Sur la généralisation de certains théorèmes touchants l'équation de translation sur le produit direct des groupes

By LEON BIESZK et WŁADYSŁAW GORDZIJEWSKI (Szczecin)

Le but de ce travail est la généralisation de certains résultats du travail [7]. Les résultats ainsi généralisés peuvent trouver leur application dans la théorie de la géométrie de KLEIN [2].

Résumé des résultats. Soit X un ensemble non-vide quelconque et G-un groupe quelconque. Nous étudions l'équation fonctionnelle

$$F(F(x, \alpha), \beta) = F(x, \beta \cdot \alpha), \quad \text{pour} \quad x \in X, \alpha, \beta \in G, \tag{1}$$

où $F\colon X \times G \to X$ est la fonction inconnue.

Théorème 1. *Soit* $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ *le produit direct des groupes* $G_1, \ldots, G_n$. *Alors la solution générale* $F\colon X \times G \to X$ *de l'équation* (1) *peut être écrite sous la forme*

$$F(x, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = F_n(F_{n-1}(\ldots(F_1(x, \alpha_1), \ldots), \alpha_{n-1}), \alpha_n),$$

pour $x \in X$, $\alpha_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, n$,

où $F_i\colon X \times G_i \to X$ *remplissent l'équation* (1) *et la condition suivante*

$$F_i(F_j(x, \alpha_j), \alpha_i) = F_j(F_i(x, \alpha_i), \alpha_j) \tag{2}$$

pour $x \in X, \alpha_i \in G_i$, $\alpha_j \in G_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Théorème 2. *Soit* $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ *le produit direct des groupes* $G_1, \ldots, G_n$ *et soit* $F\colon X \times G \to X$ *la solution de l'équation* (1) *telle que la fonction fixée quelconque* F_k *figurant dans la condition* (2), $1 \leqq k \leqq n$, *est transitive (c.à.d. remplit la condition* $\bigwedge_{x, y \in X} \bigvee_{\alpha_k \in G_k} F_k(x, \alpha_k) = y$*) et aussi commutative (c.à.d. remplit la condition* $F_k(F_k(x, \alpha_k), \beta_k) = F_k(F_k(x, \beta_k), \alpha_k)$, *pour* $x \in X$, $\alpha_k, \beta_k \in G_k$*).*

Alors il existe un sous-groupe normal G_k^* du groupe G_k et aussi l'homomorphisme

$\varphi_k\colon G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n \to G_k/G_k^*$ tel que $F(x, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) =$

$= F_k(x, \alpha_k \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n))$ pour $x \in X$, $\alpha_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$.

A la fin du travail nous donnons des conditions suffisantes pour la continuité de la solution de l'équation [1].

§ 1. Notions fondamentales sur les objets algèbriques

Si X signifie l'ensemble non-vide et G le groupe alors l'équation fonctionnelle

$$F(F(x,\alpha),\beta) = F(x,\beta\alpha), \quad \text{pour} \quad x\in X,\ \alpha,\beta\in G, \tag{1.1}$$

où $F\colon X\times G\to X$ est la fonction cherchée s'appelle *l'équation de translation*.

Soit $G=G_1\times\ldots\times G_n$ le produit direct du groupe G_i, $i=1,\ldots,n$. Dans ce travail nous analysons les relations entre le solution de l'équation de translation (1.1) sur le groupe G et les solutions de l'équation de translation (1.1) sur les groupes G_i, $i=1,\ldots,n$.

Selon ([9], p. 49) la solution $F\colon X\times G\to X$ de l'équation de translation (1.1) s'appelle objet algèbrique si cette solution remplit la condition complémentaire: $F(x,e)=x$, pour chacun des $x\in X$ et aussi pour l'unité $e\in G$.

Un objet algèbrique $F\colon X\times G\to X$ s'appelle transitif si pour $x,y\in X$ quelconques il existe $\alpha\in G$ tel qu'on a $F(x,\alpha)=y$.

Un objet algèbrique $F\colon X\times G\to X$ s'appelle commutatif si la condition

$$F(F(x,\alpha),\beta) = F(F(x,\beta),\alpha), \quad \text{por} \quad x\in X,\ \alpha,\beta\in G, \tag{1.2}$$

est remplie (voir [1], p. 19).

