Конечные группы с большими суммами степеней неприводимых характеров

К. Р. НЕКРАСОВ (Калинин) и Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов на Дону)

Посвящаем Э. М. Жиудю

§1. Введение. Постановка задачи

Введем некоторые обозначения (в статье рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры).

Пусть G-группа порядка g, G'-ее коммутант порядка g'; $\mathrm{Irr}\,(G)$-множество всей неприводимых характеров группы G; $\mathrm{Lin}\,(G)$-множество всех линейных характеров группы G; $\mathrm{Irr}_1(G)=\mathrm{Irr}\,(G)-\mathrm{Lin}\,(G)$. При суммировании вместо $\mathrm{Irr}\,(G)$, $\mathrm{Irr}_1(G)$ пишем $\mathrm{I}(G)$, $\mathrm{I}_1(G)$ соответственно. Известно, что $|\mathrm{Irr}\,(G)|$ равно $r(G)$-числу классов сопряженных элементов группы G, а $|\mathrm{Lin}\,(G)|=g/g'$. Через c. d. G обозначим множество различных степеней неприводимых характеров группы G.

Введем в рассмотрение такие функции от G:

$$t(G) = \left|\{x\in G|x^2 = 1\}\right|, \quad T(G) = \Sigma_{I(G)}\,\chi(1);\, f(G) = T(G)|g;\; mc(G) = r(G)/g.$$

Простой делитель p порядка неабелевой группы G назовем существенным делителем g, если S_p-подгруппа группы G не лежит в ее центре $Z(G)$.

Основная теорема. *Пусть p-наименьший существенный простой делитель порядка g неабелевой группы G. Если $f(G)>\dfrac{1}{p}$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *G содержит абелеву подгруппу индекса p.*

(2) $g'=p$.

(3) $C_p\times C_p\cong G'\leqq Z(G)$, c. d. $G\leqq\{1, p, p^2\}$. *Если* $p^2\in$c. d. G, *то все характеры степени p^2 из* $\mathrm{Irr}\,(G)$ *таковы, что их ядра пересекаются с G' по одной и той же подгруппе порядка p.*

(4) $g'\geqq p^3$, c. d. $G=\{1, p\}$, $G/Z(G)$ *порядка p^3 и экспоненты p. Если $G'\leqq Z(G)$, то* $\exp G'=p$.

Обратно, если G из заключения теоремы, то $f(G)>1/p$, что легко проверяется.

Лемма 1.1. (1) $|[x, G]^*|=|G{:}\,C_G(x)|=g'([x, G]=\{[x, y]|\, y\in G\})$.

* $[x, G]=\{[x, y]|\,y\in G\}$-не обязательно подгруппа в G.

(2) *Если H-нормальная абелева подгруппа индекса p в неабелевой группе G, то* $g=pg'|Z(G)|$, $|G:C_G(x)|=g'$ $(x\in G-H)$.

(3) (Виландт) *G нильпотентна* $\Leftrightarrow$ $G'\leqq f(G)$.

(4) *Если G не имеет инвариантного p-дополнения, она содержит минимальную ненильпотентную $\{p, q\}$-подгруппу с инвариантной S_p-подгруппой.*

(5) (Фиттинг) *Если $G=H\cdot A$-полупрямое произведение с инвариантной абелевой A и* $(|H|, |A|)=1$, *то* $A=C_A(H)\times\langle[H, A]\rangle$.

(4)-перефразировка классического результата Фробениуса.

Группой Шмидта называют минимальную ненильпотентную группу G. Тогда $G=PQ$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$ нормальна в G. Далее, Q элементарная или специальная. Если $Q\cap Z(G)=1$, то Q элементарная. Если $Q\cap Z(G)>1$, то $Q\cap Z(G)=Z(Q)$ и Q специальная. Положим $|Q\cap Z(G)|=q^c$, $|Q/Q\cap Z(G)|=q^b$. В этом случае G будем называть $S(p^a, q^b, q^c)$-группой. Отметим, что b-порядок $q(\mathrm{mod}\, p)$.

По формуле Фробениуса-Шура

$$t(G) = \Sigma_{I(G)}\, v(\chi)\chi(1),$$

где коэффициенты $v(\chi)\in\{0, \pm 1\}$. Поэтому $t(G)\leqq T(G)$ (а из смысла коэффициентов $v(\chi)$ следует, что $t(G)=T(G)\Leftrightarrow$ все неприводимые представления группы G реализуются над полем вещественных чисел).

Уолл [1] классифицировал все G с $t(G)/g>1/2$. В этом случае $f(G)>1/2$.

Ш. Амицур [8] классифицировал все G с c. d. $G=\{1, 2\}$. И в этом случае $f(G)>1/2$.

М. Айзекс и Д. Пасман [7] классифицировали все G с c. d. $G=\{1, p\}$, где p-простой делитель g. В этом случае $f(G)>1/p$.

§2. Вспомогательные результаты

Лемма 2.1. *Пусть H-нормальная подгруппа индекса p в неабелевой группе G,* $y\in G-H$.

(1) $mc(G) = mc(H)/p^2+\dfrac{p+1}{pg^2}\sum\limits_{G-H}|C_G(x)|$.

(2) *Если H абелева, то* $[y, G]=[y, H]=G'$, $mc\,(G)=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{p^2-1}{p^2q'}$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Поэтому докажем (1).

Пусть $G=Hx\cup Hx^2\cup\ldots\cup Hx^p$, $D_{ij}=Hx^i\times Hx^j$ (декартово произведение), $K=\{(a, b)\in G\times G|ab=ba\}$, $K_{ij}=K\cap D_{ij}$. Тогда $K=\bigcup\limits_{i,j} K_{ij}$ (разбиение). Имеем $|K|=\sum\limits_G |C_G(x)|=gr(G)$; поэтому $|K_{pp}|=hr(H)=h^2\, mc\,(H)$ (здесь $h=|H|$), а для $(i,j)\neq(p,p)$ имеем

$$|K_{ij}| = \sum_{xH}|C_H(y)| = \frac{1}{p}\sum_{xH}|C_G(y)|.$$

Поэтому

$$g^2 mc(G) = |K| = h^2 mc(H) +)p^2-1) \cdot \frac{1}{p} \sum_{xH} |C_G(y)| =$$

$$= \frac{g^2}{p^2} mc(H) + \frac{p^2-1}{p(p-1)} \sum_{G-H} |C_G(y)|. \quad \square$$

Лемма 2.2. *Пусть* $H \leqq G$, $|H| = h$.

(1) (Эрнест) $mc(G) \leqq mc(H)$. $\square$

(2) $f(G) \leqq f(H)$.

(3) *Если в* $\operatorname{Irr}(G)$ *имеется* α *характеров степени* n *и* $n \notin \mathrm{c.\,d.}\, H$, *то* $f(H) \geqq f(G) + n\alpha/g$.

(4) $f(G) = f(H) \Leftrightarrow mc(G) = mc(H)$.

(5) $f(G) = f(H) \Rightarrow G' = H'$ *и все нормальные в* H *подгруппы нормальны и в* G.

(6) $H \trianglelefteq G \Rightarrow f(G) \leqq f(H) - \frac{1}{h}\big(1 - f(G/H)\big)$. $\square$

Доказательство. Докажем лишь утверждения (2)—(5).

(3) Запишем соотношение

$$\frac{g}{h} \sum_{I(H)} \varphi(1) = \sum_{I(H)} \varphi^G(1) = \sum_{I(G)} \chi(1) \Big\langle \chi, \sum_{I(H)} \varphi^G \Big\rangle = \sum_{I(G)} \chi(1) \Big\langle \chi_H, \sum_{I(H)} \varphi \Big\rangle.$$

Пусть $\{n_1, \ldots, n_s\} = \mathrm{c.\,d.}\, G - \mathrm{c.\,d.}\, H$, и в $\operatorname{Irr}(G)$ ровно α_i характеров степени n_i. Если $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$, $\chi(1) = n_i$, то $\chi_H \notin \operatorname{Irr}(H)$, так что $\Big\langle \chi_H, \sum_{I(H)} \sigma \Big\rangle \geqq 2$. Это влечет

$$\frac{g}{h} T(H) \geqq T(G) + n_1\alpha_1 + \ldots + n_s\alpha_s.$$

Тем самым доказано (3), а (3)$\Rightarrow$(2).

(4) $mc(G) = mc(H) \Leftrightarrow r(G) = \frac{g}{h} r(H)$. Поэтому, если $\varphi \in \operatorname{Irr}(H)$, то φ^G распадается на g/h попарно различных неприводимых компонент и $T(G) = \frac{g}{h} T(H)$, $f(G) = f(H)$. Пусть теперь $f(G) = f(H)$; тогда $T(G) = \frac{g}{h} T(H)$. Имеем $\varphi^G(1) = \frac{g}{h} \varphi(1)$ для $\varphi \in \operatorname{Irr}(H)$, и таков же вклад φ^G в $T(G)$. Это означает, что $\langle \varphi^G, \chi \rangle \leqq 1$ для $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$. Если $\mu \in \operatorname{Irr}(H) - \{\varphi\}$, то вклад $\varphi^G + \mu^G$ в $T(G)$ равен $\varphi^G(1) + \mu^G(1)$, и поэтому $\langle \varphi^G, \mu^G \rangle = 0$. Теперь ясно, что $r(G) = \frac{g}{h} r(H)$, $mc(G) = mc(H)$.

