Ist $f\colon U \subset \mathbf{R}^2 \to f(U) = \Phi \subset \mathbf{R}^3$ bzw. $\bar{f}\colon \bar{U} \subset \mathbf{R}^2 \to \bar{f}(\bar{U}) = \bar{\Phi} \subset \mathbf{R}^3$ eine C^r-Parametrisierung von Φ bzw. der Φ im Punkt $P \in \Phi$ von $(l+1)$-ter Ordnung berührenden Formfläche $\bar{\Phi}$ mit $f(0) = \bar{f}(0) = P$, so gilt $(F \circ f)(0) \overset{(1)}{=} (F \circ \bar{f})(0)$ wegen $F \circ f$, $F \circ \bar{f} \in C^{r-1}$, $r-1 \geqq 1$, also $(F \circ f)_{,j}(0) = 0$, $j = 1, 2$ wegen $F \circ \bar{f} = \text{konst.}$ Zu jedem Punkt $P \in \Phi$ existiert daher eine Parametrisierung $f_P\colon U_P \to f_P(U_P) = \Phi$, $f_P(0) = P$ derart, daß die ersten partiellen Ableitungen der Koordinatendarstellung $F \circ f_P\colon U_P \to R$ bezüglich f_P in $0 \in U_P$ verschwinden. Die Kettenregel lehrt, daß dieses Verschwinden parameterinvariant, also $F \circ \tilde{f}\colon \tilde{U} \to \mathbf{R}$ wegen des Zusammenhanges von Φ konstant ist für jede C^r-Parametrisierung $\tilde{f}\colon \tilde{U} \subset \mathbf{R}^2 \to \tilde{f}(\tilde{U}) = \Phi$; damit ist auch $F\colon \Phi \to \mathbf{R}$ konstant, Φ also eine Formfläche bezüglich F. □

Natürlich bleibt Satz 2 richtig, wenn wir die Fläche Φ und die Formflächen durch eine Kurve k und „Formkurven" ersetzen.

4. Anwendungen von Satz 2 auf differentialgeometrisch ausgezeichnete Kurven- und Flächenklassen.

(I) *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^2-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte von einer C^2-Fläche konstanter Gauss-scher Krümmung, insbesondere einer C^2-Torse bzw. von einer C^2-Fläche konstanter mittlerer Krümmung, insbesondere einer C^2-Minimalfläche oskuliert, so ist Φ eine Fläche konstanter Gauss-scher Krümmung, insbesondere eine Torse bzw. eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung, insbesondere eine Minimalfläche.*

(II) Unmittelbar ersichtlich ist die Verallgemeinerung von Satz 2 zur affinen, projektiven und relativen Differentialgeometrie. Beispielhaft gilt: *Besitzt eine reguläre,*

[11]) Nach [8] ist eine C^6-Fläche dieser Art notwendig analytisch und trägt ein konjugiertes Netz ebener Schattengrenzen.

zusammenhängende C^4-Fläche Φ in jedem ihrer Punkte eine von vierter Ordnung berührende Affinminimalfläche, so ist Φ eine Affinminimalfläche[12]).

(III) *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^3- (bzw. C^4-) Kurve $k \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer C^3- (bzw. C^4-) Kurve konstanter Krümmung (bzw. konstanter Torsion) hyperoskuliert (bzw. von vierter Ordnung berührt, so besitzt k konstante Krümmung (bzw. konstante Torsion).* Ebenso gilt: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^4-Kurve $k \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer Schraublinie bzw. einer C^4-Böschungskurve*[13]) *von vierter Ordnung berührt, so ist k Teil einer Schraublinie bzw. eine Böschungskurve.*

Unmittelbar ersichtlich sind Verallgemeinerungen auf Kurven in $\mathbf{R}^n$, $n \geqq 4$. Weiter können wir die Kurven konstanter Krümmungen zu beliebigen Untergruppen der projektiven Gruppe des reellen projektiven n-Raums $\mathbf{P}^n$, $n \geqq 2$ unter Benützung berührender Formkurven kennzeichnen und geben dafür zwei Beispiele an: **(a)** *Besitzt eine ebene, reguläre, zusammenhängende C^4-Kurve k in jedem ihrer Punkte eine von vierter Ordnung berührende logarithmische Spirale, so ist k Teil einer logarithmischen Spirale;* **(b)** *Existiert zu jedem Punkt einer regulären, zusammenhängenden, henkelpunktfreien C^{n+2}-Kurve $k \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqq 2$ eine von $(n+2)$-ter Ordnung berührende Kurve verschwindender Krümmungen i. S. der Differentialgeometrie bezüglich der Gruppe volumstreuer Affinitäten, so ist k Teil einer solchen „Normkurve"*[14]). Verallgemeinerungen von Satz 2 hinsichtlich der Dimension und Codimension bieten sich an.