Soit l'objet algèbrique $F\colon X\times G\to X$ pour lequel est défini le sous-ensemble du groupe G:

$$N = \{\alpha\in G\colon \bigwedge_{x\in X} (F(x,\alpha)=x)\}. \tag{1.3}$$

Selon les travaux ([2], [5]) sont vrais les théorèmes comme suit:

(1.4) $\begin{cases} a) \text{ Un objet algèbrique } F\colon X\times G\to X \text{ est commutatif si et seulement si le commutant } K(G) \text{ est compris en } N. \\ b) \text{ Un objet algèbrique } F\colon X\times G\to X \text{ est transitif si et seulement si la fonction } F \text{ prend forme de } F(x,\alpha)=g^{-1}(\alpha g(x)), \text{ pour } x\in X, \alpha\in G, \text{ où } g\colon X\to G/G^* \text{ est une bijection et } G^*\subset G \text{ est un certain sous-groupe.} \end{cases}$

Si $G^*\subset G$ est un sous-groupe normal alors la fonction F de la forme (1.4) $b)$ est constante sur chaque couche $A\in G/G^*$. Cela prouve que pour chaque $x_0\in X$ fixé, l'application suivante

$$\Phi(x_0)\colon G/G^*\ni A \to F(x_0,\alpha)\in X, \quad \alpha\in A \tag{1.5}$$

est bien définie, c.à.d. elle ne dépend pas de $\alpha\in A$.

En outre, vu que $g\colon X\to G/G^*$ est une bijection $\Phi(x_0)\colon G/G^*\to X$ est aussi une bijection.

Il s'en suit qu'on peut définir un nouvel objet algèbrique $\tilde{F}\colon X\times G/G^*\to X$ de la façon suivante:

$$\tilde{F}(x,A) = F(x,\alpha), \quad \text{pour} \quad \alpha\in A\in G/G^*, \quad x\in X. \tag{1.6}$$

On a le

Corollaire 1. *Si* $F\colon X\times G\to X$ *est un objet algèbrique transitif ou commutatif alors les mêmes propriétés caractérisent l'objet algèbrique*

$$\tilde{F}\colon X\times G/G^* \to X \quad \textit{de type } (1.6).$$

Dans les considérations ultérieures nous utilisons ([6], p. 224).

Lemme 1. *Si* $F\colon X\times G\to X$ *est un objet algèbrique transitif et commutatif et la fonction* F *a la forme* (1.4) *b), alors le sous-groupe* $G^*\subset G$ *est normal.*

§ 2. Deux théorèmes fondamentaux

Théorème 1. *Si* $G=G_1\ldots G_n$ *est produit direct des groupes* G_i, $i=1, \ldots, n$, *alors la fonction* $F\colon X\times G\to X$ *remplit l'équation de translation* (1.1) *si et seulement si elle peut être écrite sous la forme*

$$F(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle) = F_n(F_{n-1}(\ldots(F_2(F_1(x, \alpha_1), \alpha_2), \ldots, \alpha_{n-1}), \alpha_n), \tag{2.1}$$

pour $x\in X$, $\alpha_i\in G_i$, $i=1, \ldots, n$, *où* $F_i(x, \alpha_i)$ *remplissent l'équation de translation* (1.1) *pour* $i=1, \ldots, n$, $F_i\colon X\times G_i\to X$ *et la condition suivante*

$$F_i(F_j(x, \alpha_j), \alpha_i) = F_j(F_i(x, \alpha_i), \alpha_j), \tag{2.2}$$

pour $x\in X$, $\alpha_i\in G_i$, $\alpha_j\in G_j$, $i, j=1, \ldots, n$.

Démonstration. Admettons que la fonction $F\colon X\times G\to X$ remplit l'équation de translation (1.1).

Substitutons

$$F_i(x, \alpha_i) \overset{\mathrm{df}}{=} F(x, \langle e_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, e_n\rangle), \tag{2.3}$$

pour $x\in X$, $\alpha_i\in G_i$, $i=1, \ldots, n$.

Il est facile à verifier que les fonctions F_i de type (2.3) remplissent l'équation de translation (1.1) dans les ensembles respectifs $X\times G$, $i=1, \ldots, n$, la condition (2.1) et le système des conditions (2.2).

