Construction de plans en blocs de chaînettes

Par FRANCIS MAURIN (Paris)

Les plans en blocs de chaînettes *(handcuffed designs)* ont été introduits par HUNG et MENDELSOHN et étudiés par ces derniers ainsi que par J. F. LAWLESS [1]. A partir de plans construits sur les ensembles V_1 et V_2, nous construisons ici des plans construits sur $V_1 \cup V_2$. Le théorème qui fait le principal objet de cet article donne des conditions suffisantes pour que cela soit possible. Nous montrons enfin comment le théorème démontré paut être appliqué pour prouver l'existence de plans en blocs de chaînettes.

Définitions et notations

Soit V un ensemble tel que $\operatorname{Card} V = v$ et soit $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ un ensemble de blocs, dont certains peuvent être identiques, formés d'éléments *distincts* de V, tels que $\operatorname{Card} B_i = k < v$, $\forall i = 1, 2, \ldots, b$. Notons $B_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k})$ $a_{i_l} \neq a_{i_m}$, $\forall l \neq m$. A partir d'un tel bloc dans lequel les éléments sont ordonnés, nous pouvons former un ensemble non ordonné de $k-1$ 2-parties de V:

$$B_i^* = \big\{\{a_{i,1}, a_{i,2}\}, \ldots, \{a_{i,j}, a_{i,j+1}\}, \ldots, \{a_{i,k-1}, a_{i,k}\}\big\}.$$

Si chaque élément de V se trouve exactement dans r blocs B_i et si chaque 2-partie de V se trouve exactement dans λ ensembles de 2-parties tels que B_i^*, nous dirons que $\mathscr{B}$ est un plan en blocs de chaînettes de paramètres, v, k et λ que nous désignerons par $(v, k, \lambda)-HD$.

Il est alors facile de montrer que le nombre b de blocs et r sont: $b = \lambda \dfrac{v(v-1)}{2(k-1)}$ et $r = \lambda \dfrac{k(v-1)}{2(k-1)}$.

Theoreme

S'il existe un $(v_1, k, \lambda_1)-HD$ construit sur V_1 et un $(v_2, k, \lambda_2)-HD$ construit sur V_2 et si v_1 et v_2 sont premiers entre eux, alors il existe un $(v_1+v_2, k, \lambda)-HD$ construit sur $V_1 \cup V_2$ où λ est le P.P.C.M. *de λ_1, λ_2 et $2(k-1)$.*

Notons $V_1 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{v_1-1}\}$ et $V_2 = \{b_0, b_1, \ldots, b_{v_2-1}\}$. Nous démontrons ce théorème en 3 étapes. D'abord, nous montrons l'existence d'une suite (α_j)

($j=0, 1, \ldots, 2v_1v_2$) telle que les $\{\alpha_{j'}, \alpha_{j'+1}\}$ décrivent exactement 2 fois l'ensemble des 2-parties $\{x, y\}$ de $V_1 \cup V_2$ ($x \in V_1$ et $y \in V_2$) lorsque j' décrit $\{0, 1, \ldots, 2v_1v_2-1\}$. Ensuite, nous formons, à partir de la suite (α_j) un ensemble de blocs C_n ($n=0, 1, 2, \ldots, v_1v_2-1$) tels que chaque 2-partie $\{x, y\}$ de $V_1 \cup V_2$ ($x \in V_1$, $y \in V_2$) figure dans $2(k-1)$ ensembles C_n^*, chaque élément de V_1 figure dans $k\,v_2$ blocs C_n et chaque élément de V_2 figure dans $k\,v_1$ blocs C_n. Enfin, nous effectuons la construction d'un $(v_1+v_2, k, \lambda)-HD$ sur $V_1 \cup V_2$ à partir de l'ensemble de blocs C_n, du $(v_1, k, \lambda)-HD$ construit sur V_1 et du $(v_2, k, \lambda)-HD$ construit sur V_2.

1) Considérons la suite (α_j) ($j=0, 1, \ldots, 2v_1v_2$) définie par:

$$\text{si} \quad j = 2l \qquad \alpha_j = a_{l_1}$$

$$\text{si} \quad j = 2l+1 \quad \alpha_j = b_{l_2}$$

où l_1 et l_2 sont respectivement les restes de la division de l par v_1 et v_2.

Dans la suite (α_j), un b_i donné est immédiatement précédé une fois et une seule par un a_m donné. En effet, compte tenu de ce que v_1 et v_2 sont premiers entre eux, il existe un seul $l \in \{0, 1, \ldots, v_1v_2-1\}$ tel que $m=l \bmod (v_1)$ et $i=l \bmod (v_2)$ puisque l'équation $m+sv_1=i+tv_2$ admet alors une solution unique en (s, t) pour $s \leqq v_2-1$ et $t \leqq v_1-1$. De la même façon, dans la suite (α_j), un b_i donné est immédiatement suivi une fois et une seule par un a_m donné. Il en résulte que les $\{\alpha_{j'}, \alpha_{j'+1}\}$ décrivent exactement 2 fois l'ensemble des $\{x, y\}$ telles que $x \in V_1$ et $y \in V_2$ lorsque j' décrit $\{0, 1, \ldots, 2v_1v_2-1\}$.

