Конечные группы малой высоты

Я. Г. БЕРКОВИЧ

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты

Пусть χ — характер (всегда в этой статье конечной) группы G. Обозначим $h(\chi)$ максимум степеней неприводимых компонент χ. Положим $h(G)=$ $=\min\{h(\chi)|\chi$ — точный характер группы $G\}$, и назовем $h(G)$ высотой группы G. Отметим, что $h(A\times B)=\max\{h(A), h(B)\}$. Если $A\leqq G$, то $h(A)\leqq h(G)$. Очевидно, G изоморфна подгруппе прямого произведения нескольких групп $GL(h(G), \mathbf{C})$.

Группу $G=PQ$, $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$ циклическая порядка $p^a>p$, $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ нормальна в G, назовем $H(p^a, q^m, q^n)$-группой, если выполнены следующие условия:

(H1) Все G-допустимые подгруппы Q_0 из Q, отличные от Q, лежат в $Z(Q)$ — центре Q, $|Z(Q)|=q^n$, $|Q/Z(Q)|=q^m$.

(H2) P действует на Q/Q' точно и без неподвижных точек.

(H3) В $\mathrm{Irr}(G)$ имеется точный характер χ с $\chi(1)<p^a$.

Иногда для краткости $H(p^a, q^m, q^n)$-группу мы называем $H(p)$-группой.

Мы часто используем теорему о сдвиге: Если $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$ абелева, то $P\cap Z(G)\cap G'=1$.

Лемма 1.1. *Если $G=PQ$ — $H(p)$-группа, то $G'=Q$.*

В самом деле, $(G/Q')'=Q/Q'$ по теореме о сдвиге.

Секцией группы G называется эпиморфный образ некоторой её подгруппы. $H(p)$-группу G назовем $MH(p)$-группой, если любая её секция порядка, меньшего $|G|$, не является $H(p)$-группой. В § 3 дана полная классификация $MH(p)$-групп.

Пусть $p\in\pi(G)$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$. Группу G назовем M_p^1-группой, если для каждого $q\in\pi(G)-\{p\}$ она содержит $\{p, q\}$-холловскую подгруппу p-длины 1. Если в этом определении оторосить предположение о p-длине, получим определение M_p-группы. Указанные только что свойства переносятся на нормальные делителй и эпиморфные образы.

Пусть P — p-группа экспоненты p^a, натуральное число $t\leqq a$. Положим $P_t=\langle x\in P\,|\,|\langle x\rangle|=p^t,\ x\in C\cong C(p^a),\ C\leqq P\rangle$. Ясно, что P_t характеристична в P. Очевидно, если P — p-группа и $h(P)<p$, то P абелева. Отметим, что если $M\lhd G$, то возможно $h(G/M)>h(G)$.

Основная теорема. *Пусть G — M_p^1-группа с силовской p-подгруппой P экспоненты p^a, $a>0$; натуральное число $t\leqq a$, P_t не нормалный делитель G. Если $h(G)<p^{a-t+1}$, то справедливо одно из утверждений:*

(1) $t=a$, $P_t=P$ *абелева*, $p-1$ *и* $|G: N_G(P)|$ — *степени* 2.

(2) $t<a$. *Тогда* $H(p)$-*группа вкладывается в* G. *Кроме того.*

(2а) *Если* $p=2$, *то* $|G: N_G(P_t)|=p_1\dots p_s$, *где* p_i — *простое число Ферма или Мерсенна*, $1\leqq i\leqq s$.

(2б) *Если* $p>2$, *то* $p-1$ *и* $|G: N_G(P_t)|$ — *степени* 2.

В доказательстве основной теоремы важную роль играют минимальные ненильпотентные группы $G=PQ$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$ нормальна в G. Если $|Q\cap Z(G)|=q^c$, $|Q/Q\cap Z(G)|=q^b$, то G назовем $S(p^a, q^b, q^c)$-группой. Отметим, что b — порядок $q(\mathrm{mod}\, p)$.

Лемма 1.2. *Пусть* U — *собственная нормальная подгруппа неабелевой группы* W, *а* W/U — *циклическая группа порядка* p^n.

(1) *Пусть* $U\leqq V<W$ *с* $|W:V|=p$. *Если* $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ *и* χ_U *приводим, то и* χ_V *приводим.*

(2) *Если* U *абелева и* $h(W)<p^n$, *то* $C_W(U)>U$.