(5) Пусть $\lambda \in \mathrm{Lin}(H)$. Тогда $\lambda^G = \mu^1 + \ldots + \mu^{|G:H|}$, где линейные μ^i попарно различны. Поэтому

$$\frac{g}{g'} = |\mathrm{Lin}(G)| = \frac{g}{h}|\mathrm{Lin}(H)| = \frac{g}{h}, \frac{h}{h'} = \frac{g}{h'},$$

откуда $g' = h'$, $G' = H'$. Пусть теперь $M \trianglelefteq H$, $\mathrm{Irr}(H/M) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Тогда

$$\varphi_i^G = \chi_i^1 + \ldots + \chi_i^{g/h}, \quad 1 \leqq i \leqq k,$$

попарно различные $\chi_i^j \in \mathrm{Irr}(G)$. Так как $(\chi_i^j)_H = \varphi_i$, то $H \cap (\bigcap_{i,j} \ker \chi_i^j) = \bigcap_i \ker \varphi_i = M$ и $M \trianglelefteq G$. □

Лемма 2.3. $f(G)^2 \leqq mc(G)$, *и неравенство здесь обращается в равенство тогда и только тогда, когда G абелева.*

Доказательство. Вычислим

$$\sigma/g = \frac{1}{g}\sum_G \big(\sum_{I(G)} \chi(x)\big)^2 = \frac{1}{g}\sum_G \big(\sum_{I(G)\times I(G)} \psi(x)\chi(x)\big) =$$

$$= \sum_{I(G)\times I(G)} \frac{1}{g}\sum_G \psi(x)\chi(x) = \sum_{I(G)\times I(G)} \langle \psi, \bar{\chi}\rangle = r(G),$$

так что $\sigma = gr(G)$. С другой стороны, из $\sum_{I(G)} \chi(x) \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$-поле вещественных чисел) для $x \in G$ следует

$$\sigma = \big(\sum_{I(G)} \chi(1)\big)^2 + \sum_{G-\{1\}} \big(\sum_{I(G)} \chi(x)\big)^2 \geqq \big(\sum_{I(G)} \chi(1)\big)^2 = T(G)^2 = g^2 f(G)^2.$$

Итак, $gr(G) \geqq g^2 f(G)^2 \Rightarrow mc(G) \geqq f(G)^2$.

Если $mc(G) = f(G)^2$, то $\sum_{I(G)} \chi(x) = 0$ для $x \in G - \{1\}$, то есть характер $\tau = \sum_{I(G)} \chi$ исчезает на $G - \{1\}$. Это влечет $\tau = m\varrho_G$ с натуральным m (здес ϱ_G-регулярный характер группы G), и теперь ясно, что все неприводимые характеры группы G линейны, так что G абелева. □

Лемма 2.4. *Пусть* $G = PQ - S(p^a, q^b, q^c)$*-группа,* $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$.

(1) *Если* $Q \cap Z(G) \leqq \ker \chi$, *то* $\chi(1) = p$. *Если* $Q \cap Z(G) \not\leqq \ker \chi$, *то* $\chi(1) = q^{b/2}$.

(2) $$mc(G) = \frac{1}{p^2 qb + c}(q^b + p^2 q^c - 1),$$

$$f(G) = \frac{1}{pq\,b + c}(q^b + p + pq^{b/2+c} - pq^{b/2} - 1).$$

(3) *Если* $H \leqq Z(G)$, *то* $f(G/H) \geqq f(G)$. *Если* $c > 0$ *и* $H \leqq Z(Q)$, *то* $f(G/H) = f(G) \Leftrightarrow p = 1 + q^{b/2}$, $q = 2$.

(4) *Если* $p>q$ *и* $f(G)\geqq\frac{1}{q}$, *то* $p=3$, $q=2$, $G/P\cap Z(G)\cong A_4$ *или* $SL(2,3)$, $f(G)=1/2$.

Доказательство. Если $Q\cap Z(G)\leqq\ker\chi$, то $\chi(1)=p$, так как $G/\ker\chi$ неабелева, но содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p. Пусть $Q\cap Z(G)\nleqq\ker\chi$. Можем считать, что χ точен. Тогда $Z(G)$ циклический, а так как $Z(Q)=Q\cap Z(G)$ элементарная, то Q экстраспециальная, так что c. d. $Q=\{1, q^{b/2}\}$. По теореме Клиффорда $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$, а из $\chi(1)^2\leqq|G/Z(G)|=pq^b$ выводим $\chi(1)=q^{b/2}$. Это доказывает (1), а (2)—(4) легко следуют из проведенного доказательства. □

Лемма 2.5. *Пусть все подгруппы из G' нормальны в G. Тогда все $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ с $G'\cap\ker\chi=1$ индуцируются из одной и той же абелевой подгруппы, и, в частности, все они имеют одну и ту же степень.*

Доказательство. Так как группа G сверхразрешима, она является M-группой, и поэтому $\chi=\lambda^G$, где λ-линейный характер подгруппы H индекса $\chi(1)$ в G. Из

$$1=\ker\chi=\bigcap_G(\ker\lambda)^x\geqq\bigcap_G(H')^x=H'$$

следует, что H абелева. Остальное следует из того факта, что степень неприводимого характера не превосходит индекса абелевой подгруппы. □

Лемма 2.6. *Пусть* $H\lhd G$, $l=\max\{\chi(1)|\chi\in\mathrm{Irr}(G)-\mathrm{Irr}(G/H)\}$. *Тогда*
(1) *Если* $H\cap G'=1$, *то* $f(G/H)=f(G)$, $mc(G/H)=mc(G)$.
(2) *Если* $f(G)\geqq1/l$, *то* $f(G/H)\geqq f(G)$.

Доказательство. (1) Пусть $H\cap G'=1$. Положим $\bar{G}=G/H$, $\bar{g}=|\bar{G}|$, $\bar{G}'=G'H/H$, $\bar{g}'=|\bar{G}'|$, $h=|H|$. Так как $g/g'=h\cdot\bar{g}/\bar{g}'$, то существуют такие попарно различные $\lambda_1,\dots,\lambda_h$ в $\mathrm{Lin}(G)$, что справедливо такое разбиение

$$\mathrm{Irr}(G)=\lambda_1\,\mathrm{Irr}(\bar{G})\cup\dots\cup\lambda_h\,\mathrm{Irr}(\bar{G}).$$

Поэтому $gf(G)=T(G)=hT(\bar{G})=h\bar{g}f(\bar{G})=gf(\bar{G})$, $gmc(G)=r(G)=hr(\bar{G})=h\bar{g}mc(\bar{G})=gmc(\bar{G})$.

(2) Можем считать, что H-минимальная нормальная подгруппа в G. Если $H\nleqq G'$, результат следует из (1). Пусть $H\leqq G'$. Если $l=1$, то G абелева, и все доказано. Пусть $l\geqq2$. Мы имеем $g/g'=\bar{g}/\bar{g}'$. Поэтому

$$g=\sum_{I(\bar{G})}\chi(1)^2+\sum_{I(G)-I(\bar{G})}\chi(1)^2\geqq\frac{g}{h}+l\sum_{I(G)-I(\bar{G})}\chi(1)=$$

$$\frac{g}{h}+l(T(G)-T(\bar{G}))=\frac{g}{h}+l(gf(G)-\bar{g}f(\bar{G})),$$

откуда $1-\frac{1}{h}\geqq l(f(G)-f(\bar{G})/h)$. Предположим, что $f(G)>f(\bar{G})$. Тогда $1-\frac{1}{h}>lf(G)\left(1-\frac{1}{h}\right)$, $f(G)<\frac{1}{l}$, противоречие. □

Лемма 2.7. *Пусть q-наименьший простой делитель q,* $f(G)\geqq\frac{1}{q}$.

(1) *Если* $f(G)>\frac{1}{q}$, *то G имеет инвариантное q-дополнение.*

(2) *Если G не имеет инвариантного q-дополнения, то* $q=2$, $f(G)=1/2$, $G=HZ(G)$, $H-S(3^a, 2^2, 2^\varepsilon)$*-группа,* $\varepsilon\in\{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть G не имеет инвариантного q-дополнения. Тогда она по 1.1(4) содержит $S(r^a, q^b, q^c)$-подгруппу F. Из $f(F)\geqq f(G)\geqq\frac{1}{q}$ (по 2.2(2)) следует $q=2$, $r=3$, $c\leqq 1$, $f(F)=1/2$ по 2.4(4). Тогда $f(G)=1/2$, и (1) доказано. Отметим, что $F=PQ-S(3^a, 2^2, 2^\varepsilon)$-подгруппа с $\varepsilon\in\{0, 1\}$ (это следует из свойств групп Шмидта), $P\in \mathrm{Syl}_3(F)$, $Q\in \mathrm{Syl}_2(F)$, $F'=Q\in\{E(4), Q(8)\}$. По 2.2(5) имеем $F'=Q=G'$. По 1.1(3) имеем $Q\not\leqq\Phi(G)$ (здесь $\Phi(G)$-подгруппа Фраттини группы G), так что $G=MQ$ для некоторой максимальной в G подгруппы M.

(i) $Q=E(4)$. Тогда $M\cap Q=1$, M абелева, $C_M(Q)=Z(G)$, и теперь ясно, что $G/Z(G)\cong A_4$, $G=FZ(G)$. По 2.2(2) и 2.4(1) имеем $f(G)=f(F)=1/2$.