2) Considérons la suite (β_h) ($h=0, 1, \ldots, 2v_1v_2+k-2$) définie par

$$\beta_h = \alpha_h \quad \text{pour} \quad h = 0, 1, \ldots, 2v_1v_2-1.$$

$$\beta_h = \alpha_u \quad \text{pour} \quad h = 2v_1v_2+u \quad \forall u = 0, 1, \ldots, k-2$$

Construisons, à partir de (β_h), l'ensemble de $2v_1v_2$ blocs:

$$C_n = (\beta_n, \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+k-1}) \quad n = 0, 1, \ldots, 2v_1v_2-1.$$

a) L'existence d'un $(v_1, k, \lambda)-HD$ et d'un $(v_2, k, \lambda_2)-HD$ entraîne que $\inf(v_1, v_2) \succ k$, donc que $k \leqq 2\inf(v_1, v_2)+1$ et donc qu'il n'y a pas de répétition d'un élément dans C_n.

b) La propriété de la suite (α_j) démontrée dans 1) entraîne que chaque 2-partie $\{x, y\}$ ($x \in V_1$, $y \in V_2$) se trouve dans $2(k-1)$ ensembles de 2-parties tels que C_n^*.

c) Un α_j donné figure dans k blocs C_n pour $j=0, 1, \ldots, 2v_1v_2-1$. Or parmi les α_j se trouve chaque a répété v_2 fois et chaque b répété v_1 fois. Il en résulte que chaque a figure dans kv_2 blocs C_n et chaque b figure dans kv_1 blocs C_n.

3) Soit A le $(v_1, k, \lambda)-HD$ constitué des blocs du $(v_1, k, \lambda_1)-HD$ répétés $\dfrac{\lambda}{\lambda_1}$ fois. Soit B le $(v_2, k, \lambda)-HD$ constitué des blocs du $(v_2, k, \lambda_2)-HD$ répété $\dfrac{\lambda}{\lambda_2}$ fois et soit C l'ensemble des blocs C_n répétés $\dfrac{\lambda}{2(k-1)}$ fois. Soient respectivement A_i, B_j et C_m les blocs des ensembles A, B et C et soit T l'ensemble des blocs de A, de B et de C.

a) En ce qui concerne la présence d'un élément donné de $V_1 \cup V_2$ dans les blocs de T, une lettre a se trouve dans $\frac{\lambda k(v_1-1)}{2(k-1)}$ blocs A_i, dans aucun bloc B_i et dans $\frac{\lambda}{2(k-1)} kv_2$ blocs C_n soit en tout dans $\lambda k \frac{(v_1+v_2-1)}{2(k-1)}$ blocs de T. De la même façon, une lettre b se trouve dans $\lambda k \frac{(v_1+v_2-1)}{2(k-1)}$ blocs de T.

b) En ce qui concerne les 2-parties de $V_1 \cup V_2$, on trouve λ fois les 2-parties $\{x_1, x_2\}$ de V_1 dans l'ensemble des A_i^*, λ fois les 2-parties $\{y_1, y_2\}$ de V_2 dans l'ensemble des B_j^* et, d'après le 2), λ fois les 2-parties $\{x, y\}$ de $V_1 \cup V_2$ telles que $x \in V_1$ et $y \in V_2$.

L'ensemble des

$$\lambda \frac{v_1(v_1-1)}{2(k-1)} + \lambda \frac{v_2(v_2-1)}{2(k-1)} + \frac{\lambda}{2(k-1)} 2v_1v_2 = \lambda \frac{(v_1+v_2)(v_1+v_2-1)}{2(k-1)}$$

blocs de T possède bien toutes les propriétés qui définissent un plan en blocs de chaînettes de paramètres v_1+v_2, k et λ.

Remarques

Le théorème que nous venons de démontrer peut servir à prouver l'existence de nombreuses familles de plans en blocs de chaînettes de paramètre $\lambda=2(k-1)$.

En effet, J. F. Lawless a montré (théorèmes 5 et 6 de (1)) qu'il existe un $(v, k, 2(k-1))-HD$ pour $v=p^i>k$, p premier. Nous en déduisons donc, en utilisant notre théorème, que:

$\forall A>0$, *il existe n entier* $>A$ *tel qu'un* $(n, k, 2(k-1))-HD$ *existe.*

De la même façon, si p et q sont deux nombres premiers différents, p^i+nq^j est premier avec q^j. D'après notre résultat, l'existence d'un $(p^i+nq^j, k, 2(k-1))-HD$ et d'un $(q^j, k, 2(k-1))-HD$ entraîne celle d'un $(p^i+(n+1)q^j, k, 2(k-1))-HD$. On en déduit qu'*il existe toujours un* $(p^i+nq^j, k, 2(k-1))-HD$, $\forall n$ *entier, si* $p^i>k$ *et* $q^j>k$.

En particulier, $\forall p \neq q$ premiers, i et j tels que $p^i>k$ et $q^j>k$, il existe un $(p^i(q^j+1), k, 2(k-1))-HD$.

Reference

[1] J. F. Lawless, On the construction of handcuffed designs, *J. of Combinatorial Theory (A)* **16** (1974), 76—86.

(Reçu le 24 octobre 1984)