Доказательство. (1) Пусть $U<F\leqq W$, где F — наименьшая подгруппа с $\chi_F\in \mathrm{Irr}(F)$. Пусть $U\leqq H<F$ с $|F:H|=p$. Тогда χ_H приводим по выбору F и $\chi_H=\Theta_1+\dots+\Theta_p$, где различные $\Theta_i\in \mathrm{Irr}(H)$ сопряжены относительно F (то, что индекс ветвления χ_H равен 1, вытекает из теории проективных представлении; впрочем, Бернсайд доказал этот результат ещё до того, как была построена теория проективных представлений). Тогда $I_F(\Theta_i)$ — группа инерции Θ_i в F — совпадает с H, а из цикличности W/H следует $I_W(\Theta_i)=H$. Отсюда выводим

$$p = |W: I_W(\Theta_i)| = |W: H|,$$

так что $|W:H|=p$. Так как χ_H приводим, это доказывает (1).

(2) Пусть χ — точный характер группы G с $h(\chi)=h(W)$. Если τ — нелинейная неприводимая компонента χ, то τ_U приводим. Поэтому, если $U\leqq V<W$ с $|W:V|=p$, то τ_V приводим по (1). Так как W неабелева, $n>0$. Мы имеем по доказанному

$$h(V) \leqq h(\chi_V) = h(\chi)/p < p^{n-1} = |V: U|.$$

Если $V=U$, то по теореме Ито о степенях неприводимых характеров имеем $h(\chi)=1$ и W абелева, противоречие. Если же $U<V$, то по индукции $C_V(U)>V$. □

Лемма 1.3. *Пусть* $G=PQ$ — $H(p)$-*группа (обозначения из определения* $H(p)$-*групп). Тогда* Q *неабелева.*

Доказательство. Пусть Q абелева. Тогда из (H3) и леммы 1.2 (2) следует $C_G(Q)>Q$, так что $C_G(Q)\cap P\lhd G$, а это противоречит (H2). □

Лемма 1.4. *Пусть* $G-S(p^a, q^b, q^c)$-*группа*, $\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ *с* $\chi(1)>1$; $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$. *Если* $Q\cap Z(G)\leqq \ker\chi$, *то* $\chi(1)=p$. *Если* $Q\cap Z(G)\not\leqq \ker\chi$, *то* $\chi(1)=q^{b/2}$. *В частности, всегда* $\chi(1)\geqq p-1$; *если* $\chi(1)=p-1$, *то* $p-1=q^{b/2}$, $q=2$.

Доказательство. Заменяя, в случае необходимости, G на $G/\ker\chi$, можем предположить, что χ точен. Если $Q\cap Z(G)=1$, то $\chi(1)=p$ по уже упоминавшейся теореме Ито. Пусть теперь $Q\cap Z(G)>1$. Тогда Q экстраспециальна порядка q^{1+b}, так что степени всех её неприводимых нелинейных характеров равны $q^{b/2}$. По теореме Клиффорда $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$. Так как $\chi(1)^2 \leqq |G/Z(G)| = pq^b$, это дает $\chi(1) = q^{b/2}$. В рассматриваемом случае число b четное. Так как p делит $q^b - 1 = (q^{b/2}-1)(q^{b/2}+1)$, то в силу минимального свойства b, число p делит $q^{b/2}+1$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения леммы. □

Лемма 1.5. *Пусть G — M_p-группа с неинвариантной силовской p-подгруппой P. Если $h(G) < p$, то P абелева, $h(G) = p-1$ и числа $p-1$ и $|G\colon N_G(P)|$ — степени 2.*

Доказательство. Пусть χ — точный характер группы G с $h(\chi) = h(G) < p$. Для каждого $q \in \pi(G) - \{p\}$ в G имеется $\{p, q\}$-холловская подгруппа PQ с $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. По условию для некоторого q, не выиолняется $P \trianglelefteq PQ$. По теореме Фробениуса в этой группе PQ имеется $S(p^a, q^b, q^c)$-подгруппа H. Так как χ_H точен, он имеет нелинейную неприводимую компоненту, и из леммы 1.4 следует $h(\chi_H) = q^{b/2}$. В этом случае $b = 2k$ четное, p делит $q^b - 1 = (q^k - 1)(q^k + 1)$. Так как b — порядок $q (\mathrm{mod}\, p)$, то $p | (q^k + 1)$. Поэтому по лемме 1.4 имеем $p = 1 + q^k$, $q = 2$. Из этого результата вытекает утверждение об индексе. □

Далее везде считаем $t < a$.
Введем обозначение $\mathrm{c.\,d.}\; G = \{\chi(1) | \chi \in \mathrm{Irr}\,(G)\}$.

