Effektives Lösen von Thue Gleichungen

A. PETHŐ (Debrecen) und R. SCHULENBERG (Köln)

1. Einleitung

Es sei $F(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ eine homogene irreduzible Form vom Grad $n \geqq 3$ und $0 \neq m \in \mathbf{Z}$. Die diophantische Gleichung

$$F(x, y) = m \tag{1}$$

wird Thue Gleichung genannt, wenn ihre Lösungen in ganzen Zahlen gesucht sind. Für ihre reiche Literatur verweisen wir auf die Bücher Mordell [10] und Evertse [7]. Wir wollen hier nur die zwei wichtigsten Ergebnisse zitieren. Thue [13] bewies, daß (1) nur endlich viele Lösungen besitzt.

Baker [1] gab eine effektive, nur von der Koeffizienten von $F(x, y)$, n und m abhängende obere Schranke für den absoluten Betrag der Lösungen an.

Das Bakersche Resultat ermöglicht theoretisch die Bestimmung aller Lösungen, aber die Größe der Schranke macht ihre praktische Anwendung schwierig.

Baker und Davenport [2] arbeiteten ein auf einem Transferenzprinzip beruhenden Verfahren aus, womit die Bakersche Schranke in gewissen Fällen wesentlich vermindert werden kann. Diese Methode wurde später von Ellison [5] und Ellison, Ellison, Pesek, Stahl und Stall [6] auf die Lösung gewisser Thue Gleichungen vom Grad 3 angewandt.

Sie konnten nur in dem Fall Thue Gleichungen lösen, wenn der Körper $Q(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $F(x, 1)$ ist, nur eine Grundeinheit hat, weil man zu der Zeit nur einfache Approximationsprobleme mit der Anwendung des Kettenbruchalgorithmus lösen konnte. Neuerdings haben Lenstra, Lenstra und Lovász [9] den Basisreduktionsalgorithmus entdeckt, womit man unter anderem auch eine Lösung des simultanen Approximationsproblems

$$1 \leqq q \leqq A \quad \|\alpha_i q\| \leqq 2^{(n+1)/4} A^{-1/n} \quad i = 1, \ldots, n$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Q$ bestimmen kann.

Dies nahmen wir zum Anlaß, ein auf der Baker-Davenportsche Methode beruhendes Komputerprogramm zu entwickeln, welches eine gewisse Klasse der Thue Gleichungen lösen kann. Wir wollen hier über dieses Komputerprogramm berichten.

Diese Arbeit wurde geschrieben, als der erstgenannte Author mit einem Stipendium der Alexander von Humboldt—Stiftung an der Universität zu Köln arbeitete.

In 2. und 3. stellen wir dar, wie man (1) auf ein inhomogenes Approximationsproblem mit endlich vielen Lösungen zurückführen kann. Hier benutzen wir die wohlbekannte Methode von Baker [1], aber auch Ideen von Győry und Papp [8] sowie Waldschmidt [14]. In 4. beweisen wir eine Verallgemeinerung des Lemmas von Baker und Davenport [2], welche ermöglicht, die ursprünglich sehr große obere Schranke *wesentlich zu verkleinern*. Wie man das hier auftretende simultane Approximationsproblem lösen kann, das ist in 5. beschrieben. Zuletzt in 6. geben wir einige Ergebnisse an.

2. Bezeichnungen, Vorbereitungen

Sei $F(x, y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n\in\mathbf{Z}[x, y]$ ein homogenes irreduzibles Polynom mit $a_0\neq 0$. Sei weiter α eine Nullstelle von $F(x, 1)$; $K=Q(\alpha)$ und 0_K der Ring der ganzen Elementen von K. Sei $n=s+2t$, bezeichnen $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(s)}$, $\tau^{(s+1)}, \overline{\tau^{(s+1)}}, \ldots, \tau^{(s+t)}, \overline{\tau^{(s+t)}}$ die verschiedene Konjugierten des Elementes $\tau\in K$ und $\overline{|\tau|}=\max\limits_{1\leqq i\leqq n}|\tau^{(i)}|$. Sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ ein Grundeinheitensystem der Gruppe der Einheiten $\mathscr{E}$ in 0_K mit Norm $+1$, wobei bekanntlich $r=s+t-1$. Setzen wir