(ii) $Q=Q(8)$ (где $Q(8)$-обычная группа кватернионов). Тогда $M'\leqq M\cap Q==Z(Q)$ и M нильпотентна. Но $G/C_G(Q)$ изоморфна подгруппе порядка, кратного 12, в $\mathrm{Aut}(Q)\cong S_4$. Так как $f(S_4)=5/12<1/2$, а $f(G/C_G(Q))\geqq f(G)$ по лемме 2.6, то $G/C_G(Q)\cong A_4$. Это дает $G=FC_G(Q)$. Снова по 2.6 и (1) имеем $f(G/Z(Q))=1/2$. Тогда $[P, C_G(Q)]\subseteqq Z(Q)$. Но в этом случае $PZ(Q)==P\times Z(Q)\lhd PC_G(Q)\Rightarrow P\lhd C_G(Q)P$, то есть $[P, C_G(Q)]\subseteqq P\cap C_G(Q)\cap Z(Q)=1$. Теперь ясно, что $G=F*C_G(Q)$-центральное произведение. Если $C_G(Q)$ абелева, то $C_G(Q)=Z(G)$, и все доказано. Предположим, что $C_G(Q)$ неабелева. Возьмем в $C_G(Q)$ минимальную неабелеву подгруппу L и положим $G_0=FL$. Очевидно, $f(G_0)=1/2=f(F)$ по 2.2(2). Из 2.2(5) следует c. d. $G_0=$c. d. $F=\{1, 2, 3\}$. Так как $G_G(Q)$ нильпотентна с коммутантом порядка 2, $L-2$-подгруппа. Для $T=LQ$ имеем $T'\cong C_2$, c. d. $T=\{1, 2\}$. Поэтому T содержит абелеву подгруппу индекса 2 по 2.5, а из 1.1(2) следует $|T:Z(T)|=4$. Но $Z(T)=Z(L)Z(Q)$ имеет тот же порядок, что и L, что невозможно, так как L неабелева. Итак, $C_G(Q)$ абелева и $G=FZ(G)$. □

Лемма 2.8. *Пусть G-неабелева p-группа.*

(1) *Если* $f(G)>1/p$, *то* $g'\leqq\frac{p-1}{pf(G)-1}$. *Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда* c. d. $G=\{1, p\}$.

(2) *Если* $f(G)\geqq\frac{p^2+p-1}{p^3}$, *то справедливо одно из утверждений:*

(2а) $g'=p$, *G содержит абелеву подгруппу индекса p,* $f(G)=\frac{1}{p^2}(2p-1)$.

(2б) $g'=p$, *G содержит абелеву подгруппу индекса* p^2, *но не p,* $f(G)==\frac{1}{p^3}(p^2+p-1)$.

(2в) $g'=p^2$, c. d. $G=\{1, p\}$; *G содержит абелеву подгруппу индекса p или G/Z(G) элементарная порядка* p^3 *и коммутант G′ имеет экспоненту p,* $f(G)==\frac{1}{p^3}(p^2+p-1)$.

Доказательство. (1) Из $g=g/g'+\sum_{I_1(G)}\chi(1)^2\geqq g/g'+p(T(G)-g/g')=$ $=pgf(G)-(p-1)\cdot g/g'$ следует $g'\leqq\frac{p-1}{pf(G)-1}$. Второе утверждение из (1) теперь очевидно.

(2) Пусть H-минимальная неабелева подгруппа в G. Тогда $f(H)=$ $=(2p-1)/p^2\geqq f(G)$ по 2.2(2).

Если $f(G)=(2p-1)/p^2$, то $g'=p$ по (1), G содержит абелеву подгруппу индекса p по 2.5.

Пусть $\frac{p^2+p-1}{p}\leqq f(G)<\frac{2p-1}{p^2}$. Тогда $g'\leqq p^2$ по (1). Предположим, что $g'=p$. Тогда $|G/Z(G)|=p^{2t}$, и легко видеть, что $t=2$, c. d. $G=\{1,p^2\}$, $f(G)=\frac{p^2+p-1}{p^3}$ (по 2.5 имеем |c. d. $G|=2$).

Далее пусть $g'=p^2$. Тогда c. d. $G=\{1,p\}$ по (1). Допустим, что G не содержит абелеву подгруппу индекса p.

Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}_1(G)$. Тогда $\chi=\lambda^G$, где $\lambda\in\mathrm{Lin}(H)$, $|G:H|=p$. По предположению $1<H'\lhd G$. Но $H'\leqq\ker\chi$.

Поэтому $H'=G'\cap\ker\chi$. В $\mathrm{Irr}_1(G)$ имеется характер τ с $H'\cap\ker\tau=1$. Снова $\tau=\mu^G$, где $\mu\in\mathrm{Lin}(F)$, $|G:F|=p$, $1<F'\lhd G$, $F'\leqq\ker\tau$, так что $G'\cap\ker\tau=F'$.

Тогда $G'=H'\times F'$ (так как $g'=p^2$). Из $HZ(G)<G$, $FZ(G)<G$ следует $Z(G)\leqq H\cap F$. Для $x\in G-H$ имеем $C_{Z(H)}(x)=Z(G)$. По лемме 3.6 элемент x можно выбрать так, что $|G:C_G(x)|=p$. Пусть H содержит абелеву подгруппу индекса p. Тогда $|H: Z(H)|=p^2$ по (1). Если $Z(H)\leqq Z(G)$, то $G/Z(G)$ порядка p^3, а так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p, то $\exp G|Z(G)=p$. Пусть $Z(H)\not\leqq Z(G)$. Тогда $C_G(x)\cap Z(H)=Z(G)$ имеет в $Z(H)$ индекс p. Для $y\in Z(H)-Z(G)$ имеем $G=C_H(x)*\langle x,y\rangle$ (центральное произведение) и $\langle x,y\rangle$ неабелева. По 1.1(1) имеем $|[x,G]|=p$. Поэтому $|\langle x,y\rangle'|=p$. Так как $\langle x,y\rangle'\cap H'=1$, то по 2.13 имеем

$$f(G)=f(C_H(x))f(\langle x,y\rangle)\leqq\left(\frac{2p-1}{p^2}\right)^2<\frac{p^2+p-1}{p^3},$$

противоречие.

Пусть H и F не содержат абелевых подгрупп индекса p. Тогда из $|H'|=p$ имеем ввиду $|H: Z(H)|=p^{2t}$, $t\geqq 2$, что $f(H)=\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p^{t+1}}$. Так как $f(H)\geqq$ $\geqq f(G)\geqq\frac{p^2+p-1}{p^3}$ по 2.1(2), это дает $t=2$, так что $f(H)=f(G)$, $G'=H'$ по 2.2(5), противоречие, так как $g'=p^2>|H'|=p$. □

Лемма 2.9. *Пусть $G=PK$-полупрямое произведение с ядром K, $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, $|P|=p^2$, $C_G(K)=K$. Тогда $mc(G)\leqq 1/p^2$ (так что $f(G)<1/p$ по 2.3).*

Доказательство. c. d. $G\subseteqq\{1,p,p^2\}$ по теореме Н. Ито о степенях характеров. Пусть d_i-число характеров степени p^i в $\mathrm{Irr}(G)$. Можем считать, что G не имеет неединичного абелева прямого множителя. Тогда $K=G'$ по 1.1(5), так что $d_0=p^2$. Предположим, что $mc(G)>1/p^2$. Тогда

$$p^2+p^2\,d_1+p^4\,d_2=g$$

$$p^2+d_1+d_2=r(G)>\frac{g}{p^2},$$

откуда $p^2(p^2-1)-p^2(p^2-1)d_2>0, d_2=0$, так что c. d. $G=\{1, p\}$.

Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ точен. Так как $G-M$-группа, то $\chi=\lambda^G$, где $\lambda\in\mathrm{Lin}\,(T)$, $|G:T|=p$. Но $1=\ker\chi\geqq T'$, так что $T'=1$ (так как T' нормальна в G вместе с T), и T абелева. Но тогда $C_G(K)>K$, противоречие. Итак, в $\mathrm{Irr}\,(G)$ нет точных характеров. В частности, K-не минимальная нормальная подгруппа в G. Из c. d. $G=\{1, p\}$ следует, что G-не группа Фробениуса. Пусть $P\in\mathrm{Syl}_p\,(G)$. Далее считаем, что G-контрпример минимального порядка.

Пусть M_1, M_2-такие нормальные делители в G, что $M_i<K$, $i=1, 2$, $M_1M_2=K$. Предположим, что $M_1\cap M_2=D>1$. По индукции и 2.2(1) в P имеются элементы $x_i\neq 1$ такие, что $x_i\in C_G(M_i)$, $i=1, 2$. Из $C_G(K)=K$ следует, что $\langle x_1\rangle\cap\langle x_2\rangle=1$. Но тогда $C_G(D)\geqq\langle K, x_1, x_2\rangle=G$, что противоречит $G'=K$ и 1.1(5).

Для $x\in P-\{1\}$ положим $K_x=C_K(x)$. Так как $K_x=Z(\langle K, x\rangle)$ и $\langle K, x\rangle\lhd G$, то $K_x\lhd G$. По лемме 1.1(5), примененной к действию $\langle x\rangle$ на K, имеем $K=K_x\times\overline{K}_x$. По аналогу теоремы Машке для конечных абелевых групп можем считать, что $\overline{K}_x$ инвариантна в G. По результату предыдущего абзаца K_x и $\overline{K}_x$-минимальные нормальные делители в G. Из $Z(G)=1$ следует, что P нециклическая. Пусть $x_1, \dots, x_{p+1}$-образующие различных подгрупп порядка p в $P, K_i=K_{x_i}$. Из $p+1>2$ следует, что $|K_i|=|K_j|$ для всех $i, j\leqq p+1$, при этом $K_1, \dots, K_{p+1}$-полный набор минимальных нормальных делителей группы G. Так как эти подгруппы K_i не покрывают K, то $K-(K_1\cup\ldots\cup K_{p+1})$ содержит элемент w. Но $N=\langle zwz^{-1}|z\in P\rangle\lhd G$. Отсюда следует, что $N=K$-цоколь Ремака группы G, и по теореме Гашюца в $\mathrm{Irr}\,(G)$ имеется точный характер, что противоречит доказанному. □

Лемма 2.10. *Пусть $1<u\leqq v$-такие вещественные числа, что $]u, v[\,\cap$ c. d. $G=\emptyset$. Тогда*

$$uv\,mc(G)+1\geqq\frac{(u-1)(v-1)}{g'}+(u+v)f(G).$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда c. d. $G\subseteqq\{1, u\}\cup\{v\}$.