Лемма 1.6. *Пусть p-группа $G = S_1 \times \ldots \times S_n$ — прямое произведение экстраспециальных групп S_i, $1 \leqq i \leqq n$. Если $Q \leqq G$ и $|Q/Z(Q)| = |G/Z(G)|$, то $Q = G$.*

Доказательство. Предположим, что $Q < G$. Тогда $QZ(G) = Q\Phi(G) < G$, откуда $|QZ(G)/Z(G)| < |G/Z(G)|$. Но $QZ(G)/Z(G) \cong Q/Q \cap Z(G)$. Так как $Q \cap Z(G) \leqq Z(Q)$, это дает

$$|Q/Z(Q)| \leqq |Q/Q \cap Z(G)| < |G/Z(G)|,$$

противоречие. □

В § 2 доказывается, что группа G из отновной теоремы содержит секцию, являющуюся $H(p)$-группой, а, следовательно, и $MH(p)$-группой. Этот результат используется в § 3 при изучении $MH(p)$-групп. Отметим, что лишь леммы 3.1 и 3.2 нужны в § 4 для завершения доказательства основной теоремы.

§ 2. Начало доказательства основной теоремы

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2.1. *Если G, P, a, t такие же, как и в условии основной теоремы, $t < a$, P_t не нормальный делитель в G, то $H(p)$-группа вкладывается в G.*

Доказательство. Пусть лемма уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$. Пусть χ — точный характер группы G наименьшей степени среди всех точных характеров высоты $h(G)$.

Предположим, что $|\pi(G)|>2$. Для $q\in\pi(G)-\{p\}$ имеется в G $\{p,q\}$-холловская подгруппа PQ, $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$, p-длины 1. Если $P_t\lhd PQ$ при любом q, то $P_t\lhd G$, вопреки условию. Итак, пусть q выбрано так, что P_t не нормальный делитель в PQ. Так как $PQ<G$, $h(PQ)\leqq h(G)$, по индукции $H(p)$-группа вкладывается в PQ, а потому и в G. Далее считаем, что

(i) $$G = PQ,\quad Q\in\mathrm{Syl}_q(Q).$$

По условию $P\leqq Q_{q,p}(G)=D\trianglelefteq G$. Так как P_t не нормальный делитель в G, то P_t не нормальный делитель в D. Поэтому, если $D<G$, то из $h(D)\leqq h(G)$ следует, что $H(p)$-группа вкладывается в D. Далее считаем, что $D=G$, так что

(ii) $$Q\lhd G.$$

Возьмем в P циклическую подгруппу C порядка p^a. Если $C<P$, то $CQ<G$. Если C_t не нормальный делитель в CQ, то по индукции $H(p)$-группа вкладывается в CQ. Если же $C_t\lhd CQ$ при любом выборе C, то P_t централизует Q, так что $N_G(P_t)\geqq\langle P,Q\rangle=G$, вопреки условию. Далее считаем, что

(iii) P циклическая порядка p^a.

Понятно, что $G'\leqq Q$. Если $G'<Q$, то G содержит нормальную подгруппу L индекса q. Из P_t не нормальный делитель в G следует P_t не нормальный делитель в L, так что по индукции, примененной к паре $\{L,\chi_L\}$, $H(p)$-группа вкладывается в L. Поэтому далее считаем, что

(iv) $G'=Q$.

Пусть χ приводим и $\{\chi_J\}_1^s$ — полный набор его неприводимых компонент. Тогда $s>1$ и $K_J=\ker\chi_J>1$, $1\leqq J\leqq s$. Пусть χ_1 — нелинейная неприводимая компонента χ. Так как G/K_1 неабелева, $PK_1<G$. Пусть $P_t\leqq K_1$. Из того, что P_t не нормальный делитель в G следует P_t не нормальный делитель в K_1, так что P_t не нормальный делитель в PK_1. Поэтому $H(p)$-группа вкладывается в $PK_1<G$ по индукции. Пусть P_1 не нормальный делитель в K_1. Положим $|K_1|=p^c m$ с $(p,m)=1$. Тогда $c<t$; поэтому из $\chi_1(1)\leqq h(G)<p^{a-t+1}=p^{(a-c)-(t-c)+1}$, $|PK_1/K_1|=p^{a-c}$ следует, что $H(p)$-группа вкладывается в G/K_1 или G/K_1 содержит нормальную подгруппу H/K_1 порядка p^{t-c}. Пусть имеет место вторая возможность. Тогда $P_t\in\mathrm{Syl}_p(H)$, $H=P_tK_1$, $PH=PP_tK_1=PK_1<G$. Из того, что P_t не нормальный делитель в G следует $P_t\leqq H$ и $P_t\trianglelefteq PH$. Поэтому в PH вкладывается по индукции $H(p)$-группа.