En plus, selon le système des conditions (2.2), pour une permutation quelconque σ de la suite $(1, \ldots, n)$ on a

$$\begin{aligned} &F_n(F_{n-1}(\ldots F_2(F_1(x, \alpha_1), \alpha_2), \ldots), \alpha_{n-1}), \alpha_n) = \\ &= F_{\sigma(n)}(F_{\sigma(n-1)}(\ldots, F_{\sigma(2)}(F_{\sigma(1)}(x, \alpha_{\sigma(1)}), \alpha_{\sigma(2)}), \ldots), \alpha_{\sigma(n-1)}), \alpha_{\sigma(n)}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Inversement, admettons que les fonctions $F_i\colon X\times G_i\to X$, $i=1, \ldots, n$ remplissent l'équation de translation (1.1) et aussi le système des conditions (2.2). Démontrons qu'alors la fonction $F\colon X\times G\to X$ de type (2.1) remplit l'équation de translation (1.1).

En appliquant (2.1) pour $x \in X$ et $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$, $\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \in G_1 \times \ldots \times G_n$, d'après (2.2), (2.4) et aussi (1.1) nous obtenons successivement:

$$F[F(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle), \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle] =$$

$$= F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_2(F_1(F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_2(F_1(x, \alpha_1), \alpha_2), \ldots, \alpha_{n-1}), \alpha_n), \beta_1), \beta_2), \ldots, \ldots, \beta_{n-1}), \beta_n) =$$

$$= F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_2(F_1(F_1(F_2(, \ldots, F_{n-1}(F_n(x, \alpha_n), \alpha_{n-1}), \ldots, \alpha_2), \alpha_1), \beta_1), \beta_2), \ldots, \ldots, \beta_{n-1}), \beta_n) =$$

$$= F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_2(F_1(F_2(, \ldots, F_{n-1}(F_n(x, \alpha_n), \alpha_{n-1}), \ldots, \alpha_2), \beta_1\alpha_1), \beta_2), \ldots, \ldots, \beta_{n-1}), \beta_n) =$$

$$= \ldots = F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_2(F_1(,x\, \beta_1\alpha_1), \beta_2\alpha_2), \ldots, \beta_{n-1}\alpha_{n-1}), \beta_n\alpha_n) =$$

$$= F(x, \langle\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_2, \ldots, \beta_n\alpha_n\rangle) = F(x, \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \cdot \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle), \quad C.Q.F.D.$$

Faisons d'abord une démonstration du

Lemme 2. *S'il y a des fonctions* $F_i\colon X \times G_i \to X$, $i = 1, \ldots, n$ *qui remplissent l'équation de translation* (1.1) *et le système des conditions* (2.2) *et si l'on définit la fonction auxiliaire* $H\colon X \times G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n \to X$

$$H(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle) = \tag{2.5}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_{k+1}(F_{k-1}(, \ldots, F_2(F_1(x, \alpha_1), \alpha_2), \ldots, \alpha_{k-1}), \ldots, \alpha_{k+1}), \ldots, \alpha_{n-1}), \alpha_n),$$

alors la fonction

$$K\colon X \times G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n \times G_k \to X \tag{2.6}$$

sous forme comme suit

$$K(x, \langle\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle, \alpha_k\rangle) = \tag{2.7}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} F_k(H(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle, \alpha_k),$$

pour $x \in X$, $\alpha_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, n$ *remplit l'équation de translation* (1.1) *et les fonctions* F *et* H *remplissent la condition de commutativité de type* (2.2).

Démonstration. D'abord nous démontrons que les fonctions F_k et H remplissent la condition de commutativité (2.2):

$$F_k[H(x, \beta), \alpha_k] = H[F_k(x, \alpha_k), \beta], \tag{2.8}$$

pour $x \in X$, $\alpha_k \in G_k$,

En effet, en vertu de (2.5) et (2.4) on a successivement:

$$F_k[H(x, \beta), \alpha_k] = F_k[F_n(F_{n-1}(, \ldots, (F_{k+1}(F_{k+1}(, \ldots, F_2(F_1(x, \alpha_1), \alpha_2), \ldots, \ldots; \alpha_{k-1}), \alpha_{k+1}), \ldots), \alpha_{n-1}), \alpha_n), \alpha_n), \alpha_k] = F_n(F_{n-1}(, \ldots, F_{k+1}(F_{k-1}(, \ldots, \ldots, F_2(F_1(F_k(x, \alpha_k), \alpha_1), \alpha_2), \ldots), \alpha_{k-1}), \alpha_{k+1}), \ldots), \alpha_{n-1}), \alpha_n) = H[F_k(x, \alpha_k), \beta].$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, il est facile de vérifier que la fonction $H(x, \beta)$ de la forme (2.5) remplit l'équation de translation (1.1).

