Determination des repetitions d'une certaine suite recurrente linéaire

par MAURICE MIGNOTTE (Strasbourg)

Abstract. We consider the sequence $(u_n)_{n\geqq 0}$ defined by $u_0=u_1=0$, $u_2=1$ and $u_{n+3}=2u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n$. We determine all the values of c and n such that the equation $u_n=\pm c$ has at least two solutions in n.

Résumé. Nous considérons la suite $(u_n)_{n\geqq 0}$ définie par $u_0=u_1=0$, $u_2=1$ et $u_{n+3}=2u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n$. Nous déterminons toutes les valeurs de c et n telles que l'équation $u_n=\pm c$ ait au moins deux solutions en n.

I. *Introduction*

Etant donnés une suite $(u_n)_{n\geqq 0}$ de nombres entiers et un nombre c, par définition la c-multiplicité de la suite est la quantité $M(c)=\text{Card}\,\{n; u_n=c\}$ — donc $M(c)\leqq\infty$ — et la multiplicité M de u est la borne supérieure des $M(c)$, c parcourant les entiers.

La multiplicité des suites récurrentes linéaires quadratiques entières a été beaucoup étudiée et K. KUBOTA [2] a montré que

M vaut au plus quatre si u n'est pas dégénérée.

Ce résultat a été ensuite amélioré par F. BEUKERS [1] (pour plus de détails, voir l'exposé de R. TIJDEMAN [5]).

On sait beaucoup moins de choses sur les suites récurrentes linéaires cubiques à valeurs entières, en particulier il ne semble pas que l'on sache démontrer dans ce cas l'existence d'une borne absolue pour M lorsque la suite n'est pas dégénérée. En 1974, J. BERSTEL a donné l'exemple de la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+3} = 2u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n \quad \text{pour} \quad n \geqq 0.$$

On peut vérifier que $u_0=u_1=u_4=u_6=u_{13}=u_{52}=0$, donc $M(u)\geqq 6$. En [3], nous avons montré, grâce à une méthode 53-adique, que ce sont les seuls zéros; c'est par une extension de cette méthode et aussi l'utilisation de minorations de formes linéaires de logarithmes que nous déterminons ici toutes les valeurs de c telles que $M(c)+M(-c)>1$ et les solutions de l'équation correspondante $u_n=\pm c$.

La résolution complète de l'équation $u_m=\pm u_n$ est la suivante.

Theoréme. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *la suite récurrente linéaire définie par*

$$u_0 = u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+3} = 2u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Alors l'équation

$$|u_m| = |u_n|, \quad n > m,$$

a les seules solutions

$$. \, u_m = u_n = 0, \quad m, n \in \{0, 1, 4, 6, 13, 52\},$$

$$. \, m = 7, \quad n = 9, \quad u_7 = u_8 = 16,$$

$$. \, m = 10, \quad n = 11, \quad u_{10} = -u_{11} = -64,$$

$$. \, m = 18, \quad n = 20, \quad u_{18} = -u_{20} = -4096,$$

$$. \, m = 25, \quad n = 29, \quad u_{25} = -u_{29} = 262144,$$

$$. \, m = 46, \quad n = 47, \quad u_{46} = u_{47} = -50465865728,$$

$$. \, m = -2, \quad n = -1, \quad u_{-2} = u_{-1} = 1/4,$$

$$. \, m, n \in \{-6, -5, -4\}, \quad u_{-6} = -u_{-5} = -u_{-4} = 1/16.$$

En [4], il est démontré qu'on peut résoudre effectivement le problème traité ici, du moins en principe. Le but du présent travail est de montrer qu'on peut effectivement le résoudre dans un cas particulier qui n'est pas véritablement évident. Plus précisément, la méthode proposée en [4] repose sur deux utilisations de minorations de formes linéaires de logarithmes; dans un premier temps, une telle minoration fournit une borne inférieure de $|u_n|$, donc une majoration de $n-m$ lorsque $u_m = \pm u_n$ et $n > m$, on parvient ensuite à majorer m grâce à la minoration d'une seconde forme linéaire de logarithmes déduite de la relation $u_m = \pm u_n$. Mais les bornes ainsi obtenues sont colossales et il n'est pas clair qu'en pratique on puisse calculer toutes les solutions. Dans les exemples où on utilise une forme linéaire de logarithmes à coefficients constants, on peut en général réduire l'intervalle à étudier en calculant les logarithmes avec une précision de quelques centaines de chiffres, mais dans le cas présent la seconde forme linéaire dépend de $n-m$ et cette méthode est inapplicable. Ici la première étape est remplacée par un argument purement arithmétique qui fournit une estimation bien meilleure de $n-m$. Pour la seconde étape, nous utilisons la meilleure estimation explicite qui figure dans la littérature — due à M. WALDSCHMIDT — et qui conduit à $|m| < e^{90}$. Il reste ensuite à déterminer toutes les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-e^{90}, e^{90}]$, ce que nous avons réalisé avec le souci de ne pas faire appel à trop de calculs nécessitant un ordinateur.

