Singuläre zufällige Prozesse und mittelquadratische Konvergenz

Von TIBOR POGÁNY, (Bor)

ABSTRACT. According to a result of Slutsky (1928) a weakly stationary process $X(t)$ with spectral density $f(\lambda)=e^{-\lambda^2}$ (which possesses the singularity property, unknown by him) can be approximated in mean square by a sequence of processes $\{X_n(t)\}_1^\infty$ with spectral densities

$$\left\{f_n(\lambda)=\left(1+\frac{\lambda^2}{n}\right)^{-n}\right\}_1^\infty .$$

This raises the following questions:

1. Can an arbitary singular (deterministic), weakly stationary stochastic process be approximated in mean square by a sequence of regular (purely non — deterministic) processes?

2. Can a regular process be approximated by a sequence of singular processes?

3. What is the connection between analytic and singular processes?

The methods described in the present paper are applicable to processes whose spectral density equals 0 on a set of Lebesgue measure 0. Besides the estimation of the speed of convergence, the results are illustrated by an example, too.

AMS subject classification: 60 G 10, 60 F 25.

Die Literatur der stationären in weitem Sinne zufälliger, singulärer Prozesse kann man um drei Themen gruppieren: *pro primo* — die Definition und notwendige, d. h. hinreichende Bedingungen der Regularität, oder Singularität der zufälliger Prozesse ([2], [3], [6], [7]), *pro secundo* — die Feststellung der Konvergenzschnelle zur Nullstelle des Extrapolationsfehlers diskerter zufälliger Prozesse mit bekannter endlicher Vergangenheit ([4], [8], [9]), *pro tertio* — Aufsätze über analytische Prozesse ([1], [4], [5]). Die erwähnte Liste der Aufsätze und Bücher ist überhaupt nicht vollständig (nur im Falle des zweiten Thema), aber in einigen sehr ausführlichen Arbeiten (z. B. [7]) finden wir alle früheren Ergebnisse oder ihre Verallgemeinerung.

Die Aufsätze [4] und [5] sprechen auch von dem Zusammenhange der singulären und der analytischen zufälligen Prozesse.

In diesem Artikel bearbeiten wir eine neue Problematik, die man so formulieren kann: „sei $\{X(t), t\in R\}$ ein stationärer in weitem Sinne zufälliger Prozess mit Spektraldichte $f(\lambda)$, Spektralfunktion $F(\lambda)$ und Korrelationsfunktion $K(t)$. Wie kann man eine Folge zufälliger Prozesse $\{X_n(t), t\in R\}$ mit Spektraldichten $f_n(\lambda)$ konstruieren, deren mittelquadratischer Grenzwert $X(t)$ ist?"

Interresant ist zu beobachten die Regularität der Prozesse $X(t)$, $X_n(t)$; dann entstehen die folgenden Fälle:

a) $X_{ns} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s$; $\quad X_{nr} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_r$

b) $X_{ns} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_r$; $\quad X_{nr} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_s$

wo Index s das Siguläre bezeichnet, r aber das Reguläre der erwähnten zufälligen Prozesse; die Konvergenz ist mittelquadratisch. Wir befassen uns größtenteils mit dem Falle b), wo wir die Schnelle der Konvergenz schätzen werden. Wir werden einige Ergebnisse über den Zusammenhang der singulären und analytischen zufälligen Prozesse geben.

1. Es sei $\{f_n\}$ eine beliebige Folge. Wenn $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ in gewissem Sinne, dann sagen wir daß f_n approximiert den Wert f. Wenn f_n Spektraldichte ist, dann ist die Konvergenz punktweise, wenn f_n zufälliger Prozess ist, dann geht es um eine mittelquadratische Konvergenz.