$$c_1 = \max\left\{|\log\overline{|\varepsilon_i|}|,\quad i=1, \ldots, r\right\}$$

$$c_2 = \prod_{j=1}^{r}\max\left\{\log\overline{|\varepsilon_j|}, 1\right\}$$

und $T=\max\limits_{1\leqq i<j\leqq n}|\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)}|/\min\limits_{1\leqq i<j\leqq n}|\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)}|$, $M=m/a_0$. Bezeichne R den Regulator von $\mathscr{E}$ und seien

$$c_3 = (nrc_1+4\log|M|)/2(n-1)$$

$$c_4 = nR/(n-1)r!2^{t+1}c_2$$

$$c_5 = \log T+c_3+1$$

und

$$B_0 = (\log T+c_3-1)/c_4.$$

Mit der Anwendung der zahlengeometrische Darstellung von K kann man das folgende Lemma einfach beweisen (Siehe z.B. [8]).

Lemma 1. *Es gibt eine eindliche Menge $\mathfrak{A}\subseteq K$ mit den folgenden Eigenschaften*

(i) *Für alle $\gamma\in\mathfrak{A}$, $Norm_{K/\mathbf{Q}}(\gamma)=M$ und $\left|\log\overline{|M^{-1/n}\gamma|}\right|\leqq rc_1/2$*

(ii) *Ist $x, y\in\mathbf{Z}$ eine Lösung von (1), dann gibt es ein $\gamma\in\mathfrak{A}$ und $b_1, \ldots, b_r\in\mathbf{Z}$ mit*

$$x-\alpha y = \gamma\varepsilon_1^{b_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{b_r}. \tag{2}$$

Für alle $\gamma\in\mathfrak{A}$ und paarweise verschiedene Indizes j, k, l mit $1\leqq j, k, l\leqq n$ seien

$$\delta_u(j, k, l, \gamma) = \delta_u = \begin{cases}\varepsilon_u^{(k)}/\varepsilon_u^{(j)} & u=1, \ldots, r\\ \dfrac{\alpha^{(k)}-\alpha^{(l)}}{\alpha^{(j)}-\alpha^{(l)}}\dfrac{\gamma^{(j)}}{\gamma^{(k)}} & u=r+1.\end{cases}$$

Satz A. *Sei K totalreell; $x, y \in \mathbf{Z}$ eine Lösung von* (1) *und γ sowie $b_1, \ldots, b_r$ durch* (2) *definiert. Es gibt paarweise verschiedene Indizes j, k, l mit $1 \leqq j, k, l \leqq n$ so daß*

$$0 < \left| b_1 \log |\delta_1| + \ldots + b_r \log |\delta_r| + \log |\delta_{r+1}| \right| < \exp (c_5 - c_4 B) \tag{3}$$

erfüllt falls $B > B_0$, wobei $B = \max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |b_i|$.

Das Beweis dieses Satzes kann man ebenso durchführen wie den Beweis der analogen Ungleichung (7) in Ellison und anderen [6].

3. Obere Abschätzung für B

Untere Abschätzungen für die Linearformen in Logarithmen algebraischer Zahlen geben kombiniert mit Satz A eine effektive obere Abschätzung für die absoluten Beträge der Lösungen von (3). Für die praktische Anwendung ist zur Zeit der folgende Satz von Waldschmidt [14] der geeignetste, denn hier die absolute Konstante verhältnismäßig klein ist. Wir werden für $\tau \in K$ die Bezeichnung

$$h(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \max (1, |\tau^{(i)}|)$$

benutzen.

Satz B. *Sei L ein algebraischer Zahlkörper vom Grad D über Q; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_k \in L$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0$ und $\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_k \log \alpha_k$. Seien $V_1, \ldots, V_k, W, E$ positive reelle Zahlen mit*

$$1/D \leqq V_1 \leqq \ldots \leqq V_k$$

$$V_j \geqq \max \{h(\alpha_j);\ |\log \alpha_j|/D\}, \quad 1 \leqq j \leqq k$$

$$W \geqq \max_{1 \leqq j \leqq k} h(\beta_j)$$

und

$$1 < E \leqq \min\{e^{DV_1};\ \min_{1 \leqq j \leqq k} 4DV_j/|\log \alpha_j|\}.$$