A présent nous démontrons la partie principale du lemme, à savoir que la fonction K de la forme (2.6)—(2.7) remplit l'équation de translation (1.1):

$$K[K[x, \langle\beta, \alpha_k\rangle], \langle\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_k\rangle] = K[X, \langle\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_k\rangle \cdot \langle\beta, \alpha_k\rangle], \tag{2.9}$$

pour $x \in X$, $\alpha_k, \tilde{\alpha}_k \in G_k$, $\beta, \tilde{\beta} \in G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n$. En effet, selon (2.6)—(2.7), (2.8) et (1.1), appliquée à la fonction $H(x, \beta)$ on a

$$\begin{aligned} K[K[x, \langle\beta, \alpha_k\rangle], \langle\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_k\rangle] &= K[F_k(H(x, \beta), \langle\alpha_k\rangle), \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_k\rangle = \\ = F_k[H(F_k(H(x, \beta), \alpha_k), \tilde{\beta}), \tilde{\alpha}_k] &= F_k[F_k(H(H(x, \beta), \tilde{\beta}), \alpha_k), \tilde{\alpha}_k] = \\ = F_k[F_k(H(x, \tilde{\beta} \cdot \beta), \alpha_k), \tilde{\alpha}_k)] &= F_k[H(x, \tilde{\beta} \cdot \beta), \tilde{\alpha}_k \cdot \alpha_k] = \\ = K[x, \langle\tilde{\beta} \cdot \beta, \tilde{\alpha}_k \cdot \alpha_k\rangle] &= K[x, \langle\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_k\rangle\langle\beta, \alpha_k\rangle], \quad C.Q.F.D. \end{aligned}$$

Dans le théorême qui suit nous démontrons qu'avec une hypothêse complémentaire sur la fonction $F\colon X \times G \to X$ la relation (2.1) peut être simplifiée.

Théorème 2. *Soit $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ le produit direct des groupes $G_1, \ldots, G_n$ et soit $F\colon X \times G \to X$ la solution de l'équation de translation* (1.1) *telle que chaque objete algèbrique fixé F_k, $1 \leqq k \leqq n$ de type* (2.3) *est transitif et commutatif. Alors il exist un sous-groupe normal G_k^* du groupe G_k ainsi que l'homomorphisme de groupe:*

$$\varphi_k\colon G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n \to G_k/G_k^* \tag{2.10}$$

tel que

$$F(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle) = F_k(x, \alpha_k \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)), \tag{2.11}$$

pour $x \in X$, $\alpha_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. D'abord il faut remarquer que selon (2.7), (2.5) et (2.4), (2.1)—(2.3) la «décomposition» suivante des fonctions est vraie $F\colon X \times G \to X$ —

$$\begin{aligned} F[x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle] &= K[x, \langle\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle, \alpha_k] = \\ &= F_k[H(x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle), \alpha_k], \end{aligned} \tag{2.12}$$

pour $x \in X$, $\alpha_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, n$, où les fonctions F_k et H remplissent la condition (2.8).

En vertu de l'hypothèse et du théorème 1.4 *b)* l'objet algèbrique F_k peut être présenté sous la forme

$$F_k(x, \alpha_k) = g_k^{-1}(\alpha_k g_k(x)), \quad \text{pour} \quad x \in X, \ \alpha_k \in G_k, \tag{2.13}$$

où l'application $g_k\colon X \to G_k/G_k^*$ est une bijection tandis que selon lemme 1 le sous-groupe $G_k^* \subset G_k$ est normal.

Soit $x_0 \in X$ un élément fixé quelconque. Suivant (1.5) la projection suivante est une bijection:

$$\Phi_k(x_0)\colon G_k/G_k^* \to X, \ \Phi_k(x_0)(A) = F_k(x_0, \alpha_k), \ \alpha_k \in A. \tag{2.14}$$

Puisque pour chaque $\beta = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle \in G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n$,

$H(x_0, \beta)\in X$, il en résulte qu'il existe un élément unique $\varphi_k(\beta)\in G_k/G_k^*$ tel que

$$F_k[x_0, \varphi_k(\beta)] = H(x_0, \beta), \tag{2.15}$$

où la fonction H est définie par l'équation (2.5).