Theoreme 1. *$\{X_r(t),\, t\in R\}$ sei ein regulärer, stationärer zufälliger Prozess. Dann besteht wenigstens eine Folge $\{X_{ns}(t),\, t\in R\}$ singulärer, zufälliger Prozesse, deren mittelquadratischer Grenzwert der Prozess $X_r(t)$ ist.*

Beweis. Bezeichnen wir die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_r(t)$ mit $f_r(\lambda)$, und bei Bedingungen das Theorem 1., dann gilt $\int\limits_R \frac{|\ln f_r(\lambda)|\, d\lambda}{1+\lambda^2} < \infty$. Sei die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_{ns}(t), f_{ns}(\lambda)$:

$$f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^2} f_r(\lambda) \sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}.$$

Der Prozess $X_{ns}(t)$ ist singulär wegen des Faktors $e^{-\lambda^2}$. Es ist klar, daß

$$|f_{ns}(\lambda)-f_r(\lambda)| = f_r(\lambda)\left|e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}-1\right| = f_r(\lambda)e^{-\lambda^2}\left(\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{k!}\right) \leqq f_r(\lambda)\frac{\lambda^{2n+2}}{(n+1)!}$$

gilt, wo der ausdruck in der Klammer ein Rest der überall konvergenten Potenzreihe ist. Sei $K^+ = \max\limits_j |K^{(j)}(0)|$. Aus

$$\begin{aligned} E|X_{ns}(t)-X_r(t)|^2 &= \int\limits_R \left(f_{ns}(\lambda)+f_r(\lambda)-2f_{ns,r}(\lambda)\right) d\lambda = \\ &= \int\limits_R \left\{\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}+1\right) f_r(\lambda) - 2\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n\frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{\frac12} f_r(\lambda)\right\} d\lambda \leqq \\ &\leqq \int\limits_R \left|\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n\frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{\frac12}-1\right|^2 f_r(\lambda)\, d\lambda \leqq \int\limits_R \frac{\lambda^{4(n+1)} f_r(\lambda)}{[(n+1)!]^2}\, d\lambda = \\ &= \frac{|K^{2(n+1)}(0)|}{[(n+1)!]^2} \leqq \frac{K^+}{[(n+1)!]^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{1}$$

folgt daß $\lim\limits_{n\to\infty} X_{ns}(t) = X_r(t)$. Im Beweis gebrachten wir die folgende Ungleichung:

$$\left|e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}-1\right| \leqq \frac{\lambda^{2(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Da auch

$$\left|\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right| = \frac{\left|e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}-1\right|}{\left|1+\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}\right|} \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda^{2n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1+\left(e^{-\lambda^2}\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{\lambda^{2n+2}}{(n+1)!}$$

gilt folgt die Schätzung (1). Q.E.D.

Betrachten wir jetzt den Prozess $X_{ns}(t)$. Es sei $X_{0s}(t)\equiv X_s(t)$, dessen Spektraldichte $f_s(\lambda)=e^{-\lambda^2}f_r(\lambda)$ die Existenz der Momenten aller Ordnungen des Prozesses $X_s(t)$ versichert. Wenn $X_s^{(k)}(t)$ die k-te mittelquadratische Ableitung des Prozesses $X_s(t)$ mit der Spektraldichte $f_s^k(\lambda)=\lambda^{2k}f_s(\lambda)$ ist, folgt daß

$$f_{ns}(\lambda) = \sum_0^n \frac{f_s^k(\lambda)}{k!}$$

gilt, dann wegen

$$(2)\qquad E|X_{ns}(t)|^2 = \sum_0^n \frac{1}{k!}\int_R f_s(\lambda)\lambda^{2k}\,d\lambda = E\sum_0^n\left|\frac{X_s^{(k)}(t)}{(k!)^{1/2}}\right|^2$$

ergibt sich die evidente Verbindung $X_{ns}(t)=\left(X_s(t), \ldots, \frac{X_s^{(n)}(t)}{\sqrt{n!}}\right)$. Auf diese Weise approximiert $X_{ns}(t)$ den Prozess $X_r(t)$ durch die Relationen (1) und (2) mittelquadratisch.