Ist dann $V_i^+ = \max (1, V_i)$ für $i = k-1, k$ mit $V_0^+ = 1$ falls $k = 1$, so gilt für $\Lambda \neq 0$

$$|\Lambda| > \exp\{-C(k) D^{k+2} V_1 \cdot \ldots \cdot V_k (W + \log (EDV_k^+)) (\log (EDV_{k-1}^+) (\log E)^{-k-1}\}, \tag{4}$$

mit

$$C(k) \leqq 2^{8k+51} k^{2k}.$$

Ist nur $\Lambda_0 = b_1 \log |\delta_1| + \ldots + b_r \log |\delta_r| + \log |\delta_{r+1}|$, wobei die b_i's und δ_i's in Satz A erklärte Größen sind, dann gilt $\Lambda_0 \neq 0$. Da K totalreell ist, so gehören $b_1, \ldots, b_r, |\delta_1|, \ldots, |\delta_{r+1}|$ zu der normalen Hülle von K, somit sind $V_1, \ldots, V_{r+1}$ Konstanten, $E \geqq e$ und $W = \log B$. Aus Satz A und B folgt nun

$$\exp (c_5 - c_4 B) > |\Lambda_0| > \exp (-c_6 - c_7 \log B) \tag{5}$$

mit $c_6, c_7 > 0$. (5) impliziert $B < B_1$ unmittelbar mit einer Konstante B_1.

Man kann B_1 mit $\max_{0 \leqq i \leqq n} |a_i|$, n, m und R explizit abschätzen, s.z.B. Győry and Papp [8]. In konkreten Fälle ist es besser $V_1, \ldots, V_{r+1}$ und dann c_6, c_7 berechnen, schließlich B_1 aus (5) zu bestimmen, da man so wesentlich kleinere Werte erhält.
Wird noch (3) mit $\log |\delta_r|$ dividiert, dann gilt

Satz C. *Außer den Bezeichnungen von Satz A sei noch* $\xi_i = \log |\delta_i| / \log |\delta_r|$, $i = 1, \ldots, r+1$. *Es gibt paarweise verschiedene Indizes* j, k, l *mit* $1 \leqq j, k, l \leqq n$ *so daß*

$$0 < |b_1 \xi_1 + \ldots + b_{r-1} \xi_{r-1} + b_r + \xi_{r+1}| \leqq c_8 c_9^{-B} \tag{6}$$

gilt mit $c_8 = \exp(c_5 - \log |\log |\delta_r||)$, $c_9 = \exp(c_4)$ *und* $B_0 \leqq B \leqq B_1$.

4. Reduktion der Oberschranke

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung des Lemmas von Baker und Davenport [2]. Im folgenden bezeichnet $\|x\|$ den Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl.

Lemma 2. *Es gelte* (6). *Seien weiter* Q_1, Q_2, Q_3 *positive reelle Zahlen mit* $Q_2 \geqq 1$, $Q_1 > 2^{r-1}((r-1)Q_2 + 1)$. $q \in N$ *genüge der Approximation*

$$1 \leqq q \leqq Q_1 Q_3 \quad \|q\xi_i\| \leqq Q_2 (Q_1 Q_3)^{-1/(r-1)}, \quad i = 1, \ldots, r-1. \tag{7}$$

Erfüllt q *außerdem*

$$\|q\xi_{r+1}\| \geqq ((r-1)Q_2 + 1) Q_1^{-1/(r-1)} \tag{8}$$

dann kann für B *nicht gelten*

$$\log(Q_1^{r/(r-1)} Q_3 c_8) / \log c_9 < B \leqq Q_3^{1/(r-1)}. \tag{9}$$

Beweis. Das ein q existiert das (7) erfüllt, garantiert Dirichlets Satz über simul tane Approximationen. Wir nehmen nun an, die Behauptung sei falsch. Mit einem q, das (7) genügt, gilt dann für alle $1 \leqq i \leqq r-1$

$$\|qb_i\xi_i\| \leqq |b_i| \|q\xi_i\| \leqq BQ_2(Q_1Q_3)^{-1/(r-1)} \leqq Q_2 Q_1^{-1/(r-1)}.$$

Durch Summation erhalten wir

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i\Big\| \leqq (r-1)Q_2 Q_1^{-1/(r-1)}.$$

Andererseits ist

$$\Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i + q\xi_{r+1}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i + qb_r + q\xi_{r+1}\Big\| \leqq$$

$$\leqq q\Big\|\sum_{i=1}^{r-1} b_i\xi_i + b_r + \xi_{r+1}\Big\| \leqq Q_1 Q_3 c_8 c_9^{-B} < Q_1^{-1/(r-1)}.$$

Damit ist aber

$$\|q\xi_{r+1}\| = \Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i + q\xi_{r+1} - \sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i\Big\| \leqq$$

$$\leqq \Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i + q\xi_{r+1}\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{r-1} qb_i\xi_i\Big\| < ((r-1)Q_2+1)Q_1^{-1/(r-1)},$$

dies steht im Widerspruch zu (8).