Доказательство. Пусть $1<n\in$ c. d. G. Тогда $(n-u)(n-v)\geqq 0$, откуда $n^2+uv\geqq n(u+v)$, при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $n\in\{u\}\cup\{v\}$.

Обозначая d_n число характеров степени n в $\mathrm{Irr}\,(G)$, имеем

$$d_1+\sum_{n>1}d_n=r(G)=gmc(G) \tag{2.1}$$

$$d_1+\sum_{n>1}n^2\,d_n=g. \tag{2.2}$$

Умножая (2.1) на uv и складывая результат с (2.2), получаем

$$(uv+1)d_1+\sum_{n>1}(n^2+uv)d_n = \bigl(uv\,mc(G)+1\bigr)g. \tag{2.3}$$

По ранее сказанному и (2.3) имеем

$$\begin{aligned} g\bigl(uv\,mc(G)+1\bigr) &\geqq (uv+1)\,d_1+(u+v)\sum_{n>1} h\,d_n = \\ &= (uv-u-v+1)\,d_1+(u+v)\sum_{\mathrm{c.d.}\,G} nd_n = \\ &= (u-1)(v-1)\frac{g}{g'}+(u+v)gf(G) \end{aligned} \tag{2.4}$$

и неравенство доказано. Равенство в (2.4) имеет место тогда и только тогда, когда $n^2+uv=(u+v)n$ для всех $n\in\mathrm{c.\,d.}\,G-\{1\}$, откуда $n\in\{u\}\cup\{v\}$. □

Лемма 2.11. *Пусть p-наименьший существенный простой делитель g, $f(G)\geqq 1/p$. Тогда G содержит p'-холловскую подгруппу H по 2.7. Если H неабелева, то $G'=H'$ порядка $q\leqq\frac{1}{2}p(p+1)$, число q простое,*

Доказательство. По 2.7 имеем $H\lhd G$. Положим $\varepsilon=\varepsilon(p)=0$, если $p=2$, и 1, если $p>2$.

Так как в $\mathrm{Irr}_1(H)$ нет характеров степени, меньшей $p+1+\varepsilon$, то

$$h\geqq\frac{h}{h'}+(p+1+\varepsilon)\left(T(H)-\frac{h}{h'}\right)\geqq(p+1+\varepsilon)\frac{h}{p}-(p+\varepsilon)\frac{h}{h'},$$

откуда $\dfrac{p+\varepsilon}{h'}\geqq\dfrac{1+\varepsilon}{p}$, $h'\leqq\dfrac{p(p+\varepsilon)}{1+\varepsilon}$.

Если $p=2$, то $h'\leqq p^2=4$, откуда $h'=3$. Если $p>2$, то $h'\leqq\frac{1}{2}p(p+1)$, так что $h'=q$, q-простое число.

Если α-число характеров степени p в $\mathrm{Irr}\,(G)$, то по 2.2(3)

$$f(H)\geqq f(G)+\frac{p\alpha}{g} \tag{2.5}$$

(i) $p=2$. Тогда

$$g\geqq g/g'+2^2\alpha+3\bigl(T(G)-g/g'-2\alpha\bigr)=g/g'+4\alpha+3(g/2-g/g'-2\alpha)$$

откуда

$$\frac{2}{g'}\geqq\frac{1}{2}-\frac{2\alpha}{g}. \tag{2.6}$$

Из леммы 2.4 следует, что H нильпотентна, так что

$$\frac{1}{2}\leqq f(H)\leqq\frac{2q-1}{q^2},$$

откуда $q=3$ и $f(H)=5/9$; последнее следует из 2.8. По (2.5), $\frac{2\alpha}{g}\leqq\frac{5}{9}-\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$. Поэтому по (2.6), $\frac{1}{g'}\leqq\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$, так что $g'\leqq 4$. Но $3=h'$ делит g'; поэтому $g'=3$, $G'=H'$.

(ii) $p>2$.

Так как в $\mathrm{Irr}\,(G)$ нет характеров степени $p+1$, то

$$g\geqq\frac{g}{g'}+p^2\alpha+(p+2)\left(\frac{g}{p}-\frac{g}{g'}-p\alpha\right),$$

откуда

(2.7) $$\frac{p+1}{g'}\geqq\frac{2}{p}-\frac{2p\alpha}{g}$$

так что

(2.8) $$\frac{p+1}{g'}>\frac{2}{p}-2\left(f(H)-\frac{1}{p}\right)=\frac{4}{p}-2f(H).$$

По лемме 2.5 все характеры из $\mathrm{Irr}_1(H)$ имеют одну и ту же степень m; поэтому $f(H)=\frac{1}{q}+\frac{1}{m}-\frac{1}{mg}<\frac{2}{p}$. Тогда $\frac{4}{p}-2f(H)>0$, а из (2.8) следует $g'<(p+1)\Big/\left(\frac{4}{p}-2f(H)\right)$. Но, так как m делит $q-1$ и $m>p$, то четное $q-1\geqq\geqq 2m>2p$, так что

$$f(H)=\frac{1}{q}+\frac{1}{m}-\frac{1}{mq}<\frac{1}{q}+\frac{1}{m}<\frac{1}{2p}+\frac{1}{p}=\frac{3}{2p}.$$

Поэтому $\frac{4}{p}-2f(H)>\frac{4}{p}-2\cdot\frac{3}{2p}=\frac{1}{p}$. Следовательно,

$$g'<\frac{p+1}{1/p}=p(p+1)$$

откуда следует, что g'-простое число. Это влечет $g'=h'=q$. □

Лемма 2.12. *Пусть* $f(G)\geqq 1/2$, $G'=C_3$.

(1) *Если* $G'\leqq Z(G)$, *то* $G/Z(G)=C_3\times C_3$, $f(G)=5/9$.

(2) *Если* $G'\nleqq Z(G)$, *то* G *содержит абелеву подгруппу индекса* 2, $G/Z(G)=S_3$, $f(G)=2/3$.

Доказательство. (1) В этом случае G нильпотентна, $G=P\times H$, H абелева, $P\in\mathrm{Syl}_3(G)$, $f(P)\geqq 1/2>\frac{3^2+3-1}{27}$, так что по лемме 2.8 имеем $P/Z(P)=C_3\times C_3$, $f(P)=5/9$, откуда $G/Z(G)=C_3\times C_3$, $f(G)=f(P)=5/9$.

(2) В этом случае $G'\nleqq f(G)$ по 1.1(3) (так как G ненильпотентная). Поэтому $G=M\cdot G'$. Тогда $G/Z(G)=G/C_M(G')=S_3$, так что $C_G(G')$-абелева под-

группа индекса 2 в G. Далее, по 2.6(1) имеем

$$f(G)=f(G/Z(G)=f(S_3))=\frac{2}{3}. \quad \square$$

Лемма 2.13. *Пусть $G=A*B$-центральное произведение, $A'\cap B'=1$. Тогда $mc(G)=mc(A)mc(B)$, $f(G)=f(A)f(B)$.*

Доказательство. Положим $G=A*B=(\bar{A}\times\bar{B})/D$, где $\bar{A}\cong A$, $\bar{B}\cong B$, D изоморфна подгруппе из $Z(A)$ и $Z(B)$. Из $A'\cap B'=1$ следует $G'=A'\times B'\cong \cong \bar{A}'\times\bar{B}'=(\bar{A}\times\bar{B})'=\bar{G}'$, где $\bar{G}=\bar{A}\times\bar{B}$. Отсюда выводим $D\cap G'=1$. Теперь результат следует из 2.6(1). $\square$

§3. Завершение доказательства основной теоремы

Лемма 3.1. *Пусть ненильпотентная группа G имеет инвариантное абелево p-дополнение H. Если $f(G)>1/p$, то G содержит абелеву подгруппу индекса p.*

Доказательство. Пусть G-контрпример минимального порядка. Тогда p^3 делит g по 2.9.

Если все подгруппы индекса p в G нильпотентны, то $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ циклическая, $|P: P\cap Z(G)|=p$, так что $C_G(H)$-абелева подгруппа индекса p в G, противоречие. Итак, в G имеется ненильпотентная подгруппа индекса p (ее мы обозначим F). Из $f(F)\geqq f(G)>1/p$ и индукции следует, что в F имеется абелева подгруппа D индекса p. Так как $H<D\leqq C_G(H)\lhd G$, в $Z(G)$ имеется элемент c порядка p. По 2.6 и индукции в $\bar{G}=G/\langle c\rangle$ имеется абелева подгруппа $A/\langle c\rangle$ индекса p (отметим, что $\bar{G}$ ненильпотентна). По предположению $A'=\langle c\rangle$. Понятно, что A-подгруппа Фиттинга группы G.

Если в $Z(G)$ имеется отличная от $\langle c\rangle$ подгруппа $\langle y\rangle$ простого порядка, то в $G/\langle y\rangle$ по индукции (см. лемму 2.6) имеется абелева подгруппа $B/\langle y\rangle$ индекса p. Тогда

$$B=F(G)=A, \quad B'=A'\leqq\langle c\rangle\cap\langle y\rangle=1,$$

A абелева, противоречие. Итак, $Z(G)$-циклическая p-подгруппа.