Bemerkung 1.

$$F_{ns}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_{ns}(\mu)\,d\mu = \sum_0^n \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\mu^2}f_r(\mu)\,\mu^{2k}\,d\mu.$$

Von hier ist $F_{ns}(\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{} F_r(\lambda)$ punktweise. Weiterhin die Karhunen—Zerlegung des $F_{ns}(\lambda)$ ergibt

$$F_{ns}(\lambda) = F_{ns}^{(1)}(\lambda)+F_{ns}^{(2)}+F_{ns}^{(3)}(\lambda)$$

wo $F_{ns}^{(1)}(\lambda)$ absolutstätig ist, $F_{ns}^{(2)}(\lambda)$ eine reine Sprungfunktion ist; $F_{ns}^{(3)}(\lambda)$ stätig ist, deren erste Ableitung identisch verschwindet. Also

$$F'_{ns}(\lambda) = f_{ns}^{(1)}(\lambda) = e^{-\lambda^2}F'_r(\lambda)\sum_0^n \frac{\lambda^{2k}}{k!}.$$

Deshalb ist

$$F_{ns}^{(2)}(\lambda) = \sum_{\Lambda=\{k|\lambda_k\leqq\lambda\}}\left(F_r(\lambda_k+0)-F_r(\lambda_k-0)\right) = F_r^{(2)}(\lambda)$$

weil die Diskontinuitätsmenge Λ nur von $f_r(\lambda)$ stammen kann.

Bemerkung 2. Einen ähnlichen Approximationsvorgang können wir auch durch die Folgen der Spektraldichten geben, wie

$$f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^{2N}} f_r(\lambda) \sum_0^n \frac{\lambda^{2Nk}}{k!}; \quad N \in \mathbf{N} \setminus \{1\},$$

$$f_{ns}(\lambda) = e^{-\lambda^{2M}\alpha(n)} f_r(\lambda); \quad M \in \mathbf{N},\ \alpha(n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0.$$

In diesen Fällen ist es schwer die Folge der zufälligen Prozesse auf einen einzigen Prozess herabzuleiten.

Jetzt beginnen wir den zweiten Teil der Aufgabe b) die wir in der Einleitung formulierten. Sei $f_a(\lambda)$ die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_a(t)$, $a \in \{s, r\}$; $\{\alpha(n)\}_0^\infty$ eine beliebige reale strengmonotone, fallende Null folge. Dann gilt das

Theorem 2. *Jeden singulären zufälligen Prozess $X_s(t)$ können wir als mittelquadratischen Grenzwert einer Folge regulärer zufälliger Prozesse $\{X_{nr}(t), t \in R\}$ darstellen.*

Beweis. Sei $f_{nr}(\lambda)$ die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_{nr}(t)$. Wenn $f_{nr}(\lambda) = f_s(\lambda) + \alpha(n) f_r(\lambda)$, dann ist $E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Zuerst werden wir die Regularität von $X_{nr}[(t)$ einsehen. Es sei

$$f_n^*(\lambda) = \begin{cases} (1+\alpha(n)) f_r(\lambda) & f_r(\lambda) > f_s(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \\ \begin{cases} f_{nr}(\lambda) & \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ & (\exists \lambda' \in \Lambda)(f_r(\lambda') \leqq f_s(\lambda')) \\ (1+\alpha(n)) f_r(\lambda) & \lambda \notin [\lambda_1, \lambda_2] \end{cases} \end{cases}$$

wo λ_1 und λ_2 das minimale und das maximale Element (sie können nur endlich sein!) der Menge $\Lambda = \{\lambda | f_r(\lambda) = f_s(\lambda)\}$. Wenn $\Lambda \neq \emptyset$, dann ist $f_n^*(\lambda)$ stetig in den Punkten λ_1, λ_2. Weiter $f_n^*(\lambda) \geqq f_{nr}(\lambda)$, wo die Gleichheit nur im endlichen Intervallum besteht. Außerdem ist $f_n^*(\lambda)$ die Spektraldichte eines regulären zufälligen Prozesses, $X_n^*(t)$. Auf diese Weise ist

$$\int_R \frac{|\ln f_{nr}(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \leqq \int_R \frac{|\ln f_n^*(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda < \infty.$$