Wenn man die obere Schranke B_1 mit der Anwendung des Lemmas 2 reduzieren will, dann muß man $Q_3=B_1^{r-1}$ wählen. Nach dem Dirichletschen Approximationssatz gilt (7) mit $Q_2=1$. Im Falle $r=2$ kann man tatsächlich $Q_2=1$ annehmen, da der Kettenbruchalgorithmus ein q mit (7) gibt. Für die Wahl von Q_2 im Fall $r>2$ kehren wir im nächsten Punkt zurück. Es bleibt noch ein freier Parameter, Q_1 übrig. Je größer Q_1 ist, desto wahrscheinlicher ist, das (8) erfüllt ist, dann wird aber die Reduktion langsamer und umgekehrt. Für Q_1 hat sich 10^{2n} in den meisten Fällen als hinreichend erwiesen.

5. Lösung des Approximationsproblems (7)

Der folgende Satz ist (1.39) Proposition in LENSTRA, LENSTRA and LOVÁSZ [9].

Satz D. *Es gibt einen Polynomialen Algorithmus, welcher für eine gegebene positive ganze Zahl n und rationale Zahlen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ε *mit* $0<\varepsilon<1$ *eine ganze Zahl q findet mit*

$$1 \leqq q \leqq 2^{n(n+1)/4}\varepsilon^{-n}$$

und

$$\|q\alpha_i\| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Der Basisreduktionalgorithmus von Lenstra, Lenstra and LOVÁSZ [9] genügt der Behauptung des Satzes D, wenn man ihn auf das durch die Spalten des Matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ . & . & \ldots & . & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2^{-n(n+1)/4}\varepsilon^{n+1} \end{pmatrix}$$

erzeugte Gitter anwendet. Um diesen zur Lösung von (7) anwenden zu können, müssen die ξ_i's mit rationalen Zahlen annähert werden.

Lemma 3. *Seien* ξ_i, $i=1, \ldots, r+1$ *und* Q_1, Q_3 *wie in Lemma 2 und* $\hat{\xi}_i \in \mathbf{Q}$, $i=1, \ldots, r+1$ *mit*

$$(10) \qquad |\xi_i - \hat{\xi}_i| \leqq 2^{r/4}(Q_1Q_3)^{-r/(r-1)}.$$

Wenn ein $q \in \mathbf{Z}$ *existiert mit*

$$(11) \qquad 1 \leqq q \leqq Q_1Q_3 \quad \|q\hat{\xi}_i\| \leqq 2^{r/4}(Q_1Q_3)^{-1/(r-1)}, \quad i = 1, \ldots, r-1$$

und

$$\|q\hat{\xi}_{r+1}\| \geqq ((r-1/2)2^{r/4+1}+1)Q_1^{-1/(r-1)} \tag{12}$$

dann gilt (7) *und* (8) *mit* $Q_2=2^{r/4+1}$.

Beweis. Es gilt wegen (10) und (11)

$$\|q\xi_i\| = \|q\hat{\xi}_i+q(\xi_i-\hat{\xi}_i)\| \leqq \|q\hat{\xi}_i\|+q|\xi_i-\hat{\xi}_i| \leqq 2^{r/4+1}(Q_1Q_3)^{-1/(r-1)}$$

für alle $i=1, \ldots, r-1$. Dies ist aber genau (7). Es gilt weiter

$$\|q\hat{\xi}_i\| \leqq \|q\xi_i\|+q|\xi_i-\hat{\xi}_i| \leqq \|q\xi_i\|+2^{r/4}(Q_1Q_3)^{-1/(r-1)} \leqq \|q\xi_i\|+2^{r/4}Q_1^{-1/(r-1)}.$$

Aus (12) folgt nun

$$\|q\xi_{r+1}\| \geqq ((r-1)Q_2+1)Q_1^{-1/(r-1}.$$

Das Approximationsproblem kann nun mit dem Basisreduktionsalgorithm gelöst werden bei der Wahl $n=r-1$, $\alpha_i=\hat{\xi}_i$ und $\varepsilon=2^{r/4}(Q_1Q_3)^{-1/r-1}$.