En outre, nous avons choise cet exemple parce que c'est la seule suite récurrente linéaire cubique entière non dégénérée que nous connaissions qui possède six zéros.

II. *Etude modulo 2, 7, 29 et 257*

1. Préliminaires

Considérons les trois suites $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ définies par

$$v_n^{(i)} = u_{3n+i} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{et} \quad n \geqq 0.$$

Ces trois suites vérifient la même relation de récurrence et les valeurs

$$v_0^{(1)} = 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \quad v_2^{(1)} = 16, \quad v_3^{(1)} = -64, \quad v_4^{(1)} = 0, \quad v_5^{(1)} = 2048$$

montrent qu'il s'agit de la relation

$$v_{n+3}^{(i)} = -4v_{n+2}^{(i)} - 16v_{n+1}^{(i)} + 64v_n^{(i)}.$$

Posons

$$w_n^{(i)} = 4^n\, v_n^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad w_n^{(0)} = 4^{n-1}\, v_n^{(0)}.$$

Les suites $w_n^{(i)}$ sont à valeurs eintières et vérifient

$$w_{n+3}^{(i)} = -w_{n+2}^{(i)} - w_{n+1}^{(i)} + w_n^{(i)}, \quad n \geqq 0.$$

Notons aussi que

$$u_{3n+i} = 4^n\, w_n^{(i)} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad u_{3n} = 4^{n-1}\, w_n^{(0)}.$$

Nous considérons maintenant les douze fonctions f_i définies par

$$f_{3j+k}(n) = w^{(k)}(4n+j), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2.$$

Soient α, β et γ les racines de l'équation $X^3+X^2+X-1=0$, alors $\alpha-1$, $\beta-1$ et $\gamma-1$ sont solutions de $X^3+4X^2+6X+2=0$ donc 2 divise $(\alpha-1)^3$, $(\beta-1)^3$ et $(\gamma-1)^3$ et on a

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv \gamma^4 \equiv 1 \mod 2.$$

De plus les fonctions f_i sont de la forme

$$f_i^{(n)} = a_i\alpha^{4n} + b_i\beta^{4n} + c_i\gamma^{4n}.$$

Posons $\alpha^4 = 1+2\lambda$, $\beta^4 = 1+2\mu$, $\gamma^4 = 1+2\nu$; alors λ, μ, ν sont des entiers algébriques et

$$\begin{aligned} f_i(n) &= a_i(1+2\lambda)^n + b_i(1+2\mu)^n + c_i(1+2\nu)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_i\lambda^k + b_i\mu^k + c_i\nu^k) 2^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

donc $f_i(n)$ est de la forme

$$f_i(n) = \sum_{k=0}^{n} C_{ik}(n)_k$$

où

$$(n)_0 = 1, \quad (n)_1 = n, \quad (n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

$$C_{ik} = (a_i\lambda^k + b_i\mu^k + c_i\nu^k)\frac{2^k}{k!};$$

par identification on voit aussi que

$$C_{i0} = f_i(0), \quad C_{i1} = f_i(1) - f_i(0), \ldots, C_{ik} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_i(j).$$

On trouve ainsi les premières valeurs des $C_{i,k}$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_{i,0}$	0	0	1	2	0	-1	0	1	1	-2	-1	1
$C_{i,1}$	4	0	-4	-4	2	4	-4	-4	0	12	2	-8
$C_{i,2}$	-8	2	8	0	-6	-4	16	6	-8	-24	2	22
$3C_{i,3}$	16	-16	-24	32	24	-8	-80	-8	56	64	-32	-88
$3C_{i,4}$	8	20	8	-56	-16	32	72	-12	-64	-4	48	60