Démontrons que la projection ci-dessus définie

$$\varphi_k\colon G_1\times\ldots\times G_{k-1}\times G_{k+1}\times\ldots\times G_n \to G_k/G_k^* \tag{2.16}$$

est un homomorphisme.

En effet, d'après la formule (1.1) appliquée à l'objet $H(x, \beta)$, (2.8), la commutativité de F_k et (2.15), pour $\beta_1, \beta_2\in G_1\times\ldots\times G_{k-1}\times G_{k+1}\times\ldots\times G_n$ on a successivement:

$$\begin{aligned} F_k[x_0, \varphi_k(\beta_1\cdot\beta_2)] &= H(x_0, \beta_1\cdot\beta_2) = H[H(x_0, \beta_2), \beta_1] = \\ &= H\big[F_k(x_0, \varphi_k(\beta_2)), \beta_1\big] = F_k[H(x_0, \beta_1), \varphi_k(\beta_2)] = \\ &= F_k\big[F_k(x_0, \varphi_k(\beta_1)), \varphi_k(\beta_2)\big] = F_k\big[F_k[x_0, \varphi_k(\beta_2)], \varphi_k(\beta_1)\big] = \\ &= F_k[x_0, \varphi_k(\beta_1)\cdot\varphi_k(\beta_2)], \end{aligned}$$

d'où en vertu de l'univocité $\varphi_k(\beta)$ résulte la condition cherchée de l'homomorphisme

$$\varphi_k(\beta_1\cdot\beta_2) = \varphi_k(\beta_1)\cdot\varphi_k(\beta_2). \tag{2.17}$$

Maintenant nous démontrons la vérité de l'égalité (2.11). En effet, pour un élément quelconque $x\in X$, en vertu de la transivité de l'objet F_k il existe un élément $\gamma_k\in G_k$ tel que

$$x = F_k(x_0, \gamma_k). \tag{2.18}$$

L'objet F_k étant commutatif, pour élément quelconque $\beta\in G_1\times\ldots\times G_{k-1}\times\times G_{k+1}\times\ldots\times G_n$, selon (2.18), la commutativité de F_k, (2.15) et aussi (2.8) nous avons successivement:

$$\begin{aligned} H(x, \beta) &= H[F_k(x_0, \gamma_k), \beta] = F_k[H(x_0, \beta), \gamma_k] = \\ &= F_k\big[F_k(x_0, \varphi_k(\beta)), \gamma_k\big] = F_k[F_k(x_0, \gamma_k), \varphi_k(\beta)] = \\ &= F_k[x, \varphi_k(\beta)]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Des formules (2.19), (2.12) et (2.15) il résulte que pour $\beta=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots \ldots, \alpha_n\rangle$ et α_k quelconques on a

$$\begin{aligned} F[x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle] &= F_k[H(x, \beta), \alpha_k] = \\ = F_k\big[F_k[x, \varphi_k(\beta)], \alpha_k\big] &= F_k[x, \alpha_k\varphi_k(\beta)], \end{aligned}$$

ce qui prouve la vérité de la relation (2.11). Ainsi le théorème 2 a été entièrement démontré. En particulier on a les corollaires suivantes:

Corollaire 2. Si les conditions du théorème 2 sont satisfaits, la fonction $F\colon X\times G_1\times\ldots\times G_n\to X$ peut être présenté sous la forme

$$F[x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle] = g_k^{-1}[\alpha_k\varphi_k(\beta_k)\, g_k(x)], \tag{2.20}$$

pour $x\in X$, $\beta = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle\in G_1\times\ldots\times G_{k-1}\times G_{k+1}\times\ldots\times G_n$, $\alpha_k\in G_k$, où la fonction g_k est déterminée par la formule (2.13) et la fonction φ_k est un homomorphisme, définie par les formules (2.15)—(2.16).

En effet, avec les notations ci-dessus, en appliquant successivement les formules (2.12), (2.13), (2.15) et (2.13) on a:

$$F[x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle] = F_k[H(x, \beta), \alpha_k] = g_k^{-1}[\alpha_k g_k(H(x, \beta))] =$$
$$= g_k^{-1}[\alpha_k g_k(F_k(x, \varphi_k(\beta)))] = g_k^{-1}[\alpha_k \varphi_k(\beta)\, g_k(x)].$$

En outre, il est facile de vérifier que chaque fonction F de la forme (2.20) remplit l'équation de translation (1.1).