Also der zufällige Prozess $X_{nr}(t)$ ist regulär. Aus

$$E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 = \int_R \left(2f_s(\lambda) + \alpha(n) f_r(\lambda) - 2f_{nr,s}(\lambda)\right) d\lambda \leqq \alpha(n) K_r(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

folgt die Behauptung der Theoreme 2. Q. E. D.

Bemerkung 3. In beiden bisherigen Fällen beobachten wir die Konvergenz der realen zufälligen Prozesse, d. h. wenn $X_a(t)$, $a \in \{r, s, nr, ns\}$ reell ist. Wenn der zufällige Prozess komplex ist, dann melden sich in den Relationen (1), (3) anstatt $f_{nr,s}(\lambda)$ $(f_{ns,r}(\lambda))$ die Ausdrücke $\operatorname{Re}\{f_{nr,s}(\lambda)\}$ bzw. $\operatorname{Re}\{f_{ns,r}(\lambda)\}$. Die übrigen Teile des Beweises sind im Ganzen identisch mit den oben ausgelegten Beweismethoden. Sonst gilt die Gleichheit in der letzten Abschätzung der Relation (3) dann und nur dann, wenn die zufälligen Prozesse $X_s(t)$ und $X_r(t)$ unkorreliert sind.

2. Jetzt übergehen wir zur Approximationsmethode, in welcher wir Indikatorfunktionen gebrauchen werden.

Wir können die Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnissen in der Form einem neuen Theorem mit ganz anderen Beweismethoden ausdrücken.

Theorem 3. *$\{X_a(t), t\in R\}$ sei ein stationärer, in weitem Sinne zufälliger Prozess. Dann gilt es weningstens eine Folge stationärer, in weitem Sinne zufälliger Prozesse $\{X_{nb}(t), t\in R\}$, für welche*

$$E|X_{nb}(t)-X_a(t)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

gilt, wo $a, b\in\{r, s\}$; $a\neq b$.

Beweis. Sei $f_a(\lambda)$ die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_a(t), a\in\{r, s\}$. Dann wird die Folge der zufälligen Prozesse $X_n(t)$ mit der Spektraldichte ($n+1$-ten Glied der Folge)

$$f_n(\lambda) = f_s(\lambda)\chi_{(-a_n^\alpha, a_n^\alpha)}(\lambda) + f_r(\lambda)\big(1-\chi_{(-a_n^\alpha, a_n^\alpha)}(\lambda)\big) \tag{4}$$

die Theoreme 3. befriedigen. Mit Anwendung dieser Verallmeinerung ist es nicht schwer einzusehen, daß $X_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{} X_s(t)$ für $\alpha=1$ ist, und für $\alpha=-1$ $X_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{} X_r(t)$ (natürlich in mittelquadratischem Sinne) gilt.

Bevor wir zum endgültigen Beweis unserer Behauptungen übergehen, ist es notwendig zu erwähnen, daß

a) $\chi_A(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda\in A\\ 0 & \lambda\notin A\end{cases}$ bzw. und $\chi_A(\lambda)$ Indikatorfunktion der Menge A ist; die reelle, positive Folge $a_n\uparrow\infty$ wächst monoton.

b) Die zufälligen Prozesse $X_n(t)$ sind regulär für jedes $n\in\mathbf{N}$. Nachdem

$$\int_R \frac{|\ln f_n(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda = \int_{R\setminus(-a_n^\alpha, a_n^\alpha)} \frac{|\ln f_r(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda + \int_{-a_n}^{a_n} \frac{|\ln f_s(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty$$

nehmen wir vorläufig den Fall $\alpha=1$.