Cette table montre en particulier que les nombres

$$a_i \lambda^k + b_i \mu^k + c_i \nu^k, \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 0, 1, \ldots, 11$$

sont entiers; il en résulte qu'ils sont entiers pour tout k. Si v_2 désigne la valuation 2-adique on en déduit

$$v_2(C_{ik}) \geqq k - v_2(k!) = k - \left[\frac{k}{2}\right] - \left[\frac{k}{4}\right] - \ldots - \left[\frac{k}{2^k}\right].$$

D'où en particulier les congruences

$$f_i(n) \equiv f_i(0) \pmod 2 \quad i = 0, 1, \ldots, 11,$$

et même

$$f_i(n) \equiv f_i(0) \pmod 4 \quad \text{si} \quad i = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11.$$

2. Première réduction

Supposons que l'on ait

$$u_m = \pm u_n \quad \text{avec} \quad m < n$$

alors les congruences précédentes montrent que les seules possibilités sont

$$\bar{m} \in \{0, 1, 4, 6\}$$

$$\text{ou} \quad (\bar{m}, \bar{n}) \in \{(7, 8), (10, 11)\} \quad \text{et} \quad n = m + 1$$

(on a posé $\bar{x} = x \bmod 12$).

Traitons d'abord le cas $(\bar{m}, \bar{n}) = (7, 8)$. Considérons la fonction $f_8 - f_7$; on a

$$f_8(x-1) - f_7(x-1) = f_1(x),$$

en effet les deux membres vérifient la même récurrence cubique et coïncident pour $x = 0, 1$ et 2.

Le tableau des C_{ik} montre que pour x entier on a

$$f_1(x) \equiv 2x(x-1) \mod 4x(x-1),$$

d'où les assertions suivantes

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

et

$$x \neq 0, \quad 1 \Rightarrow v_2(f_1(x)) = 1 + v_2(x(x-1)).$$

Il en résulte que si $(\bar{m}, \bar{n}) = (7, 8)$ et $u_m = u_n$ alors $(m, n) = (-5, -4)$ ou $(7, 8)$.

Par ailleurs la relation

$$f_7(x) + f_8(x) \equiv 2 \mod 4$$

montre que pour $(\bar{m}, \bar{n}) = (7, 8)$ on a $u_m \neq -u_n$.

Supposons maintenant $(\bar{m}, \bar{n}) = (10, 11)$. On a

$$f_{10}(x) + f_{11}(x) \equiv -6x \mod 4x$$

donc dans le cas présent le seul zéro est $x=0$, ainsi

$$u_m = -u_n, \quad m < n, \quad (\bar{m}, \bar{n}) = (10, 11) \Rightarrow (m, n) = (10, 11).$$

Par ailleurs

$$f_{11}(x-1) - f_{10}(x-1) = f_4(x),$$

et d'après le tableau des $C_{i,k}$ on a, pour x entier,

$$\begin{aligned} f_4(x) &\equiv 2x - 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2) - \frac{16}{3} x(x-1)(x-2)(x-3) \mod 4x(x-4) \\ &\equiv \frac{2x(x-4)}{3}(-8x^2 + 8x - 21) \mod 4x(x-4) \\ &\equiv 2x(x-4) \mod 4x(x-4). \end{aligned}$$

Donc

$$f_4(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 4$$

et

$$n \neq 0, \quad 4 \Rightarrow v_2(f_4(n)) = 1 + v_2(n(n-4)),$$

enfin

$$u_m = u_n, \quad m < n, \quad (\bar{m}, \bar{n}) = (10, 11) \Rightarrow (m, n) = (-2, -1) \quad \text{ou} \quad (m, n) = (46, 47).$$

Il reste à étudier les fonctions f_0 et f_6, on a tout simplement

$$f_0(x) \equiv 4x \mod 8x$$

et

$$f_6(x) \equiv -4x \mod 8x,$$

donc

$$f_0(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f_6(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

et

$$x \neq 0 \Rightarrow v_2(f_0(x)) = v_2(f_6(x)) = 2 + v_2(x).$$

On peut noter en passant que nous avons montré que

$$u_n = 0 \Leftrightarrow n \in \{0, 1, 4, 6, 13, 52\}.$$

3. Seconde réduction

Passons maintenant à l'étude du cas $u_m = \pm u_n$ avec $n > m$ et $\bar{m} \in \{0, 1, 4, 6\}$, $m \notin \{0, 1, 4, 6, 13, 52\}$.