Поэтому далее считаем, что

(v) $$\chi\in\mathrm{Irr}(G).$$

Предположим, что $U=O_p(G)>1$. Из $P\leqq C_G(U)\lhd G$ и (iv) следует $C_G(U)=G$, $U\leqq Z(G)$. Имеем по лемме Шура и теореме Клиффорда $\chi_U=\chi(1)\mu$, где μ — линейный характер U. Пусть λ — линейный характер группы G/Q с $\lambda_U=\bar{\mu}$. Тогда $(\lambda\chi)_U=\chi(1)1_U$, откуда $U\leqq\ker\lambda\chi$, $\lambda\chi\in\mathrm{Irr}(G)$. Из $P_t\leqq G$ следует $U<P_t$. Пусть $|U|=p^c$. Тогда $c<t$, $|P/U|=p^{a-c}$, $(\lambda\chi)(1)=\chi(1)<p^{a-t+1}=p^{(a-c)-(t-c)+1}$. По индукции, примененной к паре $\{G/U,\lambda\chi\}$, $H(p)$-группа вкладывается в G/U. Далее считаем, что

(vi) $$O_p(G) = 1.$$

Так как $\chi(1)<p^{a-t+1}\leqq p^{a-1+1}=p^a$, далее можем считать, что

(vii) $$t = 1.$$

Если P не действует точно на Q/Q', то, так как $Q' \leqq \Phi(Q)$, подгруппа P_1 централизует Q по теореме Ф. Холла о p'-автоморфизмах p-групп. Это влечет $P_1 \lhd G$ вопреки (vi). Поэтому

(viii) P действует точно на Q/Q'.

Из (iv) и теоремы о сдвиге следует

(ix) $$Z(G/Q') = 1.$$

Предположим, что G — не $H(p)$-группа. Тогда

(x) В Q имеется G-допустимая подгруппа $Q_0 < Q$ с $Q_0 \nleqq Z(G)$.

Пусть подгруппа Q_0 из (x). Тогда $PQ_0 < G$. Если P_1 не нормальный делитель в PQ_0, то по индукции, примененной к паре $\{PQ_0, \chi_{PQ_0}\}$, $H(p)$-группа вкладывается в PQ_0. Поэтому пусть $P_t \lhd PQ_0$. Тогда $C_G(Q_0) > P_t = P_1$. Из $P_t \trianglelefteq G$ следует $P_t \trianglelefteq C_G(Q_0)(\lhd G)$. Поэтому $P_t \trianglelefteq PC_G(Q_0)$. Если $PC_G(Q_0) < G$, то по индукции, примененной к паре $\{PC_G(Q_0), x_{PC_G(Q_0)}\}$, H(p)-группа вкладывается в $PC_G(Q_0)$ Поэтому далее считаем, что

(xi) $PC_G(Q_0) = G$ для любой G-допустимой подгруппы $Q_0 < Q$. Для каждой такой Q_0 имеем $P_t < C_G(Q_0)$.

Снова пусть Q_0 из (x). Так как $Q_0 \nleqq Z(G)$, то $\chi_{C_G(Q_0)}$ приводим. Так как $Q < C_G(Q_0)$, то и χ_Q приводим. Пусть H-подгруппа индекса p в G. Тогда χ_H приводим по 1.2 (1). Далее, $P_t \trianglelefteq H$, так как $H \lhd G$. Поэтому $\chi_H = \Theta_1 + \ldots + \Theta_p$, где различные $\Theta_i \in \mathrm{Irr}(H)$ сопряжены относительно G. Мы имеем $h(\chi_H) = h(\chi)/p < p^{a-1+1}/p = p^{a-1} = |P \cap H|$. Если $a-1 \neq t = 1$, то $H(p)$-группа вкладывается в H по индукции, примененной к паре $\{H, \chi_H\}$. Пусть $a-1=t=1$. Тогда $a=2$. Если $H' \neq Q$, то $C_G(H') \geqq \langle Q, P_1 \rangle = H$ по (xi), откуда следует, что H нильпотентна, а так как P_1 характеристична в $H \lhd G$, то $P_1 \lhd G$, вопреки (vi). Итак, $H' = Q$. Тогда P_1 действует на Q/Q' без неподвижных точек по теореме о сдвиге. Так как P циклическая, то и P не имеет неподвижных точен на Q/Q'. Итак, группа G удовлетворяет условиям (H1)—(H3) определения $H(p)$-групп и поэтому сама является $H(p)$-группой. Это завершает доказательство леммы. □