Пусть M-минимальная подгруппа в G, и предположим, что $M<H$. Из $C_G(M)=A\ngeq P$ следует, что PM ненильпотентная. Поэтому по лемме 2.2(2) и индукции PM содержит абелеву подгруппу B индекса p. То гда из $C_G(M)=A$ следует $B<A$, и силовская p-подгруппа в A абелева, откуда A абелева, противоречие. Итак, H-минимальная нормальная подгруппа в G.

Из $x\in H-\{1\}$ следует $C_G(x)=A$. Поэтому, если $z\in G-A$, то $|G:C_G(x)|\geqq \geqq p|H|=ph$. Тогда по 2.1(1) имеем

$$mc(G)\leqq\frac{mc(H)}{p^2}+\frac{p+1}{pg^2}\cdot\frac{g(p-1)}{p}\cdot\frac{g}{ph}\leqq\frac{p^2+p-1}{p^5}+\frac{p^2-1}{p^3h}.$$

Из $mc(G)>f(G)^2>\dfrac{1}{p^2}$ (по лемме 2.3) следует $h\leqq p+1$. Но из $N_{PH}(p)=P$ следует $h\equiv 1 \pmod p$, так что $h\geqq p+1$. Итак, $h=p+1$.

По сказанному H и $\langle c\rangle$-единственные минимальные нормальные делители группы G. Поэтому сумма квадратов степеней точных характеров из $\mathrm{Irr}(G)$

равна $g-\left(\frac{g}{h}+\frac{g}{p}-\frac{g}{ph}\right)>0$, так что в $\operatorname{Irr}(G)$ имеется точный характер $\chi=\lambda^G$, где λ-линейный характер подгруппы T группы G (G является M-группой по известному критерию Хупперта). Из $1=\ker\chi \geqq \bigcup_G (T')^\chi$ следует, что $|G:T|>p$ (отметим, что c. d. $G\subseteqq\{1, p, p^2\}$ по теореме Ито). Поэтому $\chi(1)=p^2$.

Оценим g' сверху. Для $\bar{x}\in\bar{G}-\bar{A}$ имеем $|\bar{G}:C_{\bar{G}}(\bar{x})|=\bar{g}'=g'/p$ (здесь $\bar{G}=G/\langle c\rangle$) по 2.1(2). Поэтому для $x\in\bar{x}$ имеем $|G:C_G(x)|\geqq g'/p$, то есть $|C_G(x)|\leqq pg/g'$. Поэтому по 2.1(1) имеем

$$\frac{1}{p^2}<mc(G)\leqq\frac{mc(A)}{p^2}+\frac{p+1}{pg^2}\cdot\frac{g(p-1)}{p}\cdot\frac{pg}{g'}\leqq\frac{p^2+p-1}{p^5}+\frac{p^2+1}{pq'}$$

откуда $\frac{p^2-1}{pg'}>\frac{1}{p^2}-\frac{p^2+p-1}{p^5}=\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^5}$ $g'<\frac{p^4}{p-1}$. Так как $h=p+1$ делит g', то

$$g'\in\{p^2(p+1), p(p+1)\}.$$

Пусть $g'=p^2(p+1)$. Тогда

$$mc(G)\leqq\frac{p^2+p-1}{p^5}+\frac{p^2-1}{p\cdot p^2(p+1)}=\frac{p^3+p-1}{p^5}.$$

С другой стороны, по 2.10 с $u=p$, $v=p^2$ имеем

$$mc(G)>\frac{1}{p^3}\left\{\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^2(p+1)}+(p+p^2)\cdot\frac{1}{p}-1\right\}=$$

$$=\frac{p^3+p^2-2p+1}{p^5}>\frac{p^3+p-1}{p^5},$$

противоречие.

Пусть теперь $g'=p(p+1)$. Тогда

$$f(G/\langle c\rangle)=\frac{1}{h}+\frac{1}{p}-\frac{1}{ph}=\frac{2}{p+1},$$

$$f(G/H)\leqq\frac{2p-1}{p^2},$$

$$T(G)=|G/\langle c\rangle|f(G/\langle c\rangle)+|G/H|f(G/H)-g/g'+$$

$$+\frac{1}{p^2}\left(g-\frac{g}{p}-\frac{g}{h}+\frac{g}{ph}\right)\leqq\frac{g}{p}\cdot\frac{2}{p+1}+\frac{g}{p+1}\cdot\frac{2p-1}{p^2}-$$

$$-\frac{g}{p(p+1)}+\frac{1}{p^2}\left(g-\frac{2g}{p+1}\right)=\frac{g}{p(p+1)}+\frac{(3p-2)g}{p^2(p+1)}=\frac{(4p-2)g}{p^2(p+1)},$$

$$f(G)\leqq\frac{4p-2}{p^2(p+1)}\leqq\frac{1}{p},$$

противоречие. □

Отметим, что $\dfrac{4p-2}{p^2(p+1)}=\dfrac{1}{p}$ влечет $p=2$.

Лемма 3.2. *Если p-наименьший существенный простой делитель g и $f(G)>1/p$, то G содержит инвариантное абелево p-дополнение.*

Доказательство. По 2.7 группа G содержит инвариантное p-дополнение H. Пусть G-контрпример минимального порядка. Тогда $G'=H'$ простого порядка q по 2.11. Можем считать, что G не имеет нетривиального абелева прямого множителя. Тогда p-наименьший простой делитель g.

Пусть $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если $P\lhd G$, то $G=P\times H$, P неабелева по предположению, $f(G)=f(P)f(H)\leqq\dfrac{2p-1}{p^2}\cdot\dfrac{3}{2p}<\dfrac{1}{p}$* (так как $p>2$ по 2.11), противоречие. Итак, P не нормальный делитель в G.

Пусть x-элемент наименьшего порядка в P, не централизующий H. По индукции $G=\langle x, H\rangle$, так что $P=\langle x\rangle$ циклическая. Так как $x^p\in C_G(H)$ и $f(G/\langle x^p\rangle)=f(G)$ по 2.6(1), то по индукции $x^p=1$. Итак, $|G:H|=p$. Положим $|H|=h$, $|H'|=q=|G'|$. По 1.1(3), $G'\not\leqq f(G)$, так что $G=MG'$-полупрямое произведение с ядром M, M-абелева (и, очевидно, M максимальна в G). Далее, $C_G(G')=G'\times C_M(G')=G'\times Z(G)$, так что $f\big(G/Z(G)\big)=f(G)$ по 2.6(1). Поэтому по индукции $Z(G)=1$. Тогда G-группа Фробениуса с ядром $G'=H'$. Положим $g=mq$, $m/(q-1)$. Имеем c. d. $G=\{1,m\}$, $f(G)=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{mq}<\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}$.

Но p делит m и $p<m$; поэтому $m>p^2$. Кроме того, $q>2m>2p^2$, и тогда $f(G)<\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{2p^2}=\dfrac{3}{2p^2}<\dfrac{1}{p}$, противоречие.

Лемма 3.3. *Пусть $G-p$-группа, $g'=p^2$, $f(G)>1/p$. Тогда G содержит абелеву подгруппу индекса p или $Z(G)\geqq G'\cong C_p\times C_p$.*

Доказательство. Пусть G не содержит абелеву подгруппу индекса p. Предположим, что $G'\cap Z(G)$ циклическая, и пусть c-элемент порядка p в $G'\cap Z(G)$. Все характеры из $\mathrm{Irr}_1(G/\langle c\rangle)$ имеют одну и ту же степень p^a по лемме 2.5. Пусть $g=p^n$,

$$p^b=\min\{\tau(1)|\tau\in\mathrm{Irr}(G)-\mathrm{Irr}(G/\langle c\rangle)\}.$$

Тогда $p^{n-1}<gf(G)\leqq p^{n-2}+\dfrac{p^{n-1}-p^{n-2}}{p^a}+\dfrac{p^n-p^{n-1}}{p^b}$, откуда $\dfrac{1}{p^a}+\dfrac{1}{p^{b-1}}>1$, $b=1$. Итак, существует $\chi\in\mathrm{Irr}(G)-\mathrm{Irr}(G/\langle c\rangle)$ с $\chi(1)=p$. Имеем $\chi=\lambda^G$, где λ-линейный характер подгруппы H индекса p в G. Тогда $1<H'\lhd G$, откуда $c\in H'$. Но $1=\ker\chi\geqq H'\geqq\langle c\rangle$, противоречие с выбором χ. Итак, $G'\cap Z(G)$ нециклическая, $Z(G)\geqq G'\cong C_p\times C_p$. □

* $f(H)<\dfrac{3}{2p}$ по доказательству леммы 2.11.

Лемма 3.4. *Пусть G — p-группа, $G' \leqq Z(G)$,* $\exp G' = p$.

(1) (Русин) $$mc(G) = \frac{p}{g'}\left\{\frac{1}{p} - \frac{g'-1}{p(p-1)} + \sum_{|G'/K|=p} mc(G/K)\right\}$$

(2) $$f(G) = \frac{p}{g'}\left\{\frac{1}{p} - \frac{g'-1}{p(p-1)} + \sum_{|G'/K|=p} f(G/K)\right\}.$$

Доказательство. (1) и (2) доказываются совершенно одинаково. Докажем (2). Если $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, то $|G' : G' \cap \ker \chi| = p$. Поэтому

$$T(G) = g/g' + \sum_{I_1(G)} \chi(1) = \frac{g}{g'} + \sum_{|G'/K|=p} \sum_{I_1(G/K)} \chi(1) =$$

$$= \frac{g}{g'} - \frac{g}{g'}\frac{g'-1}{p-1} + p \cdot \frac{g}{g'} \sum_{|G'/K|=p} f(G/K). \quad \square$$

Лемма 3.5. (1) $[x, G] \cap Z(G) = D \leqq G$, $[x, G]D = [x, G]$, *так что* $[x, G]$-*обзединение смежных систем по* D.