La relation $u_m = \pm u_n$ implique

$$f_{\bar{m}}(x) = \pm 4^z f_{\bar{n}}(y) \text{ avec } z \geqq 0, \quad x = (m - \bar{m})/12, y = (n - \bar{n})/12.$$

Si $\bar{m} = 0$, on sait que $v_2(f_0(x)) = 2 + v_2(x)$ et on en déduit que

$$v_2(x) < 2 \Rightarrow n = m + 2 \quad \text{ou} \quad m + 3$$

et

$$v_2(x) = k \Rightarrow n \leqq m + 1 + 3k/2.$$

On vérifie que les suites $f_0(x) - 4f_2(x)$, $f_0(x) \pm 4f_3(x)$ n'ont pas de zéro modulo 7, tandis que la fonction $f_0(x) + 4f_2(x)$ ne s'annule pas modulo 29 (les périodes sont respectivement 12 et 35); on a donc nécessairement $m \equiv 0 \bmod 48$.

Si $\bar{m} = 1$, on a

$$v_2(f_4(x)) = 1 + v_2(x(x-1)),$$

donc

$$\max\{v_2(x), v_2(x-1)\} = k \Rightarrow n \leqq m + 1 + 3k/2.$$

De plus si $x \equiv 2, 3 \bmod 4$ on a nécessairement $n = m + 4$, et comme la fonction $f_1 - 4f_5$ ne s'annule pas modulu 7 on a alors $u_m = -u_n$. Modulo 7, la fonction $f_1(x) + 4f_5(x)$ n'a des zéros que pour $x \equiv 2 \bmod 4$; et dans ce cas on a

$$\begin{aligned} 4f_5(x) + f_1(x) &\equiv -4 + 16x - 14x(x-1) \bmod 4(x-2) \\ &\equiv 2(x-2)(-7x+1) \equiv 2(x-2) \bmod 4(x-2) \end{aligned}$$

ce qui montre que $x = 2$ est l'unique zéro. Autrement dit si $\bar{m} = 1$ et $u_m = \pm u_n$ alors

$$m = 25, \quad n = 29 \quad \text{et} \quad u_m = -u_n$$

ou bien

$$m \equiv 1, 13 \pmod{48}.$$

Si $\bar{m} = 4$, on a

$$v_2(f_4(x)) = 1 + v_2(x(x-4))$$

donc

$$\max\{v_2(x), v_2(x-4)\} = k \Rightarrow n \leqq m + 4 + 3k/2,$$

et il n'y a pas de solution pour x impair. Supposons $x = 2x'$ avec x' impair, alors nécessairement $n = m + 5$, et on voit qu'il n'y a pas de solution modulo 7.

Si $\overline{m}=6$, on a

$$v_2(f_6(x)) = 2+v_2(x)$$

donc

$$v_2(x) = 0 \Rightarrow n = m+1 \quad \text{ou} \quad m+2,$$
$$v_2(x) = 1 \Rightarrow n = m+3,$$
$$v_2(x) = k \Rightarrow n \leqq m+1+3k/2.$$

Supposons d'abord $v_2(x)=0$, modulo 32 on voit que le seul cas possible est $u_m= -u_n$.

La congruence

$$4f_7(x-1)+f_6(x-1) \equiv 4x \mod 8x$$

montre que la seule solution est $x=0$, ce qui correspond à $u_6=-u_5$. On vérifie que

$$4f_8(x-1)+f_6(x-1) \equiv 4x-4x(x-1) \mod 8x(x-2)$$
$$\equiv -4x(x-2) \mod 8x(x-2)$$

ce qui montre que les seuls zéros sont $x=0$ et $x=2$; ils correspondent aux égalités $u_{-6}=-u_{-4}$ et $u_{18}=-u_{20}$.

Pour $v_2(x)=1$, on constate que les fonctions $f_6(x)\pm 4f_9(x)$ ne s'annulent pas modulo 7.