§ 3. Свойства $H(p^a, q^m, q^n)$-групп

В этом параграфе $G = PQ$ — $H(p^a, q^m, q^n)$-группа (обозначения — из определения $H(p)$-группы), $ES(p, m)$ экстраспециальная группа порядка p^{1+2m}

1°. В этом разделе $Z(Q)$ циклический.

Лемма 3.1. *Если $G = PQ$ — $H(p^a, q^m, q^n)$-группа с циклическим $Z(Q)$, то $n=1$ и справедливо одно и только одно из утверждений:*

(1) $$p^a = 9, \quad q^m = 2^6, \quad Q = ES(2, 3), \quad |Q| = 2^7, \quad \chi(1) = 8,$$
$$Z(Q) = Z(G).$$

(2) $$p = 2, \quad q = 2^a - 1, \quad Q = ES(q, 1), \quad |Q| = q, \quad \exp Q = q^3, \quad \chi(1) = q,$$
$$Z(Q) = Z(G).$$

(3) $$p = 2, \quad a = 4, \quad q^m = 3^4, \quad Q = ES(3, 2), \quad |Q| = 3^5, \quad \exp Q = 3,$$
$$\chi(1) = 9, \quad Z(Q) = Z(G).$$

(4) $$p = 2, \quad q = 2^{a-1}+1, \quad Q = ES(q, 1), \quad \exp Q = q, \quad |Q| = q^3,$$
$$\chi(1) = q, \quad Z(Q) = Z(G).$$

(5) $$p = 2, \quad q = 2^{a-1}-1, \quad Q = ES(q, 1), \quad \exp Q = q,$$
$$|Q| = q^3, \quad \chi(1) = q, \quad Z(Q) = Z(G).$$

(6) То же тчо и в (5), но $Z(G)=1$, $\chi(1)=2q$.

Доказательство. Предположим, что $n>1$. Тогда Q содержит нормальную подгруппу $R \cong C(p) \times C(p)$. Из $R \cap Z(Q) > 1$ следует, что $R \cap Z(Q) = Z_0 \cong \cong C(p)$. Положим $L = \langle R | R$ — нормальная подгруппа типа (p, p) в $Q\rangle$. Тогда L характеристична в Q, так что L нормальна в G. Кроме того, L/Z_0 элементарная и $L \not\leqq Z(Q)$, так как L нециклическая, а $Z(Q)$ циклическая. Из (H1) следует $L=Q$. Если $q>2$, то $\exp L = q$, что противоречит $n>1$. Пусть $q=2$. Тогда $Z(Q)=Z(G)$, $Q'=Z_0$ и P централизует $Z(Q)/Q'$, что противоречит (H1). Итак, $n=1$. Так как $Q/Z(Q)$ элементарная и $|Z(Q)|=q$, то $Q'=\Phi(Q)=Z(Q)$, $Q=ES(q, m/2)$ — экстраспециальная группа порядка q^{1+m}. По (H1) и (H2) группа P действует на $Q/Z(Q)$ точно и неприводимо. Поэтому $G/Z(Q)$-группа Фробениуса с ядром $Q/Z(Q)$. Это дает $p^a|(q^m-1)$, $q^m-1=(q^k-1)(q^k+1)$, $m=2k$. Так как c. d. $Q=\{1, q^k\}$ и χ_Q не имеет линейный компонент по теореме Клиффорда, $q^k|\chi(1)<p^a$. Поэтому $p^a \geqq q^k+1$, так что $p^a \nmid (q^k-1)$.

(i) p^a делит q^k+1. Так как $p^a \geqq q^k+1$, это дает $p^a=q^k+1$. Отметим, что $a>1$.

Пусть $k>1$. Тогда $p^a=9$, $q^k=8$, и G типа (1).

Пусть $k=1$. Тогда $q=p^a-1$, $p=2$ и q — простое число Мерсенна. Получается группа типа (2); если мы докажем, что центр Q совпадает с центром группы G. Предположим, что $C_G(Z(Q))=H<G$. Тогда $|G:H|=2$, χ_H приводим. Поэтому $\chi(1) \geqq 2q^k > p^a$, противоречие. Итак, $Z(Q)=Z(G)$. Кроме того, если $k>1$, то $\chi(1)=8$; если же $k=1$, то $\chi(1)=q$.