Pour $\alpha_i, \ \gamma_i \in G_i, \ i=1, \ldots, n, \ \beta = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\rangle$,

$$\delta = \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n\rangle \text{ on a:}$$
$$F[F[x, \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle], \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle] =$$
$$= F[g_k^{-1}(\alpha_k \varphi_k(\beta)\, g_k(x)), \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle] = g_k^{-1}[\gamma_k \varphi_k(\delta)\, \alpha_k \varphi_k(\beta) \cdot g_k(x)] =$$
$$= g_k^{-1}[\gamma_k \alpha_k (\varphi\beta)\, g_k(x)] = F[x, \langle\gamma_1\alpha_1, \ldots, \gamma_n\alpha_n\rangle] =$$
$$= F[x, \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle \cdot \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle], \quad C.Q.F.D.$$

Corollaire 3. *Si dans les conditions du théorème* 2 *l'objet* F_k *est effectif, c.à.d la condition:*

$$\bigwedge_{\alpha_k, \tilde{\alpha}_k \in G_k} \Big[\bigwedge_{x \in X} \big(F_k(x, \alpha_k) = F_k(x, \tilde{\alpha}_k)\big) \Rightarrow (\alpha_k = \tilde{\alpha}_k)\Big], \tag{2.21}$$

est remplie, alors la projection φ_k, *determinée par les formules* (2.15)—(2.16) *est un homomorphisme de groupes* $G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n$ et G_k.

En effet, comme dans la travail ([7], p. 227), nous démontrons que (2.22): $G_k^* = \{e_k\}$, ce qui prouve le corollaire.

§ 3. Équation de translation sur le produit direct des groupes topologiques

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats qui sont plus généraux que ceux du paragraphe analogue dans le travail [7], (§ 3, p.p. 227—228).

Soit X un espace topologique et soient $G_i, \ i=1, \ldots, n$ des groupes topologiques. Alors le produit direct des groupes $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ constitue aussi un groupe topologique et nous pouvons dans ce cas-là chercher la solution de l'équation de translation continue (1.1), [8].

Nous démontrons ce qui suit:

Théoréme 3. *Soit* X *un espace topologique de Hansdorff localement compact dans un certain point* $\tilde{x} \in X$. *Soit donnée la suite des groupes topologiques* $G_i, \ i=1, \ldots, n$, *parmi lesquels un groupe fixé quelconque* $G_k, \ 1 \leqq k \leqq n$, *est un produit dénombrable d'ensembles compacts. Soit* $F\colon X \times G \to X$ *une fonction qui remplit l'équation de translation* (1.1), *où* $G = G_1 \times \ldots \times G_n$; *soit la fonction* $F_k\colon X \times G \to X$, ***définie par*** *l'équation* (2.3), *un objet algèbrique transitif et commutatif.*

Supposons que la fonction F_k satisfaît aux deux conditions complèmentaires:
(3.1) il existe un point $x_0 \in X$ tel que la fonction

$$G_k \ni \alpha_k \to F_k(x_0, \alpha_k) \in X$$

est continue;
(3.2) pour chaque $\tilde{\alpha}_k$ fixé la fonction

$$X \ni x \to F_k(x, \tilde{\alpha}_k) \in X$$

est continue.

Soient des éléments $x_1 \in X$, $\alpha_k^1 \in G_k$ tels que la fonction

$$G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n \in \beta \to F[x_1, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k^1, \ldots, \alpha_n \rangle] \in X, \tag{3.3}$$

où $\beta = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \rangle$, est continue dans un certain point $\beta_1 = \langle \alpha_1^1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{k-1}^1, \alpha_{k+1}^1, \ldots, \alpha_n^1 \rangle \in G_1 \times \ldots \times G_{k-1} \times G_{k+1} \times \ldots \times G_n$.

Alors l'homomorphisme φ_k défini par les équations (2.15)—(2.16) est continu et la fonction $F\colon X \times G \to X$ est aussi continue.

Démonstration. Selon ([4], p. 90) la fonction F_k peut être écrite sous la forme (2.13) de telle manière que la fonction g_k de cette formule est un homomorphisme.