c) $\{X_n(t)\}_0^\infty$ ist eine Cauchy folge „in medio". Die letztere Tatsache kann man auf folgende Art einsehen: Stellen wir unsere zufälligen Prozesse spektralisch vor:

$$X_a(t) = \int_R e^{it\lambda}\,dZ_a(\lambda) \quad a\in\{r, s, n\}.$$

Daraus folgt

$$E|X_n(t)|^2 = \int_R \big(\chi_{(-a_n, a_n)}(\lambda) f_s(\lambda) + \big(1-\chi_{(-a_n, a_n)}(\lambda)\big) f_r(\lambda)\big)\,d\lambda.$$

Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\chi_{(-a_n, a_n)} = \chi_n;\ \chi_{A\triangle B} = \chi_A \triangle \chi_B;\ \chi_{\bar A} = \bar\chi_A$$

erhält man

1) $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$,

2) $\chi_0 = \chi_\emptyset$; $\chi_n\bar\chi_n = 0$,

3) $\chi_n\triangle\chi_k + \chi_k\triangle\chi_m = \chi_n\triangle\chi_m$, $n<k<m$.

Sei $m>n$. Dann ist

$$Z_m(\lambda)-Z_n(\lambda)=\chi_m\triangle\chi_n\big(Z_s(\lambda)-Z_r(\lambda)\big)$$

und weiter

(5)
$$E|X_m(t)-X_n(t)|^2=E\int\limits_R\int\limits_R|dZ_m(\lambda)-dZ_n(\lambda)|^2=$$
$$=E\int\limits_R\int\limits_R\chi_m\triangle\chi_n|\,dZ_s(\lambda)-dZ_r(\lambda)|^2\leqq 8\int\limits_{a_n}^{a_m}f^*(\lambda)\,d\lambda,$$

wo $\{a_n\}$ eine solche reelle divergente Folge ist, welche für $f''(\lambda)>0$ im Intervalle $\lambda\in[a_n,\omega)$, $f^*(\lambda)=\max\limits_{\substack{r,s\\ \lambda\in(a_n,a_m)}}(f_r,f_s)f^*(a_n)=\max\limits_{\lambda}f^*(\lambda)$ impliziert.

Die Folge $\{a_n\}$ wählen wir so aus, daß $a_m-a_n\geqq K$ und auf Grundlage dieser Abschätzungen folgt aus (5)

$$\leqq\frac{8f^*(a_n)}{a_m-a_n}\leqq\frac{8}{K}f^*(a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Jetzt beweisen wir das Theorem 3. Wir schätzen die mittelquadratische Abweichung $X_n(t)$ von $X_s(t)$ ab.

(6)
$$E|X_n(t)-X_s(t)|^2=E\Big|\int\limits_{-a_n}^{a_n}e^{it\lambda}dZ_s(\lambda)+\int\limits_{R\setminus(-a_n,a_n)}e^{it\lambda}dZ_r(\lambda)-\int\limits_R e^{it\lambda}dZ_s(\lambda)\Big|^2=$$
$$=E\Big|\int\limits_{R\setminus(-a_n,a_n)}e^{it\lambda}d\big(Z_r(\lambda)-Z_s(\lambda)\big)\Big|^2=\iint\limits_{R\setminus(-a_n,a_n)}E\big|d\big(Z_r(\lambda)-Z_s(\lambda)\big)\big|^2\leqq$$
$$\leqq 2\iint\limits_{R\setminus(-a_n,a_n)}\big(|dZ_r(\lambda)|^2+|dZ_s(\lambda)|^2\big)=2\int\limits_R(1-\chi_n)\big(f_r(\lambda)+f_s(\lambda)\big)\,d\lambda=H.$$