(ii) p^a не делит q^k+1.

Так как $p^a|(q^k+1)(q^k-1)$, то $p|(q^k+1)$, $p|(q^k-1)$, откуда а $p=(q^k-1, q^k+1)=2$. Теперь мы видим, что

$$p^a = 2^a \in \{2(q^k-1), 2(q^k+1)\}.$$

Пусть $2^a=2(q^k-1)$. Тогда $q^k=1+2^{a-1}$. Если $k>1$, то $q^k=9$, $2^{a-1}=8$, $2^a=16$, $Q=ES(3, 2)$ — экстраспециальная группа порядка 3^5. Как и в (i), показывается, что центр Q совпадает с центром G. Если $k=1$, то $q=1+2^{a-1}$ — простое число Ферма, Q — неабелева группа порядка q^3 и экспоненты q. Предположим, что $H=C_G(Z(Q))<G$. Тогда χ_H приводим, так что и χ_Q приводим. Отсюда выводим $\chi(1) \geqq 2q^k$. Так как $\chi(1)<p^a$, это влечет $q^k=q=2^{a-1}-1$. Так как $|G:H|$ делит $q-1=2(2^{a-2}-1)$, то $|G:H|=2$. Легко проверить, что

$$\text{c.d.} \quad H = \{1, 2^{a-1}, q\}, \quad \chi(1) \geqq 2q = 2^a-2,$$

и теперь ясно, что $\chi(1)=2^a-2$. Пусть $r(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G. Мы имеем

$$r(G)=|G/G'|+\frac{q^2-1}{2^a}+\frac{q-1}{2}+(2^{a-1}-1)\cdot\frac{q-1}{2}=$$

$$=2^a+\frac{q^2-1}{2(q-1)}+2^{a-2}(q-1)2^{a-2}(q+3)+\frac{q-1}{2}.$$

С другой стороны,

$$|\mathrm{Irr}(G)|=2^a+\frac{q^2-1}{2^a}+\frac{|G|-|G/Z(Q)|}{(2q)^2}=2^a+\frac{q^2-1}{2(q+1)}+\frac{2^aq^2(q-1)}{4q^2}=$$

$$=2^{a-2}(q+3)+\frac{q-1}{2}.$$

Равенство $|\mathrm{Irr}\,(G)|=r(G)$ выполнено.

$$2^{a-2}q+2^{a-2}+\frac{q+1}{2}=2^{a-2}q+3\cdot2^{a-2}+\frac{q-1}{2}$$

Итак, во всех случаях

$$Z(Q)=Z(G),\quad\square$$

Из леммы 3.1 следует, что $H(p)$-группа PQ с циклическим $Z(Q)$ является $MH(p)$-группой.

2°. В этом разделе мы классифицируем все $MH(p)$-группы PQ с нециклическим $Z(Q)$.

Лемма 3.2. *Пусть $G=PQ$ — $MH(p)$-группа (обозначения — из определения $H(p)$-групп) с нециклической подгруппой $Z(Q)$. Тогда $a=2$, $p-1=2^r$, $q=2$, $\chi(1)=p(p-1)$.*

Доказательство. Из нецикличности $Z(Q)$ следует приводимость χ_Q. Пусть H — подгруппа индекса p в G. Тогда χ_H приводим по лемме 1.2(1). Поэтому $h(\chi_H)=\chi(1)/p<p^{a-1}$. Так как $H(p)$-группа не вкладывается в H и $P_1\trianglelefteq H$, это по лемме 2.1 влечет $a-1=t=1$, $a=2$, и теперь применение леммы 1.5 дает $h(\chi_H)=p-1=2^r$, $q=2$. Поэтому $\chi(1)=p(p-1)$. $\square$

Далее пусть H всегда означает подгруппу индекса p в G. Положим $\chi_H=\Theta_1+\ldots+\Theta_p$, где различные $\Theta_i\in\mathrm{Irr}\,(H)$ сопряжены относительно G. Так как $(|H/Q|,\Theta_i(1))=(p,p-1)=1$, то $(\Theta_i)_Q\in\mathrm{Irr}\,(Q)$.

