# Конечные группы с минимальной системой образующих максимально возможной длины

Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов на Дону)

Пусть $|G|=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$-каноническое разложение порядка конечной группы $G$; $\lambda=\lambda(G)=\alpha_1+\dots+\alpha_k$. Если $B$-минимальная система образующих группы $G$, то из теоремы Лагранжа следует $|B|\leqq\lambda$.

*Определение.* $G$ назовем $\Lambda$-группой, если она обладает минимальной системой образующих длины $\lambda=\lambda(G)$.

Цель заметки — классифицировать $\Lambda$-группы. Наше доказательство совершенно элементарно. Для удобства основные цитируемые в тексте результаты собраны в лемме.

**Лемма. 1.** *Пусть $M$ и $N$-нормальные делители группы $G$. Тогда $G/M\cap N$ изоморфна подгруппе из $G/M\times G/N$.*

2. (О. Гельдер). *Если порядок группы свободен от квадратов, она сверхразрешима.*

3. (У. Бернсайд). *Если силовская $p$-подгруппа группы $G$ лежит в центре своего нормализатора, то $G$ имеет инвариантное $p$-дополнение.*

4. *Группа автоморфизмов группы простого порядка $p$ циклическая порядка $p-1$.*

5. *Циклическая группа тогда и только тогда является $\Lambda$-группой, когда ее порядк свободен от квадратов.*

Скажем, что подгруппа $H$ дополняема в группе $G$, если $G=FH$ и $F\cap H=1$ для некоторой подгруппы $F$ группы $G$.

**Основная теорема.** *Следующие свойства конечной группы $G$ эквивалентны:*

(а) *$G-\Lambda$-группа.*

(б) *$G$ сверхразрешима и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы.*

(в) *$G$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп, порядки которых свободны от квадратов.*

(г) *Все подгруппы дополняемы в $G$.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Пусть $B=\{x_1,\dots,x_\lambda\}$-минимальная система образующих $\Lambda$-группы $G$, $\lambda=\lambda(G)$. Очевидно,

(i) *Любое подмножество множества $B$ порождает $\Lambda$-группу.*

(ii) *Эпиморфные образы $\Lambda$-группы $G$ являются $\Lambda$-группами.*

Доказательство. Пусть $R$-нормальная подгруппа группы $G$, $\bar{G}=G/R$, $\bar{x}_i=x_iR$. Перенумеруем $x_i$ так, что $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t\}$-минимальная система образующих группы $\bar{G}$. Тогда $G=\langle x_1, \dots, x_t\rangle R$, $\lambda(\langle x_1, \dots, x_t\rangle)=t$ по (i), при этом $\{x_1, \dots, x_t\}$-минимальная система образующих $\Lambda$-группы $\langle x_1, \dots, x_t\rangle$. Как отмечалось,

$$t \leqq \lambda(\bar{G}) = \lambda(G)-\lambda(R) \leqq \lambda(\langle x_1, \dots, x_t\rangle)+\lambda(R)-\lambda(R) = \lambda(\langle x_1, \dots, x_t\rangle) = t.$$

Поэтому $\lambda(\bar{G})=t$ и $\bar{G}-\Lambda$-группа, что и требовалось доказать.

(iii) $$\Phi(G) = 1.$$

Доказательство. Положим в (ii), $R=\varphi(G)$, и пусть в обозначениях доказательства (ii), $\bar{G}=\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t\rangle$. Тогда

$$G = \langle x_1, \dots, x_t, \Phi(G)\rangle = \langle x_1, \dots, x_t\rangle,$$

откуда $t=\lambda$. Так как $\lambda=t\leqq\lambda(\bar{G})\leqq\lambda$, то $\lambda(\bar{G})=\lambda(G)$, $G=\bar{G}$, так что $\varphi(G)=1$.

(iv) *Если $G$ содержит нееденичный разрешимый нормальный делитель, то $G$ разрешима.*

Это тотчас же следует из (ii) по индукции.