Nachdem $X_r(t)$ ein L_2-Prozess ist, existiert eine natürliche Zahle $k\geqq 2$ und eine solche positive reelle Konstante K_1, daß es gibt

$$f_r(\lambda)|\lambda|^k_{|\lambda|\to\infty}\leqq K_1.$$

Die Elemente der $\{a_n\}$ wählen wir jetzt so aus, daß (für jedes n),

$$a_n\geqq\big|\{\lambda_0|\max\mathrm{fr}(\lambda)=\mathrm{fr}(\lambda_0)\}\big|$$

gültig ist. Bei dem Definieren des $f_n^*(\lambda)$ erwähnten wir, daß

$$f_r(\lambda)+f_s(\lambda)\leqq 2f_r(\lambda),\quad\lambda\in[a_n,\infty).$$

ist.

Wenn wir alle diese Tatsachen in Achtung nehmen und weiterhin (6) abschätzen, bekommen wir

(7) $$H\leqq 4K_1\int\limits_R\bar{\chi}_n|\lambda|^{-k}d\lambda=8K_1\int\limits_{a_n}^{\infty}\frac{d\lambda}{|\lambda|^k}=\frac{8K_1}{k-1}(a_n)^{-k+1}\quad\text{Q. E. D.}$$

Bemerkung 4. Es ist bekannt, daß jeder zufällige Prozess eindeutig (KARHUNEN, KOLMOGOROV) auf die Orthogonalsumme

$$X_n(t) = X_{ns}(t) \oplus X_{nr}(t)$$

zerlegt werden kann.

In dieser Zerlegung ist $F_n(\lambda) = F_{ns}(\lambda) + F_{nr}(\lambda) \Rightarrow f_n(\lambda) = f_{ns}(\lambda) + f_{nr}(\lambda)$ woraus folgt, daß

$$f_n(\lambda) = [f_s(\lambda)\chi_n + f_r(\lambda)\chi_n] + [f_s(\lambda)\bar{\chi}_n + f_r(\lambda)\bar{\chi}_n]$$

ist, wo für $\alpha = \pm 1$ der erste (zweite) Ausdruck verschwindet wenn $n \to \infty$. Das ist das Ergebnis, bewiesen bei dem Theorem 3.

Beispiel. $X_s(t)$ sei ein stationärer, in weitem Sinne zufälliger Prozess mit Spektraldichte $f_s(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2}\left|\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right|^2$, während $f_r(\lambda) = \frac{1}{|B(\lambda)|^2}$ die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X_r(t)$ ist. Dabei ist $a \in R_+$, $A(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} a_j \lambda^j$, $B(\lambda) = \sum_{0}^{M} b_j \lambda^j$ und die Gleichungen $A(\lambda) = 0 = B(\lambda)$ haben Lösung ausschlieslich in der oberen Halbebene.

Die approximative Folge der zufälligen Prozesse $X_{nr}(t)$ hat die bisherige Methode (bekannt aus der Theoreme 3.) in Achtung genommen, eine Spektraldichte

$$f_{nr}(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2}\left|\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right|\chi_n + \frac{\bar{\chi}_n}{|B(\lambda)|^2} =$$

$$= \frac{1}{|B(\lambda)|^2}\left(e^{-a^2\lambda^2}|A(\lambda)|^2\chi_n + \bar{\chi}_n\right).$$

Die Abschätzung der Geschwindigkeit der Konvergenz durch die Relation (7) angegeben, wird

$$E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 \leqq \frac{8K_1}{k-1}(c_n)^{-k+1}$$

sein, wo $\{c_n\}$ bestimmte divergente Folge beliebiger reeller positiver Glieder ist. Die Konstante k, K_1 bestimmen wir durch

$$\frac{|\lambda|^k}{|B(\lambda)|^2} \leqq K_1, \quad |\lambda| \to \infty, \tag{8}$$

woraus folgt $k = 2\deg B(\lambda) = 2M$, $K_1 = 1/|b_M|^2$. Schließlich ist

$$E|X_{nr}(t) - X_s(t)|^2 \leqq \frac{8}{(2M-1)|b_M|^2(c_n)^{k-1}}.$$

Die Geschwindigkeit wird von der Folge c_n diktiert.