Лемма 3.3. *$m=2rp$, где $p-1=2^r$.*

Доказательство. Пусть S — минимальная ненильпотентная подгруппа в H. Так как $h(\chi_S)\leqq h(\chi_H)=p-1$ и χ_S имеет нелинейную неприводимую компоненту, а по лемме 1.4 имеем c. d. $S\subseteqq\{1,p,2^r\}$, то $h(\chi_S)=p-1=2^r$, так что S — $S(p,2^{2r},2^e)$-подгруппа с $c>0$. Пусть $P_1\in\mathrm{Syl}_p(S)$, $P_1<P$. P-модуль $Q/Z(Q)$ равен прямой сумме $s\leqq p$ P_1-модулей, P-сопряженных P_1-модулю $S'Z(Q)/Z(Q)$ (из некоммутативности S' следует $S'\not\leqq Z(Q)$). Поэтому $|Q/Z(Q)|=2^{2rS}$, $s\leqq p$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $S' \cap Z(Q) = Z(S')$. Очевидно, $S' \cap Z(Q) \leqq Z(S')$. Допустим, что $S' \cap Z(Q) < Z(S')$. Тогда $S'Z(Q)/Z(Q) \cong \cong S'/S' \cap Z(Q)$ некоммутативна, а это противоречит коммутативности $Q/Z(Q)$. Итак, $S' \cap Z(Q) = Z(S')$ и размерность $Q/Z(Q)$ над $GF(2)$ равна $2rs$. Так как $G/Z(Q)$-группа Фробениуса по (H1), имеем

$$|Q/Z(Q)| = 2^{2rS} \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad p = 1 + 2^r.$$

Поэтому $(2^{2r}-1)(1+2^{2r}+\ldots+2^{2r(s-1)}) \equiv 0(\mathrm{mod}(1+2^r)^2)$, откуда $1+2^{2r}+\ldots+ +2^{2r(s-1)} \equiv 0(\mathrm{mod}\, 1+2^r)$. Но $2^{2r} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 1+2^r)$. Поэтому

$$1 + 2^{2r} + \ldots + 2^{2r(S-1)} \equiv s \equiv 0(\mathrm{mod}\, 1 + 2^r).$$

Итак, $s = p$, $m = 2rp$. □

Лемма 3.4. $Z(H) = Z(Q)$, $H' = Q$.

Доказательство. Из $h(\chi_H) = p-1$ следует $h(\chi_{P_1Z(Q)}) < p$, так что $P_1Z(Q)$ абелева по лемме 1.2 (2). Это доказывает первое равенство. Если $H' < Q$, то $C_G(H') \geqq \langle Q, P_1 \rangle = H$, и H нильпотентна. Тогда $P_1 \lhd G$, что противоречит (H2). □

Лемма 3.5. $\ker \Theta_i \nleqq Z(Q)$, $H/\ker \Theta_i \cong S(p, 2^{2r}, 2^1)$.

Доказательство. Мы знаем, что $(\Theta_i)_Q \in \mathrm{Irr}\,(Q)$. Понятно, что $\ker \Theta_i \leqq Q$. Отсюда следует цикличность $Z(Q/\ker \Theta_i)$,

$$|Q/\ker \Theta_i\colon Z(Q/\ker \Theta_i)| = \Theta_i(1)^2 = 2^{2r} < 2^{2rp} = |Q/Z(Q)|.$$

Пусть $M < Z(Q)$ такова, что $Z(Q/M)$ циклическая. Так как $Q/Z(Q)$ элементарная, это дает

$$|Q/M\colon Z(Q/M)| \geqq 2^{2rp-1} > 2^{2r} = |Q/\ker \Theta_i\colon Z(Q/\ker \Theta_i)|.$$

Поэтому $\ker \Theta_i \nleqq Z(Q)$. Пусть $\bar{F} = F/\ker \Theta_i$ — минимальная ненильпотентная подгруппа в $\bar{H} = H/\ker \Theta_i$. Так как

$$|Q/\ker \Theta_i\colon Z(Q/\ker \Theta_i)| = 2^{2r}$$

то F — $S(p, 2^{2r}, 2^c)$-подгруппа с $c > 0$. Но $(\Theta_i)_F$ точен, поэтому $c = 1$. Так как $\bar{F}Z(\bar{Q}) = \bar{Q}$, то $\bar{F}$ — $S(p, 2^{2r}, 2^1)$-группа. Теперь ясно, что $\bar{H} = \bar{F}Z(\bar{H})$. Все доказано, если $|Z(\bar{H})| = 2$. Пусть, однако, $|Z(\bar{H})| = 2^s$ с $s > 1$. Тогда $|Z(\bar{Q})| = 2^s$. Так как $\bar{Q}$ класса 2 с циклическим центром, это дает $|\bar{Q}'| = 2$. Так как у $\bar{H}/\bar{Q}'$ силовская 2-подгруппа абелева, по теореме о сдвиге имеем $\bar{H}' < \bar{Q}'$. Это дает $H' < Q$, вопреки лемме 3.4. Итак, $|Z(\bar{H})| = 2$, и тогда $\bar{H} = \bar{F}$, $\bar{H}$ — $S(p, 2^{2r}, 2^1)$-группа. □