(2) *Пусть* $H \lhd G, |G:H| = p$, $H' \leqq Z(G)$, $x \in G - H$. *Если* $[x, G] \cap H' = 1$, *то* $C_H(xa) = C_H(x) \cap C_H(a)$ *для* $a \in H$.

Доказательство. (1) Пусть $[x, a] = c \in D$ для $a \in G$, и пусть $b \in G$ Тогда $[x, ba] = [x, b]c$, $D[x, G] = [x, G]$.

Из $D \subseteqq [x, G]$ следует $DD = D$, так что $D \leqq G$.

(2) Для $b \in C_H(xa)$ имеем

$$b(xa) = [b, x]xba = [b, x]x[b, a]ab = [b, x][b, a](xa)b,$$

$$1 = [b, xa] = [b, x][b, a],$$

так что $[x, b] = [b, a] \in H' \cap [x, G] = 1$ откуда $C_H(xa) = C_H(x) \cap C_H(a)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть H-неабелева подгруппа индекса p в p-группе G, $f(G) > 1/p$. Если $|C_G(x)| \leqq g/p^2$ для всех $x \in G - H$, то существует $x \in G - H$ с $|C_G(x)| = g/p^2$. Кроме того, $|G' : H'| > p$.*

Доказательство. По 2.1(1) имеем

$$mc(G) \leqq \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^4}, amc(H) \leqq \frac{1}{h'} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{h'p^2}.$$

Поэтому

$$mc(G) \leqq \frac{1}{p^2h'} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^4h'} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^4h'}. \tag{3.1}$$

С другой стороны

$$mc(G) \geqq \frac{1}{p^3}\left\{\frac{(p-1)(p^2-1)}{g'} + (p^2+p)f(G) - 1\right\} > \frac{1}{p^2} + \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^3g'}. \tag{3.2}$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), получаем

$$\frac{1}{ph'} > \frac{p-1}{g'}, \quad g'/h' > p(p-1) \geqq p.$$

Если указанного в заключении элемента x не существует, то $|C_G(x)\leqq g/p^3$ для всех $\chi\in G-H$, так что по 2.1(1) имеем

$$mc(G) \leqq \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p+1}{pg^2}\cdot\frac{g(p-1)}{p}\cdot\frac{g}{p^3} \leqq$$

$$\leqq \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2-1}{p^5} = \frac{2p^2+p-2}{p^5} \leqq \frac{1}{p^2} < f(G)^2,$$

что противоречит 2.3.

Лемма 3.7. *Пусть неабелева p-группа G такова, что $Z(G)\geqq G'$, $g'=p^2$, $\exp G'=p$, $f(G)>1/p$. Тогда по крайней мере для $\dfrac{g'-1}{p-1}-1$ максимальных в G' подгрупп K имеем $f(G/K)=\dfrac{2p-1}{p^2}$. Если для некоторой максимальной в G' подгруппы K имеем $f(G/K)\neq\dfrac{2p-1}{p^2}$, то $f(G/K)=\dfrac{p^2+p-1}{p^3}$. В частности,* c. d. $G\subseteqq\{1, p, p^2\}$.

Доказательство. Лемма следует из таких фактов:

(1) Следующие друг за другом по убыванию значения $f(G)$ для p-группы G с $g'=p$ таковы: $\dfrac{2p-1}{p^2}, \dfrac{p^2+p-1}{p^3}, \dfrac{p^3+p-1}{p^4}, \ldots$.

(2) Из (1) и 3.4 следует первое утверждение леммы.

(3) В G' имеются две различные максимальные подгруппы K_1 и K_2 такие, что $f(G/K_i)=\dfrac{2p-1}{p^2}$, $i=1, 2$. Тогда c. d. $G/K_i=\{1, p\}$. Так как G изоморфна подгруппе из прямого произведения $G/K_1\times G/K_2$, то c. d. $G\subseteqq\{1, p, p^2\}$, откуда и следует нужный результат. □

Лемма 3.8. *Пусть $G-p$-группа с $Z(G)\geqq G', g'\geqq p^3$ и $f(G)>1/p$. Тогда* c. d. $G=\{1, p\}$.

Доказательство. Из лемм 3.3 и 3.7 следует $\exp G'=p$. Можем считать, что у G нет абелевой подгруппы индекса p. Если $\chi\in\mathrm{Irr}_1(G)$, то $|G'\colon G'\cap\ker\chi|=p$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $g'=p^3$.

Для $a\in G'$ положим $M(a)=\{x\in G|[x, G]\leqq\langle a\rangle\}$. Так как G класса нильпотентности 2, то $M(a)\leqq G$. Из $[M(a), G]\leqq\langle a\rangle$ следует, что $M(a)/\langle a\rangle= =Z(G/\langle a\rangle)$. Так как $G/\langle a\rangle$ неабелева, $|G\colon M(a)|\geqq p^2$. Положим $M= =\langle M(a)|a\in G'\rangle$. Имеем для $b\in G'-\langle a\rangle$:

$$[M(a), M(b)] \leqq \langle a\rangle\cap\langle b\rangle = 1.$$

Поэтому $M=M(a_1)*\ldots*M(a_k)$-центральное произведение, $M'=\langle M(a_i)' \mid 1\leqq i\leqq k\rangle$. Предположим, что $M'=G'$. Тогда

$$G'=M'=M_1'\times M_2'\times M_3',\quad M_i=M(a_i),$$

для подходящих a_1, a_2, a_3 таких, что $G'=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle$.

По лемме 2.13 имеем

$$mc(M)=mc(M_1)mc(M_2)mc(M_3)\leqq\left(\frac{p^2+p-1}{p^3}\right)^3<\frac{1}{p^2}<f(G)^2,$$

что противоречит леммам 2.2(2) и 2.3.

Итак, $M'<G'$, так что $M<G$.

Пусть $M\leqq H$ и H максимальна в G. Пусть x-такой элемент в G, что $|G:C_G(x)|=p$. Тогда $|[x,G]|=p$, так что $[x,G]=\langle b\rangle<G'$ и $x\in M(b)\leqq M$. Итак, для любого $x\in G-M$ имеем $|C_G(x)|\leqq g/p^2$ (отметим, что $Z(G)\leqq M(a)\leqq M$). Поэтому $|G':H'|>p$ по лемме 3.6. Так как H неабелева и $g'=p^3$, то $|H'|=p$. По лемме 3.6 в $G-H$ имеется элемент x с $|C_G(x)|=g/p^2$. Тогда $[x,G]$-подгруппа порядка p^2 в G'. Пусть $xa\in G-H$, $a\in H$ и $|C_G(xa)|=g/p^2$. Тогда $|C_H(xa)|=g/p^3=|C_H(x)|$. Предположим, что $H'<[x,G]$. Тогда $(G/H')'=G'/H'$ имеет порядок p^2. Но $[xH',G/H']=[x,G]/H'$ имеет порядок p. Поэтому $|G/H': C_{G/H'}(x,H')|=p$, так что $|G/H': Z(G/H')|=p$ по лемме 1.1(2) (ибо H/H'-абелева подгруппа индекса p в G/H'). По этой же лемме $|G'/H'|=p$, противоречие. Итак, $H'\cap[x,G]=1$, так что по 3.5(2) имеем $C_H(xa)=C_H(x)\cap C_H(a)$ для указанных выше x и a. Но тогда из $|C_H(xa)|=g/p^3=|C_H(x)|$ следует $C_H(xa)=C_H(x)$, откуда $C_H(x)=C_H(a)$. Положим $K=\{a\in H\mid C_H(x)\leqq C_H(a)\}$. Очевидно, $K\leqq H$. В этих обозначениях

$$\sum_{a\in H}|C_H(xa)|=\sum_{a\in K}|C_H(xa)|+\sum_{a\in H-K}|C_H(xa)|\leqq|K|\cdot|C_H(x)|+$$

$$+\frac{1}{p}(|H|-|K|)|C_H(x)|=\frac{g}{p^6}\left(\frac{g}{p}+(p-1)|K|\right).$$

Здесь использовано следующее из 3.5(2) неравенство $|C_H(xa)|\leqq\frac{1}{p}|C_H(x)|$ для $x\in H-K$. Поэтому из $G=xH=H\cup xH\cup\ldots\cup x^{p-1}H$ следует

$$\sum_{y\in G-H}|C_G(y)|=p\sum_{y\in G-H}|C_H(y)|\leqq$$

$$\leqq p(p-1)\frac{g}{p^4}\left(\frac{g}{p}+(p-1)|K|\right).$$

Из 2.1(1) получаем

$$mc(G)\leqq\frac{mc(H)}{p^2}+\frac{p+1}{pg^2}\cdot\frac{g(p-1)}{p}\left(\frac{g}{p}+(p-1)|K|\right)\leqq \tag{3.3}$$

$$\leqq\frac{p^2+p-1}{p^5}+\frac{p^2-1}{p^4}\left(\frac{1}{p}+\frac{(p-1)|K|}{g}\right)=$$

$$=\frac{2p^2+p-2}{p^5}+\frac{(p-1)(p^2-1)|K|}{p^4g}.$$

По 2.10 с $u=p$, $v=p^2$ имеем

$$(3.4)\qquad mc(G)\geqq\frac{1}{p^3}\left\{\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^3}+(p^2+p)f(G)-1\right\}>$$

$$>\frac{1}{p^2}+\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6}.$$

Из (3.3) и (3.4) следует

$$\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6}+\frac{1}{p^2}<\frac{(p-1)(p^2-1)|K|}{p^4g}+\frac{2p^2+p-2}{p^5}$$

откуда

$$\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6}\left(1-\frac{p^2|K|}{g}<\frac{2p^2+p-2-p^3}{p^5}\leqq 0,\right.$$

так что $|G:K|<p^2$, и поэтому $|G:K|=p=|G:H|$, $K=H$. Поэтому $C_H(x)\leqq\leqq C_H(a)$ для всех $a\in H$, откуда $C_H(x)\leqq Z(H)$. Тогда $C_G(C_H(x))\geqq\langle x, H\rangle=G$, то есть $C_H(x)\leqq Z(G)$. Так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p, то $|G\colon Z(G)|=p^3$. Если $\chi\in\mathrm{Irr}_1(G)$, то $\chi(1)^2\leqq|G\colon Z(G)|=p^3$, так что $\chi(1)=p$. Итак, c. d. $G=\{1, p\}$. □

Лемма 3.9. *Пусть G-неабелева p-группа. Если $f(G)>1/p$, то справедливо одно из утверждений:*

(1) *G содержит абелеву подгруппу индекса p.*

(2) *$G|Z(G)$ неабелева порядка p^3 и экспоненты p.*

(3) $G'\leqq Z(G)$, $\exp G'=p$.