3. Jetzt betrachten wir die Verbindung der Klassen singulärer und analytischer zufälliger Prozesse. Das vorliegende Problem kann man auch so formulieren: „Wann sind die Ausdrücke ‚singulär' und ‚analytisch' der stationären in weitem Sinne zufälliger Prozesse equivalent?"

Definition. Der zufälliger Prozess $X(t)$ ist analytisch in dem Bereiche D wenn fast jede seiner Realisationen analytisch im Bereiche D verlängern kann.

Wenn außerdem der zufälliger Prozess stationär ist, dann können die folgenden Ergebnisse feststellen:

1) Die Korrelationsfunkction des Prozesses $X(t)$, $K_x(t)$ ist dann und nur dann analytische im Intervallum $|t|\leqq r$ wenn

$$\int_{R} e^{r\lambda} f_x(\lambda) d\lambda < \infty \tag{9}$$

ist.

2) Wenn $K_x(t)$ analytisch ist in einer gewissen Umgebung von $t=t_0$, dann ist auch der zufällige Prozess $X(t)$ analytisch in der identischen Umgebung.
3) Wenn $K_x(t)$ im Intervallum $|t|\leqq r$ analytisch ist, dann ist fast jede Realisation $X(t)$ analytisch in der Polen $t=\tau+i\sigma$; $|\sigma|<r$. Siehe [1], [4], [5].

Theorem 4. *Ein analytischer stationärer zufälliger Prozess ist singulär.*

Den Beweis der Theoreme 4. findet man auch bei Rosenblatt [4]. Hier geben wir nur eine kurze Methode an.

Beweis. Sei $H_t(X)=\langle X(s)|s\leqq t\rangle$. Weiter, wenn (9) gültig ist, versichert diese Relation zugleich die Existenz den Momenten jeder Ordnung des zufälligen Prozesses $X(t)$, weil dann $f_x(\lambda)$ schneller zur Nulle konvergert, als $|\lambda|^{-2n}$, $n\in\mathbf{N}$, wenn $|\lambda|\to\infty$. Dann existiert die $2n$-te Ableitung der Korrelationsfunktion $K_x(t)$ für jede natürliche Zahl n.

Die Extrapolationsaufgabe für die zufällige Größe $X(t+\tau)$, $\tau>0$ ist Erfinden eines Fußpunktes der Normalen die aus $X(t+\tau)$ auf $H_t(X)$ fällt. Die Länge der Normalen ist der mittelquadratische Fehler, der inzwischen entstand, den wir mit σ_τ^2 bezeichnen und für den gültig ist

$$\sigma_\tau^2 = \lim_{n\to\infty} E|X(t+\tau)-\mathrm{Proj}^{H_t(X)}X(t+\tau)|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left|X(t+\tau)-\sum_{k=0}^{n}\frac{X^{(k)}(t)}{k!}\tau^k\right|^2.$$

Auf diese Weise bemerkten wir, daß man $X(t+\tau)$ durch Abschnitt seiner Taylor-Reihe mit beliebiger Genauigkeit abschätzen kann. Anderseits gilt darum, daß

$$\bigcap_t H_t(X) = \bigcap_t \langle X(s)|s\leqq t\rangle = H(X).$$

Also $X(t)$ ist singulär. Q. E. D.