En résumé, nous avons montré que la relation

$$u_m = \pm u_n \quad \text{avec} \quad n > m$$

entraîne l'une des conditions suivantes

$$. \, m, n \in \{0, 1, 4, 6, 13, 52\} \quad \text{et donc} \quad u_m = u_n = 0$$
$$. \, m = 7, \quad n = 8, \quad \text{et} \quad u_7 = u_8 = 16$$
$$. \, m = 10, \quad n = 11, \quad \text{et} \quad u_{10} = -u_{11} = -64$$
$$. \, m = 18, \quad n = 20, \quad \text{et} \quad u_{18} = -u_{20} = -4096$$
$$. \, m = 25, \quad n = 29 \quad \text{et} \quad u_{25} = -u_{29} = 262144$$
$$. \, m = 46, \quad n = 47 \quad \text{et} \quad u_{46} = u_{47} = -47\times 2^{30} = 50465865728$$
$$. \, m = -2, \quad n = -1 \quad \text{et} \quad u_{-2} = u_{-1} = 1/4$$
$$. \, m \in \{-6, -5\} \quad \text{et} \quad u_{-6} = -u_{-5} = -u_{-4} = 1/16$$

et enfin

$$u_m \neq 0, \quad m \equiv 0, 1, 4, 6, 13 \mod 48 \quad \text{et}$$

$$m < n \leqq m+4+\frac{3}{2}\max\{v_2(x), v_2(x-1), v_2(x-4)\}$$

où $x=(m-\overline{m})/12$.

Nous voulons montrer que cette dernière possibilité n'a pas lieu. Désormais nous supposerons donc $m\neq 0, 1, 4, 6, 13, 52$ et $m\equiv 0, 1, 4, 6, 13$ modulo 48.

On a alors

$$u_m \equiv u_n \equiv 0 \pmod 7,$$

ce qui implique

$$n \equiv 0, 1, 4, 6, 13, 23, 34 \mod 48.$$

4. Troisième réduction

Considérons d'abord le cas où au moins l'un des entiers m, n est congru à 23 ou 34 modulo 48. On a alors nécessairement $m \equiv 0, 1, 4, 6, 13$ et $n \equiv 23, 34$. En considérant $v_2(u_m)$ on voit même que $m \equiv 0, 1, 4, 6, 13 \pmod{2^8}$; mais, modulo 257, (u_n) admet 2^8 comme période et s'annule exactement pour les indices congrus à 0, 1, 4, 6, 13, 52, 95 modulo 2^8. Ainsi on ne peut avoir que

$$m, n \equiv 0, 1, 4, 6, 13 \pmod{48}.$$

Montrons maintenant que les conditions $u_m = \pm u_n \neq 0$ et $m < u \leqq m+52$ sont incompatibles. Pour $\overline{m}=0$, ces deux conditions impliquent $f_0(x) = \pm 4^z f_i(x)$ ou $f_0(x) = \pm 4^z f_j(x+4)$ avec $i \neq 0$ et $z > 0$, ces deux cas conduisent à la relation

$$4x \equiv 0 \pmod{8x}$$

donc $x=0$ est la seule solution et alors $u_m=0$. De même, si $\overline{m}=6$, on a $f_6(x) = \pm 4^z f_i(x)$ ou $\pm 4^z f_j(x+4)$ avec $i \neq 6$ et $z > 0$ et encore $4x \equiv 0 \pmod{8x}$, donc $x=0$, et $u_m=0$. Pour $\overline{m}=1$, il ne reste plus que $\overline{n}=1$ ou 4. Si x est pair, on a

$$f_1(x) \pm 4^z f_1(x+1) \equiv 2x \mod 4x \quad \text{si} \quad z > 0$$

donc la seule solution est encore $x=0$ et $u_m=0$.

Pour x pair, on a

$$f_1(x) \pm 4^z f_4(x+k) \equiv 2x \pmod{4x}, \quad \text{si} \quad z > 0 \quad \text{et} \quad k = 0, 4,$$

donc le seul zéro est encore $x=0$. A cet instant, il ne reste plus que les seules possibilités $m, n \equiv 1, 4, 13 \mod 48$, avec $n-m \neq 3, 12, 51$ et donc $9 \leqq n-m \leqq 52$, ce qui implique $m, n = 1, 4, 13, 52 \mod 2^8$ et il ne reste plus à étudier que les cas $m \equiv 1, 13$, $n \equiv 52$ et $m \equiv 4$, $n \equiv 13, 52$ modulo 2^8. Si 8 divise x: on a