Лемма 3.6. $Q = Q^1 \times \ldots \times Q^p$, *где экстраспециальные* Q^i, $1 \leqq i \leqq p$, *порядка* 2^{1+2r} *сопряжены относительно* G.

Доказательство. Положим $Q^i = Q/\ker \Theta_i$. Тогда Q^i экстраспециальная порядка 2^{1+2r} по лемме 3.5. Из $\bigcap_i \ker \Theta_i = 1$ следует, что Q изоморфна подгруппе из $F = Q^1 \times \ldots \times Q^p$. Тогда $|Q/Z(Q)| = 2^{2rp} = |F/Z(F)|$, так что $Q = F$ по лемме 1.6 (мы отождествили Q с подходящей подгруппой из F). Положим $P=\langle x\rangle$ (тогда $x^p\in N_G(Q^1)$), $U^2=(Q^1)^x, \dots, U^p=(U^{p-1})^x$. Подгруппа $D=Q^1U^2\dots U^p$ нормальна в G. Так как $D\not\subseteq Z(Q)$, это дает $D=Q$. Но $|Q|=|Q^1||U^2|\dots|U^p|$ и $Q^1, U^2, \dots, U^p\lhd Q'$. Это дает $Q=Q^1\times U^2\times\dots\times U^p$. □

В частности, все $Q/\ker\Theta_i$ изоморфны по теореме Ремака—Шмидта.

§ 4. Завершение доказательства основной теоремы

Пусть G удовлетворяет условию основной теоремы. Благодаря 1.4 можем считать, что $t<a$.

Для $q\in\pi(G)-\{p\}$ возьмем в G существующую по условию $\{p,q\}$ — холловскую подгруппу $T(p,q)=PQ$, $Q\in\mathrm{Syl}_p(G)$, такую, что $l_p(PQ)$ — p-длина $T(p,q)=PQ$ равна 1.

Пусть $p=2$. Если q — не простое число Ферма или Мерсенна, то $H(2)$-группа не вкладывается в $T(p,q)$ по леммам 3.1 и 3.2, так что по лемме 2.1 имеем $P_t\lhd T(p,q)$ и q не делит $|G\colon N_G(P_t)|$.

Пусть $p>2$. Если p — не простое число Ферма или $q>2$, то $H(p)$-группа не вкладывается в $T(p,q)$ по леммам 3.1 и 3.2. Поэтому $P_t\lhd T(p,q)$ по лемме 2.1, так что q не делит $|G\colon N_G(P_t)|$. Так как P_t не нормальный делитель в G, то при некотором q в PQ вкладывается $H(p)$-группа, так что p — простое число Ферма, а $|G\colon N_G(P_t)|$ — степень 2 по леммам 3.1 и 3.2.

Неизвестно, можно ли в условии теоремы M_p^1 заменить на M_p. В доказательстве условие M_p^1 используется существенно.

В качестве следствия доказательства леммы 2.1 получается такой результат:

Следствие. *Пусть G, P, a, t такие же, как и в условии основной теоремы Если $h(G)<p^{a-t}(p-1$ и p нечетное, то $P_t\lhd G$.*

В случае, когда P циклическая, Д. Винтер [1] доказал, что $P_t\lhd G$, если G — линейная группа степени, меньшей $p^{a-t}(p-1)$. При этом утверждается в [1], что это верно при любом p. Однако при $p=2$ его рассуждение недостаточно для доказательства такого утверждения*.

Цитированная литература

[1] D. L. Winter, Finite p-solvable linear groups with a cyclic Sylow p-subgroup, Proc. AMS **18** (1967), 341—343.

(Поступило 26, IX, 1984 г.)

* Добавлено при коррелпре 2. I. 1987. Пусть G-группа из леммы 3.1. Так как G/Q изоморфна нодгруппе из $SL(2, p)$ в п. п. (4). и (5), то $q=3$ в п. (4), группы из п(5) не существует.