6. Technische Bemerkungen und Ergebnisse

Wir haben auf dem dargestellten theoretischen Grund an der Universität zu Köln ein Komputerprogramm namens Thue entwickelt womit wir Thue Gleichungen vom Grad 3 und 4 lösen konnten.

Zu den Eingabedaten des Programms gehören zunächst der Grad n sowie die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ mit $a_0=1$ von $F(x, y)$. $F(x, y)$ muß irreduzibel sein und $F(x, 1)$ darf nur reelle Wurzeln haben. Eine wichtige Beschränkung ist noch $m=1$. Derüberhinaus erwartet das Programm als Eingabe die Koefficienten eines Systems von Grundeinheiten in der Darstellung bezüglich der Potenzbasis $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$, wobei α eine Wurzel des Polynoms $F(x, 1)$ ist. Ein solches System wurde mit dem Programm von P. Weiler nach der Methode von Pohst, Weiler und Zassenhaus [11], [12] ermittelt. Weitere Eingaben sind unnötig.

Als Ausgabe bekommen wir die Lösungen der Gleichung (1).

Das Programm bestimmt zuerst die Größe c_8, c_9, B_0 und B_1 aus Satz C. In konkreten Fällen steht B_1 zwischen 10^{33} und 10^{45}. Aus (10) ergibt sich die Genauigkeit, mit der man die $\hat{\xi}_i$'s kenne muß. Zur Berechnung der Nullstellen von $F(x, 1)$ und ihrer Logarithmen mit dieser sehr großen Genauigkeit wurden das Regula-Falsi bzw. das Newton-Verfahren benutzt. Dazu brauchten wir etwa die Hälfte der gesamten Rechenzeit.

Da wir nicht wissen bei welcher Wahl der Indizes $1\leqq j, k, l\leqq n$ (3) besteht, so müssen n^3 Approximationsprobleme der Form (3) gelöst werden. Vertauscht man k und j, dann ändert sich nur das Vorzeichen von $\log|\delta_i|$ $1\leqq i\leqq r$, weiterhin hängen dieselbe Zahlen nicht von dem Index l ab. Deswegen gibt es nur $\binom{n}{2}$ verschiedene Möglichkeiten für die Vektoren $(\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_{r-1})$. Wir führten nun mit jedem dieser Vektoren die folgende Prozedur durch. Wir haben (11) mit den Basisreduktionsalgorithmus gelöst und dann (12) bei aller möglichen Wahl von $\hat{\xi}_{r+1}$ getestet. Falls (12) wahr gewesen ist, dann konnten wir von (9) eine neue obere Schranke für B bestimmen. Dies wurde iteriert, um eine Folge oberer Schranken $B_1\geqq B_1^{(1)}\geqq B_1^{(2)}\geqq \ldots$ für B

zu erhalten. Die Abbruchbedingung war entweder $B_1^{(n)} \leqq B_0$ oder $[B_1^{(n)}] \geqq [B_1^{(n-1)}]$, wobei $[x]$ den ganzzahligen Anteil von x bedeutet. Nach 5—7 maliger Iteration lag die obere Schranke für B zwischen 4 und 100. Wir haben nie eine unerwartet große Lösung gefunden.

In der Tabelle 1. sind die Koeffizienten der Polynome $F(x, y)=x^3+ax^2y+$ $+bxy^2+y^3$ und die Lösungen der zugehörige Thue Gleichung $F(x, y)=1$ aufgeführt. Da hier (1, 0) und (0, 1) immer Lösungen sind, haben wir sie weggelassen. Einige der hier angegebene Gleichungen waren früher mit anderen Methoden gelöst worden, siehe z. B. BAULIN [3] und BREMNER [4]. Die CPU Zeit der Berechnung der Lösungen der einzelnen Gleichungen lag zwischen 10 und 30 Sekunden.

a	b	Lösungen (x, y)
-1	-2	$(2, 1)$; $(-9, -5)$; $(-1, 1)$; $(5, -4)$; $(-1, -1)$; $(-1, -2)$; $(4, 9)$
0	-4	$(-2, 1)$; $(2, 1)$; $(1, 4)$; $(508, 273)$
-8	-20	$(-2, 1)$; $(10, 1)$; $(-351, 172)$
-1	-47	$(779, -122)$

Tabelle 1.