(v) *Группа $G$ разрешима.*

Доказательство. Пусть уже доказано, что все $\Lambda$-группы, чей порядок меньше $|G|$, разрешимы, а $G$ неразрешима. Тогда $G$ полупростая по (iv). Положим $H=\langle x_1, \dots, x_{\lambda-1}\rangle$. Тогда $|G:H|=p$, где $p$-простое число. По (i) $H$ является $\Lambda$-группой, и поэтому по индукции сверхразрешима. По (iv) имеем $H_G=\bigcap_{x\in G} xHx^{-1}=1$. Отсюда следует, что $G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_p$ степени $p$, и поэтому $p^2$ не делит $|G|$ и $p$-наибольший простой делитель $|G|$. Так как $H$ сверхразрешима, то $Q\in \mathrm{Syl}_q(H)$ нормальна в $H$, где $q$-наибольший простой делитель $|H|$. Предположим, что $|Q|>q$. Положим $F=\langle x_2, \dots, x_\lambda\rangle$. Предыдущее рассуждение дает $|G:F|=p$, так что $|F|=|H|$. Так как $G-\Lambda$-группа, то

$$\lambda(\langle x_2, \dots, x_{\lambda-1}\rangle) = \lambda-2 = \lambda(H)-1 = \lambda(F)-1,$$

и поэтому $H\cap F=\langle x_2, \dots, x_{\lambda-1}\}$. По предположению $|Q|>q$; поэтому $q$ делит $|H\cap F|$. Пусть $Q_0\in \mathrm{Syl}_q(H\cap F)$. Так как $H\cap F$ сверхразрешима, $Q_0$ нормальна в $H\cap F$. Если $Q_0<Q$, то $N_G(Q_0)\geqq\langle H\cap F, Q, \bar{Q}\rangle$, где $\bar{Q}\in \mathrm{Syl}_q(F)$, и поэтому $H_G(Q_0)\geqq\langle H, F\rangle=G$, то есть $Q_0$ нормальна в $G$, вопреки полупростоте группы $G$. Итак, $|Q|=q$ *). Тогда $H=A\lambda Q$-полупрямое произведение $q'$-холловской подгруппы $A$ в $H$ с $Q\in \mathrm{Syl}_q(H)$, $|Q|=q$. Аналогично $F=A\cdot\bar{Q}$. Положим $C=C_A(Q)$, $D=C_A(\bar{Q})$. Тогда $C$ нормальна в $H$, а $D$ нормальна в $F$. Поэтому $C\cap D$ нормальна в $\langle H, F\rangle=G$, и $C\cap D=1$ ввиду полупростоты группы $G$. Но $A/C$ изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p-1$ по лемме (п. 4). То же самое верно и для $A/D$. По п. 1 леммы $A$ абелева, и ее порядок свободен от кубов. Пусть $R\in \mathrm{Syl}_r(A)$, $N=N_G(R)$. Если $N\leqq H$ или $N\leqq F$, то $R$ лежит

*) Т. к. $Q\leqq H\cap F$.

в центре $N$, и $G$ имеет по п. 3 леммы инвариантное $r$-дополнение. Пусть $N \not\leq H$, $N \not\leq F$. Тогда $A < N$, $|G:A| = qp$. Так как $G$ полупростая, $N < G$, так что $|N| = |A|p$ или $|A|q$. Пусть $|N| = |A|p$. Рассмотрим подгруппу $RP$, где $P \in \mathrm{Syl}_p(N)$. Если $P$ нормальна в $RP$, то $R$ лежит в центре $N$, и тогда $G$ имеет инвариантное $r$-дополнение по п. 3 леммы. Если $P$ неинвариантна в $RP$, то по теореме Силова $r^2 \equiv 1 \pmod p$, а так как $r < p$, то $r = 2$, $p = 3$, $r \neq q \neq p$, и отсюда следует $q > p$ противоречие. Пусть $|N| = |A|q$. Если $Q \in \mathrm{Syl}_q(N)$ нормальна в $RQ$, то снова по п. 3 леммы $G$ имеет инвариантное $r$-дополнение. Пусть $Q$ неинвариантна в $RQ$. Тогда, как и выше, $r = 2$, $q = 3$, $|G| = 2 \cdot 3p$ или $|G| = 4 \cdot 3p$. В первом случае $G$ разрешима по п. 2 леммы. Во втором случае $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ неинвариантна в $G$, и поэтому по теореме Силова $p = 5$, $G = A_5$. Получается противоречие, так как $A_5$ не является $\Lambda$-группой. Итак, для любого простого делителя $r$ числа $|A|$ группа $G$ имеет инвариантное $r$-дополнение. Поэтому $G = A \cdot B$, где $|B| = |G:A| = qp$, и поэтому $G$ разрешима. А это противоречит предположению. Утверждение (v) доказано.