Доказательство. Пусть лемма уже доказана для p-групп, чей порядок меньше $|G|$. Тогда по 2.2(2) и 2.6 любая собственная секция группы G одного из типов (1)—(3).

Фиксируем в $Z(G)$ элемент c порядка p, и полагаем $\bar{G}=G/\langle c\rangle$, $\bar{G}'=G'\langle c\rangle/\langle c\rangle$. Если $\bar{G}$ абелева, то G типа (3). Далее считаем, что $\bar{G}$ неабелева. Тогда $\bar{G}$ одного из типов (1)—(3).

(A) $\bar{G}$ типа (1), то есть $G/\langle c\rangle$ содержит абелеву подгруппу $H/\langle c\rangle$ индекса p. Тогда $H'=\langle c\rangle$ (в противном случае G типа (1) и все доказано), а централизаторы всех элементов из $\bar{G}-\bar{H}$ имеют один и тот же порядок $p|Z(\bar{G})|$ по 2.1(2) Далее, $g'>p^2$ по лемме 3.3. Поэтому по лемме 3.6 в $\bar{G}-\bar{H}$ имеется $\bar{x}$ с $|C_{\bar{G}}(\bar{x})|=\bar{g}/p^2$, и это верно для всех $\bar{x}\in\bar{G}-\bar{H}$. Здесь $\bar{g}=|\bar{G}|$. Далее, по 2.1(2). имеем $mc(G)=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{p^2-1}{p^2g'}$. По 2.1(2) и доказанному $\dfrac{\bar{g}}{p^2}=|G_G(\bar{x})|=\dfrac{\bar{g}}{\bar{g}'}$, откуда $\bar{g}'=p^2$, $g'=p^3$. Поэтому $c\in G'$. Кроме того, $|G\colon C_G(x)|\geqq p^2$ для всех $x\in G-H$. Поэтому по 3.6 существует $x\in G-H$ с $|G\colon C_G(x)|=p^2$. Закрепляем обозначение x за этим элементом. Положим $M=[x, G]=\{y_1=1, y_2, \dots, y_{p^2}\}$. Напомним, что $[x, G]=[x, H]$.

(A1) $c \notin M$. Из 3.5(1) следует, что $\langle c\rangle \cap M=1$.

Пусть $|C_G(xa)|=g/p^2$ для некоторого $a \in H$. Тогда $|C_H(xa)|=g/p^3=$ $=|C_H(x)|$. Как и в доказательстве леммы 3.8, $K=H$, $C_H(x)=Z(G)$, $G/Z(G)$ порядка p^3 (обозначения из 3.8) и экспоненты p. Тогда G типа (2) или (3) (так как из $G' \leqq Z(G)$ следует $\exp G'=p$ по 3.3).

(A2) $c \in M$. Тогда $\langle c\rangle \subseteqq M$ и $M\langle c\rangle=M$ по 3.5(1). Поэтому $|\overline{M}|=p$, где $\overline{M}=[\bar{x}, \overline{G}]$. В этом случае $|\overline{G}:C_{\overline{G}}(\bar{x})|=p$, что противоречит выбору $\bar{x}$.

(Б) $\overline{G}$ типа (2), то есть $\overline{G}/Z(\overline{G})$ неабелева порядка p^3 и экспонента $p>2$. По (A) можем считать, что $\overline{G}$ не типа (1).

Положим $\overline{F}=F/\langle c\rangle=Z(\overline{G})=Z(G/\langle c\rangle)$. Тогда $|G:F|=p^3$ и $Z(G)<F$. Пусть $F<H<G$ с $|H:F|=p$. Из строения $\overline{G}$ следует, что централизатор любого элемента из $\overline{H}-\overline{F}$ лежит в $\overline{H}$. Поэтому $y \in H-F \Rightarrow C_G(y) \leqq H$.

Так как $F \not\leqq Z(G)$ и G/F порождается любыми $p+2$ подгруппами порядка p, существует $t>0$ неабелевых подгрупп $H>F$ с $|H:F|=p$, при этом $t \geqq p^2$. Пусть H-одна из этих t подгрупп. Тогда $H'=\langle c\rangle$ (ибо $\overline{H}$ абелева), а из $C_G(x)=H$ следует $C_G(x)=C_H(x)$ $(x \in H-F)$, то есть $|G:C_G(x)|=p^3$ (так как $|H:C_H(x)|=p$, $|G:H|=p^2$).

Пусть среди $1+p+p^2$ подгрупп $H>F$ с $|H:F|=p$ точно $s \geqq 0$ аблевых. Тогда по сказанному в предыдущем абзаце $s \leqq p+1$. Из $x \in H-F$ следует $C_G(x)=H$ (H-одна из этих абелевых подгрупп), так что $|G:C_G(x)|=p^2$. Положим $|Z(G)|=p^r$. Тогда

$$r(G)=|Z(G)|+\frac{|F|-|Z(G)|}{p}+s\frac{p^{n-2}+p^{n-3}}{p^2}+$$

$$+(p^2+p+1-s)\frac{p^{n-2}-p^{n-3}}{p^3} \leqq p^r+\frac{p^{n-3}-p^r}{p}+$$

$$+(p+1)\frac{p^{n-2}-p^{n-3}}{p^2}+p^2\frac{p^{n-2}-p^{n-3}}{p^3}=$$

$$=p^r-p^{r-1}+2p^{n-3}-p^{n-5}.$$

Так как $n-r+1 \geqq 5$, получаем $mc(G) \leqq \dfrac{2p^2-1}{p^5}+\dfrac{p-1}{p^{n-r+1}} \leqq \dfrac{2p^2-1}{p^5}+\dfrac{p-1}{p^5}=$ $=\dfrac{2p^2+p-2}{p^5}<\dfrac{1}{p^2}<f(G)^2$, что противоречит лемме 2.3.

(В) $\overline{G}$ типа (3), то есть $Z(\overline{G}) \geqq \overline{G}'$ и $\exp \overline{G}'=p$. Так как $G' \not\leqq Z(G)$ по лемме 3.3, то $[G, G']=\langle c\rangle$.

Если в $Z(G)$ имеется отличная от $\langle c\rangle$ подгруппа $\langle d\rangle$ порядка p, то, благодаря (A) и (Б) можем считать, что $G/\langle d\rangle$ типа (3). Тогда $[G' G] \leqq \langle c\rangle \cap \langle d\rangle=1$, противоречие. Итак, подгруппа $Z(G)$ циклическая.

Фиксируем в $G'-Z(G)$ коммутатор y. Тогда $[y, G] \leqq [G', G]=\langle c\rangle$, так что $|[y, G]|=p=|G: C_G(y)|$. Положим $H=C_G(y)$.

Предположим, что существует $a \in G-H$ с $|G:C_G(a)|=p$.

(B1) H типа (1). Пусть A-абелева подгруппа индекса p в H. Тогда $\langle a, A\rangle/\langle c\rangle$-абелева подгруппа индекса p в $G/\langle c\rangle$, что невозможно, так как этот случай мы исключили.

(B2) H типа (2). Тогда $p>2$. Пусть $F/Z(H)=Z(H/Z(H))$. Тогда $|G:F|=p^3$, $F\lhd G$. Очевидно, $Z(G)\leqq Z(H)<F$. Далее, $C_H(a)=H\cap C_G(a)\lhd G$ и $C_H(a)$ имеет индекс p в H. Поэтому $H=C_H(a)*\langle y\rangle$-центральное произведение. Но тогда $C_G(Z(C_H(a)))\geqq\langle a, H\rangle=G$ и $Z(C_H(a))=Z(G)$. Так как H и $C_H(a)$ типа (2), то $C_H(a)/Z(C_H(a))$ неабелева порядка p^3 и экспоненты p. Поэтому $|G:Z(G)|=p^5$. Так как $F<H$ и $|F:Z(H)|=p$, то F абелева. Так как $aF\in Z(G/F)$ и $|G/F|=p^3$, то G/F абелева, и поэтому $G'\leqq F$. Из цикличности $Z(G)$ и $|F:Z(G)|=p^2$ следует, что F порождается тремя элементами. Так как $\bar{G}'=\bar{F}$ и $\exp\bar{G}'=p$, это дает $\bar{g}'\leqq p^3$. Следовательно, $g'\leqq p^4$. С другой стороны $g'>p^2$. Итак, $g'=p^r$, $r\in\{3, 4\}$.