In der Tabelle 2. sind die Koeffizienten von Polynome $F(x, y)=x^4+ax^3y+$ $+bx^2y^2+cxy^3+dy^4$ und die Lösungen der Gleichungen $F(x, y)=\pm 1$ angegeben. Zu jedem Polynom gehört zwei Reihen, in den ersten sind die Lösungen von $F(x, y)=1$ in den zweiten von $F(x, y)=-1$ aufgezählt. Die CPU Zeit ist hier wesetnlich länger, sie lag zwischen 140—230 Sekunden.

a	b	c	b	Lösungen (x, y)
5	4	-5	-1	$(\pm 1, 0)$; $(\pm 2, \mp 1)$
				$(0, \pm 1)$
-4	0	8	-1	$(\pm 1, 0)$
				$(\pm 2, \pm 1)$; $(0, \pm 1)$
1	-3	-1	1	$(\pm 1, 0)$; $(0, \pm 1)$
				$(\pm 2, \mp 1)$; $(\pm 1, \pm 2)$; $(\pm 1, \pm 1)$; $(\pm 1, \mp 1)$

Tabelle 2.

Alle Berechnungen wurden auf der CYBER 76M des Rechenzentrums der Universität zu Köln durchgeführt.

Literatur

[1] A. BAKER, Contribution to the theory of Diphantine equations I. On the representation of integers by binary forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser A.* **263** (1968), 173—191.

[2] A. BAKER and H. DAVENPORT, The equation $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$, *Quart. J. Math. Oxford* **20** (1969), 129—137.

[3] В. И. Баулин, О неопределенном уравнении третьей степени с наименьшим положитэльным дускриминантом, *Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-т.* **7** (1960), 138—170.
[4] A. Bremner, Integral generators in a cetain quartic field and related Diophantine equations, *Michigan Math. J.* **32** (1985) 295—319.
[5] W. J. Ellison, Recipes for solving diophantine problems by Baker's method, *Sém. Th. Nombr.*, 1970—1971, *Exp. No. 11, Lab. Théorie Nombres, C.N.R.S., Talence,* 1971.
[6] W. J. Ellison, F. Ellison, J. Pesek, C. E. Stahl and D. S. Stall, The diophantine equation $y^2+k=x^3$, *J. Number Theory* **4** (1972), 107—117.
[7] J. H. Evertse, Upper bounds for the numbers of solutions of diophantine equations, *Math. Centre Tract* **168** *Centr. Math. Comput. Sci., Amsterdam,* 1983.
[8] K. Győry and Z. Z. Papp, Norm form equations and explicit lower bounds for linear froms with algebraic coefficients, Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turán) 245—267. *Akadémiai Kiadó Budapest,* 1983.
[9] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra Jr. and L. Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* **261** (1982), 515—534.
[10] L. J. Mordell, Diophantine equations, *Academic Press, London* 1969.
[11] M. Pohst and H. Zassenhaus, On effective computation of fundamental units I. *Math. Comp.* **38** (1982), 275—291.
[12] M. Pohst, P. Weiler and H. Zassenhaus, On effective computation of fundamental units II. *Math. Comp.* **38** (1982), 293—329.
[13] A. Thue, Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. reine angew. Math.* **135** (1909), 284—305.
[14] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* **37** (1980), 257—283.

Bemerkung zur Korrektur

R. Steiner, On Mordell's equation $y^2-k=x^3$: A problem of Stolarsky, *Math. Comp.* **46** (1986), 703—714. hat einige Thue Gleichungen vom Grad 3 vollständig gelöst kombinierend die Ideen von Ellison und anderen [6] mit der guten unteren Abschätzung von Waldschmidt [14].

MATHEMATISCHES INSTITUT
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITÄT
4010 DEBRECEN, PF. 12.
UNGARN
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN
WEYERTAL 86—90
5000 KÖLN 41
BRD

(Eingegangen am 5. April 1985.)