Sei jetzt $f(\lambda)$ die Spektraldichte des zufälligen Prozesses $X(t)$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$0 < f(\lambda) \leqq c < \infty. \tag{10}$$

Theorem 5. *Sei $X(t)$ ein singulärer zufälliger Prozess mit Spektraldichte $f(\lambda)$ welche der Bedingung* (10) *entspricht. Dann ist der zufällige Prozess $X(t)$ analytisch im Intervallum $|t|\leqq r<r_0$.*

BEWEIS. Nachdem $X(t)$ singulär und (10) gültig ist, folgt, daß

$$f(\lambda) \underset{|\lambda| \to \infty}{\simeq} e^{-r_0|\lambda|^\varepsilon}, \quad \varepsilon \geqq 1, r_0 > 0. \tag{11}$$

Deshalb haben wir

$$\int_R e^{r\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \overset{\varepsilon=1}{\sim} \int_{-\infty}^{A>0} + \int_{A>0}^{+\infty} e^{-(r_0-r)\lambda}\, d\lambda < \infty$$

wo die Konvergenz für $r < r_0$ gilt. Auf diese Weise können wir durch die Relation (9), mit Hilfe (11) die Behauptung einsehen. Q. E. D.

Endlich, zusammenfassend das Vorgelegte, sagen wir aus die

Theorem 6. *Sei $X(t)$ ein zufälliger Prozess mit Spektraldichte $f(\lambda)$, die die Bedingung* (10) *befriedigt. Dann sind die folgenden Behauptungen equivalent:*
1) *$X(t)$ ist singulär,*
2) *$X(t)$ ist analytisch im Intervallum $[t-r, t+r]$ wo $r < r_0$ und r_0 kann man aus der Bedingung* (11) *bestimmen.*

Bemerkung 5. Der Wert r kann die beliebige Länge des Interwallums $[t-r, t+r]$ verkürzen. Nachdem der zufälliger Prozess $X(t)$ analytisch ist, können wir ihn ohne Fehler im Punkte $t+\tau > t$ extrapolieren. Weiterhin, wenn $X_r(t)$ mit der Spektraldichte

$$f_r(\lambda) = e^{-|\lambda-\lambda_0|^\delta} f_x(\lambda), \quad \delta \in (-1, 0)$$

wo $f_x(\lambda)$ die Spektraldichte des regulären zufälligen Prozesses ist, dann beeinflußt die Singularität $\lambda = \lambda_0$ nicht die Regularität des zufälligen Prozesses $X_r(t)$ wegen

$$f_r(\lambda)_{|\lambda| \to \infty} \simeq f_x(\lambda).$$

Literatur

[1] P. LÉVY, Processus stochasiques et mouvement Brownien, Gautier-Villars, Paris (1948).
[2] K. KARHUNEN, Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, *Ark. Mat.* **1** (1949), 141—160.
[3] O. HANNER, Deterministic and Non-deterministic Stationary Random Processes, *Ark. Mat.* **1** (1949), 161—177.
[4] M. ROSENBLATT, Some Purely Deterministic Processes, *Journal of Math. Mech.* **6**, (1957) 801—810.
[5] Y. K. BELYAEV, Analytic Random Processes, Theory Probab. and Its Appl., *English edition* 4, 402 (1959).
[6] R. MATVEYEV, On Singular Multidimensional Stationary Processes, Theory Prob. and Its Appl. *English edition,* 5, 33 (1960).
[7] Y. A. ROZANOV, Stationary Random Processes (Russian) *Fitzmatgiz, Moskva* (1963).
[8] N. M. BABAYAN, An Asymptotic Behaviour of the Prediction Error, *Zapiski naučnih seminarov LOMI 130, Problemi teor. ver. rasp. 8* (1983).
[9] N. M. BABAYAN, An Asymptotic Behaviour of the Prediction Error in Singular Case, *Theory Prob. and Its Appl.,* 29 (1984).

AUTHOR'S ADRESS:
TIBOR POGÁNY
TEHNIČKI FAKULTET BOR
19210 BOR
UL. JNA 12
JUGOSLAVIEN

(Eingegangen am 2. Juli 1985.)