5. Durch Kopplung von Satz 1 und Satz 2 können wir weitere Flächenklassen kennzeichnen.

(I) Jene Minimalflächen in $\mathbf{R}^3$, die zugleich Affinminimalflächen sind, werden nach G. Thomsen benannt. Wir erhalten daher: *Eine reguläre, zusammenhängende C^4-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ ist genau dann Teil einer Thomsenfläche, falls Φ in jedem ihrer Punkte von einer Thomsenfläche von vierter Ordnung berührt wird.*

Insbesondere gehören die Enneperschen Minimalflächen zu den Thomsenflächen; deren Krümmungslinien sind durchwegs eben. Wir erhalten daher: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^4-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer Enneperschen Minimalfläche von vierter Ordnung berührt, so ist Φ Teil einer Enneperschen Minimalfläche.*

(II) Die Minimalflächen in $\mathbf{R}^3$, welche zugleich Rückungsflächen mit orthogonalen Profilebenenscharen sind, heißen Scherksche Minimalflächen. Daher gilt: *Wird eine reguläre, zusammenhängende C^5-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer Scherkschen Minimalfläche von fünfter Ordnung berührt, so ist Φ Teil einer Scherkschen Minimalfläche.*

Ebenso gestatten die Wendelfläche als Minimalregelfläche und das Katenoid als Minimaldrehfläche folgende Kennzeichnung: *Wird eine reguläre, zusammen-*

---

[12]) Nach [2] hängt die mittlere Affinkrümmung vom Flächenelement dritter Ordnung ab.

[13]) Eine (wende- und henkelpunktfreie) Böschungskurve in $\mathbf{R}^3$ ist durch konstante konische Krümmung $\frac{\varkappa}{\tau}$ gekennzeichnet.

[14]) Dieses Ergebnis habe ich in [9] mit anderen Methoden gewonnen.

hängende C^3-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte von einer Wendelfläche bzw. von einem Katenoid hyperoskuliert, so ist Φ Teil einer Wendelfläche bzw. eines Katenoids.

(III) Die Schraubflächen ordnen sich hier ebenfalls ein: *Besitzt eine reguläre, zusammenhängende C^4-Fläche $\Phi \subset \mathbf{R}^3$ in jedem ihrer Punkte eine von vierter Ordnung berührende Schraubfläche mit wendepunktfreiem Meridian, so ist Φ eine Schraubfläche mit wendepunktfreiem Meridian.* Das erkennen wir wie folgt: Die Bahnkurven der Φ von vierter Ordnung berührenden Schraubflächen sind pseudogeodätische Schraublinien, sodaß Φ nach 3(II) und 4(III) zunächst eine stetige Schar pseudogeodätischer Schraublinien trägt. Weiter sind die Orthogonaltrajektorien der Bahnschraublinien der Formflächen jeweils kongruente Geodätische[15]), und unter Benützung von Satz 2 sowie 3(I) „vererben" sich sowohl Kongruenz als auch geodätisches Verhalten bei Berührung vierter Ordnung der Formflächen und Φ auf die Orthogonaltrajektorien der pseudogeodätischen Schraublinien aus Φ; diese passen daher in eine einzige Schraubung, sodaß Φ eine Schraubfläche ist.

Abschließend erwähnen wir noch zwei Beispiele für nichtgleichdimensionale Partner: **(a)** *Berührt eine reguläre, zusammenhängende C^{l+1}-Kurve $k \subset \mathbf{R}^n$ den Schmieg-l-Raum stets von $(l+1)$-ter Ordnung, $1 \leqq l \leqq n-1$, so gehört k einem festen l-Raum an;* **(b)** *Berührt eine reguläre, zusammenhängende C^{n+1}-Kurve $k \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqq 2$ die Schmieghypersphäre stets von $(n+1)$-ter Ordnung, so liegt k in einer festen Hypersphäre* ([5], 3.3).

Literatur

[1] J. Blank, Über Schattengrenzen auf den Flächen. *Comm. de la Soc. Math. de Kharkoff. Ser. 4, t.* VIII (1934), 45—50.

[2] W. Blaschke, Affine Differentialgeometrie. *Neuauflage Chelsea Publ. Comp. N.Y.* (1967).

[3] G. Bol, Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1 und 2. *Vandenhoeck & Ruprecht* (1954).

[4] H. Brauner, Die Flächen, welche stetige Scharen ebener geodätischer Linien tragen. *Jahresber. DMV* **71** (1969), 160—166.

[5] H. Brauner, Differentialgeometrie. *Vieweg* (1981).

[6] D. Laugwitz, Über die Flächen mit mehreren Scharen von ebenen geodätischen Linien. *Arch. Math.* **8** (1957), 472—476.

[7] H. Maschke, On superosculating quadric surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. **3** (1902), 482—484.

[8] K. Meirer, Die windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen I. *Monatsh. Math.* **91** (1981), 39—71.

[9] P. Paukowitsch, Begleitfiguren und Invariantensystem minimaler Differentiationsordnung von Kurven im reellen n-dimensionalen affinen Raum. *Monatsh. Math.* **85** (1977), 137—148.

[10] P. Paukowitsch, Über Hyperflächen aus Quadriken und quadratischen Kegeln im reellen m-dimensionalen projektiven Raum. *Arch. Math.* **33** (1979), 105—112.

[11] P. Paukowitsch, Zum Satz von H. Maschke in reellen projektiven Räumen. *Arch. Math.* **33** (1979), 283—293.

[12] P. Paukowitsch, Eine Kennzeichnung der Regel- und Gesimsflächen. *Jour. Geom. Vol.* **15/2** (1980), 182—194.

[13] P. Paukowitsch, Punktale Charakterisierung spezieller Bewegflächen. *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszentrum Graz, Ber.* **165** (1981), 1—7.

[14] P. u. A. Schirokow, Affine Differentialgeometrie. *Teubner* (1962).

[15] U. Simon, Pseudogeodätische Linien auf Flächen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **22** (1971), 325—330.

(Eingegangen am 12. October 1984)

[15]) Diese Kurven gehen nämlich bei Verbiegung einer Schraubfläche in eine Drehfläche in deren Meridiane über.