Из $\chi(1)^2\leqq|G:Z(G)|=p^5$ для $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ следует $\chi(1)\leqq p^2$. Предположим, что χ точен. Имеем $\chi=\lambda^G$, где λ-линейный характер подгруппы T индекса $\chi(1)$ в G. Но $1=\ker\chi\geqq\bigcap_G(T')^x$. Так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p, это дает $|G:T|=p^2=\chi(1)$. Итак, G имеет ввиду цикличности $Z(G)$ точный неприводимый характер, и все такие характеры имеют одну и ту же степень p^2.

Положим $g=p^n$. Тогда

$$g=mc(G)=r(G)\leqq p^{n-r}+$$

$$+\frac{|G/\langle c\rangle|-g/g'}{g^2}+\frac{g-|G/\langle c\rangle|}{p^4}=p^{n-r}+p^{n-r-2}+p^{n-4}-p^{n-5}+p^{n-3},$$

$$mc(G)\leqq\frac{1}{p^r}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^{r+2}}+\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^5}.$$

Если $r=3$, то $mc(G)\leqq\dfrac{2p^2+p-2}{p^5}<\dfrac{1}{p^2}<f(G)^2$, противоречие с 2.3. Если $r=4$, то

$$mc(G)\leqq\frac{p^3+2p^2-p-1}{p^6}<\frac{1}{p^2}<f(G)^2,$$

снова противоречие с 2.3.

(B3) H типа (3), то есть $H'\leqq Z(H)$ и $\exp H'=p$. Положим $D=C_H(a)$. Так как $\langle D, y\rangle=H, \langle H, a\rangle=G$, то $\langle D, a, y\rangle=G$ и $Z(D)\leqq Z(G)$. Отметим, что $H=D*\langle y\rangle$-центральное произведение. Поэтому $D'\leqq H'\leqq Z(H)$, так что $D'\leqq Z(D)\leqq Z(G)$. Из цикличности $Z(G)$ и $\exp D'=\exp H'=p$ следует, что $D'=\langle c\rangle$ порядка p. Но $[a, D]=[a, C_H(a)]=1$; поэтому $\langle a, D\rangle'=D'=\langle c\rangle$, и тогда $\langle a, D\rangle/\langle c\rangle$-абелева подгруппа индекса p в $G/\langle c\rangle=\bar{G}$. Но этот случай был рассмотрен в (A).

Итак, для всех $a\in G-H$ имеем $|C_G(a)|\leqq g/p^2$. Тогда $|G':H'|>p$ по лемме 3.6.

Вычислим $|G':H'|$ другим способом. Зафиксируем $a\in G-H$ с $|G:C_G(a)|=$ $=p^2$ (a существуем по лемме 3.6), и положим

$$[a, G]=M=\{y_1=1, y_2=c, y_3, \ldots, y_{p^2}\}.$$

Так как $\langle y, c\rangle/\langle c\rangle\leqq Z(G/\langle c\rangle)$, то $1\neq[a, y]\in\langle c\rangle$, и обозначение $y_2=c$ оправдано. Множество M распадается на p смежных систем по $\langle c\rangle$ по лемме 3.5(1). Тогда, если $\overline{M}=[\bar{a}, \overline{G}]$, то $|\overline{M}|=p$. В G/H' имеется абелева подгруппа H/H' индекса p. Поэтому $G/H'=\langle H/H', aH'\rangle$, откуда $G'/H'=[H/H', aH']$ по лемме 2.1(2). Но из $|\overline{M}|=p$ следует $|G/H':C_{G/H'}(aH')|=p$; поэтому по 2.1(2) имеем $|G'/H'|=p$. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая (B), и вместе с тем лемма доказана. □

Пусть G-нильпотентная группа с неабелевыми $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$. Тогда $f(G)\leqq f(P)f(Q)\leqq \frac{2p-1}{p^2}\cdot\frac{2q-1}{q^2}<\frac{1}{p}$.

Поэтому, если G нильпотентна с $f(G)>\frac{1}{p}$, где p-наименьший существенный простой делитель g, то P-единственная неабелева силовская подгруппа в G. Это замечание вместе с результатами этого параграфа завершает доказательство основной теоремы.

Следствие 3.10. (Амицур—Айзекс—Пасман). *Если* c. d. $G=\{1,p\}$, *то справедливо одно из утверждений;*

(1) *G содержит абелеву подгруппу индекса p.*

(2) *$G/Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p.*

Доказательство. Очевидно, $f(G)>1/p$. Следствие очевидно, если G нильпотентна. Пусть G ненильпотентная. Из

$$g=\frac{g}{g'}+\sum_{I_1(G)}\chi(1)^2\equiv 0(\operatorname{mod} p)$$

следует, что p делит g/g'. Поэтому G содержит нормальную подгруппу N индекса p. По теореме Клиффорда c. d. $N\subseteqq\{1,p\}$, так что N содержит по индукции инвариантное абелево p-дополнение. Теперь результат следует из леммы 3.1. □

Из доказательства основной теоремы вытекает такое

Следствие 3.11. *Если p-наименьший существенный простой делитель g и $f(G)=1/p$, то $p=2$.*

§4. Список нерешенных вопросов

Ниже приводится большой список нерешенных вопросов. Он отражает наше мнение о том, в каком направлении следовало бы продолжить это исследование.

Далее везде p-наименьший существенный простой делитель порядка группы G.

4.1. Классифицировать все G с $f(G)=1/2$.

Решение этого вопроса даст классификацию всех групп G с $f(G)=1/p$.

4.2. Классифицировать все G с $mc(G)\geqq 1/p^2$.

Из леммы 2.3 следует, что из решения 4.2 следует решение 4.1.

4.3. Пусть $H\lhd G$. Всегда ли $f(G/H)\geqq f(G)$? Описать расположение H в G в случае, когда $f(G/H)=f(G)$.

Частный случай этого вопроса рассмотрен в лемме 2.6.

4.4. Классифицировать все G с $T(G)/r(G) \leqq p$ (это эквивалентно неравенству $f(G) \leqq pmc(G)$).

4.5. Пусть $m(G)$-минимум степеней точных характеров группы G. Классифицировать все G с $m(G)/g \geqq 1/p^2$.

4.6. Изучить расположение H в G в случае $m(H)=m(G)$.

4.7. Изучить расположение H в G в случае c. d. H=c. d. G.

4.8. Пусть $H<G$. Пусть для любых $\varphi \in \mathrm{Irr}_1(H)$, $\lambda \in \mathrm{Lin}(H)$, $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$, $\mu \in \mathrm{Lin}(G)$ имеем $[\varphi^G, \chi] \in \{0, 1\}$, $[\lambda^G, \chi] \in \{0, \chi(1)\}$, $[\lambda^G, \mu] \in \{0, 1\}$. Изучить расположение H в G.

4.9. Пусть G и G_1-группы, при этом наборы степеней неприводимых характеров групп G и G_1 совпадают (с учетом кратностей). Верно ли, что если G разрешима, p-разрешима, имеет инвариантное p-дополнение, простая, то и G_1 обладает соответствующими свойствами.

Профессор С. Д. Берман сообщил авторам, что набор степеней неприводимых характеров группы G не определяет набора длин классов сопряженных элементов.

4.10. Если $\chi(1) \in \mathrm{Irr}(G)$ с $\chi(1)^2 = \dfrac{g}{p}$ и $Z(G)=1$, то верно ли, что группа G разрешима? Будет ли G разрешимой, если $\chi(1)^2 > \dfrac{g}{p}$?

4.11. Верно ли, что существует лишь конечное число групп G с $G'=G$ и $f(G)=\varepsilon$? Аналогичный вопрос для mc.

4.12. Верно ли, что G разрешима, если $f(G)>4/15$? Классифицировать все неразрешимые группы с $f(G) \geqq 1/5$.

4.13. Классифицировать все группы G с c. d. $G=\{1, 2, 3, 6\}$. Более общо, классифицировать все группы G с c. d. $G=\{1, p, q, pq\}$, где p и q-различные простые числа.

4.14. Классифицировать все G с $f(G)-mc(G) \leqq 1/p^2$.

4.15. Классифицировать все G с $T(G)^2 \geqq g(r(G)-1)$.

4.16. Вычислить значения функций f и mc на простых и связанных с ними группах.

Отметим, что в вопросах 4.9 и 4.13 на p можно не делать никаких ограничений.

Содержание этой статьи излагалось в докладе, проситанном 8 января 1984 года на харьковском городском алгебраическом семинаре (руководитель-проф. С. Б. Берман). Благодарим участников семинара за обсуждение результатов статьи и полезные советы.

Цитированная литература

[1] C. T. C. Wall, On groups consisting mostly of involutions, *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **67** (1970), 251—262.

[2] B. Huppert, Endliche Gruppen, Bd. I, *Berlin,* 1967.

[3] J. A. Ernest, Central intertwining numbers for representations of finite groups, *Trans. AMS* **99** (1961), 499—508.

[4] Я. Г. Беркович, Соотношения между числами классов группы и подгруппы, Вопросы теории групп и гомологической алгебры, вып. 5, стр. 46—57, *Ярославль,* 1985.

[5] ISAACS J. MARTIN, Character theory of finite groups, *Acad. Press, New York,* 1976.
[6] D. RUSIN, What is the probability that two elements of a finite group commute?, *Pacific J. Math.* **82** (1979), 237—247.
[7] J. M. ISAACS, D. S. PASSMAN, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 877—903.
[8] S. A. AMITSUR, Groups with representations of bounded degree II, *Illinois J. Math.* **5** (1961), 198—205.

НЕКРАСОВ К. Г., КАЛИНИН, КАЛИНИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, МЕХМАТ
БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ
344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111, КВ. 18

(Поступило 27. XII. 1985 г.)