(vi) *Если $G$ содержит два различных минимальных нормальных делителя, то* (а)$\Rightarrow$(б).

Это тотчас же следует из п.1 леммы.

Поэтому далее можем считать, что $G$ содержит единственный минимальный нормальный делитель $R$. Положим $|R| = p^n$.

(vii) $n = 1$.

Доказательство. Пусть $\bar{G} = G|R$, $\bar{x}_i = x_i R$, и $x_i$ перенумерованы так, что $\langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t \rangle$-минимальная система образующих для $\bar{G}$. Тогда $G = \langle x_1, \dots, x_t \rangle R$. Так как $R$-минимальная нормальная подгруппа в $G$, $\lambda(\langle x_1, \dots, x_t \rangle) = t < \lambda$ то $R \not\leq \langle x_1, \dots, x_t \rangle$, и поэтому $\langle x_1, \dots, x_t \rangle$ максимальна в $G$. Поэтому $\langle x_1, \dots, x_t, x_{t+1} \rangle = G$, откуда $\lambda(R) = 1$, и $|R|$-простое число, что и требовалось.

Мы имеем $G = A \cdot R$ и $C_A(R) = 1$, так как $R$-единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$, а $C_A(R)$ нормальна в $G$. Но тогда подядок группы $G$ свободен от квадратов по пп. 4 и 5 леммы. Это завершает, в силу п. 2 леммы, доказательство импликации (а)$\Rightarrow$(б).

(а)$\Rightarrow$(в). Приведенное выше рассуждение доказывает и эту импликацию.

(в)$\Rightarrow$(б). Это очевидно.

(в)$\Rightarrow$(г). Это — известная теорема Ф. Холла [1].

(б)$\Rightarrow$(а). Пусть это уже доказано для групп, чей порядок меньше $|G|$. Пусть $p$-наибольший простой делитель $|G|$, $R$-нормальная подгруппа порядка $p$ в $G$. Пусть $F - p'$-холловская подгруппа в $G$. По теореме Машке о полной приводимости в $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ имеется подгруппа $P_1$, инвариантная относительно $F$, и такая, что $P = P \times R$. Положим $H = FP_1$. По индукции $H$ имеет минимальную систему образующих $\{x_1, \dots, x_{\lambda-1}\}$. Положим $R = \langle x_\lambda \rangle$. Покажем, что $\{x_1, \dots, x_{\lambda-1}, x_\lambda\}$-минимальная система образующих для $G$. Очевидно, из этой системы нельзя удалить $x_\lambda$, так как $\{x_1, \dots, x_{\lambda-1}\} = H < G$. Предположим, что $\langle x_2, \dots, x_\lambda \rangle = G$. Тогда $GR = \langle \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{\lambda-1} \rangle$. Поэтому $G = \langle x_2, \dots, x_{\lambda-1} \rangle R$ и $\langle x_2, \dots, x_{\lambda-1} \rangle$ максимальна в $G$. Но это неверно, так как $\langle x_2, \dots, x_{\lambda-1} \rangle < H < G$. Это завершает доказательство теоремы.

**Следствие 1.** *Подгруппы $\Lambda$-группы являются $\Lambda$-группами.*

**Следствие 2.** *Центральное произведение двух $\Lambda$-групп является $\Lambda$-группой.*

В самом деле, пусть $G=H*F$-центральное произведение двух $\Lambda$-групп $H$ и $F$. Тогда $G=H\times F/R$. Так как $H\times F-\Lambda$-группа по теореме, то $G$ по (ii) из доказательства теоремы является $\Lambda$-группой.

## Цитированная литература

[1] P. Hall, Complemented groups, *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 201—204.

344006, Ростов-на-Дону, Энгельса 111, кв. 18
Беркович Яков Гильевич

*(Поступило 4. VII. 1984 г.)*