$$f_1(x+k) \pm 4^z f_4(x+4) \equiv 2x \pmod{4x} \quad \text{si} \quad z > 0 \quad \text{et} \quad k = 0, 1,$$

la seule solution est encore $u_m=0$, enfin

$$f_4(x) \pm 4^z f_1(x+1) \equiv 8x \pmod{16x} \quad \text{si} \quad z > 0,$$

$$f_4(x) \pm 4^z f_1(x+4) \equiv 8x \pmod{16x} \quad \text{si} \quad z > 0,$$

et la seule solution est toujours $u_m=0$.

On en déduit maintenant que

$$m, n \equiv 0, 1, 4, 6, 13, 52 \pmod{3.2^8} \quad \text{et} \quad n-m > 2^9.$$

III. *Une majoration de m et la conclusion*

Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme X^3-2X^2+4X-4, avec γ réelle; alors $\gamma=1.295597\dots$. On a la formule

$$u_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n$$

avec

$$a = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = \frac{1}{2\alpha^2-8\alpha+12}$$

et les analogues.

Si $u_m = \pm u_n$ avec $n>m$ alors il existe un entier k tel que l'expression

$$\Lambda = \mathrm{Log}\left((a/\bar{a})(\alpha^{n-m}-1)/(\bar{\alpha}^{n-m})\right) + m\,\mathrm{Log}\,(\alpha/\bar{\alpha}) - ik\pi$$

vérifie

$$|\Lambda| \leqq \frac{|2c(\gamma^{n-m}-1)|}{|a(\alpha^{n-m}-1)|}(\gamma/|\alpha|)^m,$$

où les logarithmes sont les déterminations dans l'intervalle $]-i\pi, +i\pi]$.

Comme on peut supposer $n-m>2^9$, on a la majoration

$$|\Lambda| \leqq (\gamma/|\alpha|)^m = \exp(-0.3046\dots m).$$

On peut en sens contrainre minorer $|\Lambda|$ (si Λ n'est pas nul) grâce au théorème explicite qui figure en [6]. Pour cela on utilise la majoration

$$n \leqq m+4+\frac{3}{2}\left(\mathrm{Log}\,\frac{m}{12}\right)\Big/\mathrm{Log}\,2 < m+\frac{3\,\mathrm{Log}\,m}{2\,\mathrm{Log}\,2},$$

et — après quelques calculs — on trouve que

$$\Lambda \neq 0 \Rightarrow |\Lambda| > \exp\{-2^{103}(\mathrm{Log}\,m)^2\};$$

donc

$$\Lambda \neq 0 \Rightarrow m < 2^{107}(\mathrm{Log}\,m)^2.$$

Pour Λ non nul une première estimation grossière fournit $m<e^{100}$, donc $\mathrm{Log}\,m<100$ puis $m<e^{84}<2^{122}$ et $n<m+183$ — cas déjà exclu.

Enfin on ne peut avoir $\Lambda=0$ que si $\gamma^{n-m}=1$, ce qui est impossible pour $n>m$.

Il n'y a donc pas d'autres solutions que celles rencontrées auparavant, pour lesquelles on a $-6\leqq m<n\leqq 52$.

References

[1] F. Beukers, The multiplicity of binary recurrences, *Compositio Math.* **40** (1980), 251—267.

[2] K. Kubota, On a conjecture of M. Ward I, II, III, *Acta Arith.* **33** (1977), 11—28, 29—48 et 99—109.

[3] M. Mignotte, Suites récurrentes linéaires, *Sém. Delange—Pisot—Poitou,* **15** 1973/74, G. E. n° 14, *9 pages.*

[4] M. MIGNOTTE, T. N. SHOREY and R. TIJDEMAN, The distance between terms of an algebraic recurrence sequence, *J. f. r. angew. Math.* **349** (1984), 63—76.
[5] R. TIJDEMAN, Multiplicities of binary recurrences, *Sem. Théorie des Nombres, Bordeaux,* 1980/81, n° 29, *11 pages.*
[6] M. WALDSCHMIDT, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* **37** (1980), 257—283.

M. MIGNOTTE
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
CENTRE DE CALCUL
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CÉDEX

(Reçu le 22 février 1985)