Selon les hypothèses du théorème et de la formule (2.20) on obtient*

$$\varphi_k(\beta) = (\alpha_k^1)^{-1} g_k[F(x, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k^1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \rangle] \cdot (g_k(x))^{-1}. \tag{3.4}$$

Pour le point $\tilde{x} \in X$ on a

$$G_k = g_k^{-1}(\{\tilde{x}\}). \tag{3.5}$$

Suvant lei raisonnement du travail ([7], p. 227) avec (3.4)—(3.5) nous allons démonstrer que l'homomorphisme φ_k est continu.

Ainsi en vertu de la formule (2.20) on voit que la fonction F, comme la superposition de fonctions continues, est continue, C.Q.F.D.

Pour illustrer notre raisonnement on donne un *Example*. Admettons la fonction suivante:

$$F(x, \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) = x + c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma + c_4 \delta, \tag{3.6}$$

pour $x \in R$, $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in K$, où les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 diffèrentes de zéro et K est le groupe additif des quaternions.

Nous considérons l'ensemble des nombres réels R comme un espace topologique avec la topologie simple et l'espace topologique $K = R \times R \times R \times R$ comme le produit cartésien avec la topologie productive.

Il est facile à vérifier que la fonction (3.6):

$$F\colon R \times K \to R \tag{3.7}$$

remplit l'équation de translation (1.1) et que la fonction F est un objet algèbrique transitif, commutatif et effectif.

* Dans le travail ([7], p. 227) la formule (13) doit comprendre

$$\varphi(\alpha) = \beta_1^{-1} g_2(F(x_1, \langle \alpha, \beta \rangle) \cdot (g_2(x))^{-1}.$$

De (3.6) nous obtenons quatre objets algèbriques:

$$\begin{cases} F_1(x, \ \alpha) = x+c_1\alpha, & x\in R, \quad \alpha\in R; \\ F_2(x, \beta i) = x+c_2\beta, & x\in R, \quad \beta\in R; \\ F_3(x, \gamma j) = x+c_3\gamma, & x\in R, \quad \gamma\in R; \\ F_4(x, \delta k) = x+c_4\delta, & x\in R, \quad \delta\in R. \end{cases} \tag{3.8}$$

Tous les objets algèbriques (3.8) sont transitifs, commutatifs et effectifs.
Du corollaire 3 il résulte que

$$G_p^* = \{0\}, \quad p = 1, 2, 3, 4. \tag{3.9}$$

En vertu de (3.6) et (3.8) on a

$$F(x, \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k) = F_4\big[F_3[F_2[F_1[x, \alpha], \beta], \gamma], \delta\big]. \tag{3.10}$$

Selon (2.15), (3.6) et (3.8) nous obtenons, p. ex.

$$\varphi_3(\langle\alpha, \beta, \delta\rangle) = \frac{c_1\alpha+c_2\beta+c_4\delta}{c_3}. \tag{3.11}$$

Selon (3.11) et (3.6) on a

$$F(x, \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k) = F_3\big[x, (\gamma+\varphi_3(\langle\alpha, \beta, \delta\rangle))j\big]. \tag{3.12}$$

De la formule (2.20) il est facile de tirer la conclusion que

$$g_3(x) = \frac{x}{c_3}. \tag{3.13}$$

Alors on a

$$F(x, \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k) = c_3\cdot\left[\gamma+\varphi_3(\langle\alpha, \beta, \delta\rangle)+\frac{x}{c_3}\right]. \tag{3.14}$$

References

[1] J. Gancarzewicz, On commutative algebraic objects over a groupoid, *Zeszty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Prasce Matematyezne* **12** (1968), 19—25.

[2] M. Kucharzewski, E. J. Jasińska, Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, *Dem. Mathem.* (1974), 381—402.

[3] M. Kania, Z. Moszner, Sur les objets algèbriques commutatifs lecture delivered at the *XI International Symposium on Functional Equations.*

[4] Z. Moszner, O pewnym twierdzeniu z teorii eiagłych grup przekształceń, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, Zeszyt* **41**, *Prace Matematyczne* **6** (1970), 83—91.

[5] Z. Moszner, Structure de l'automate plein, reduit et invertible, *Aequationes Mathematicae* **9** (1973), 46—59.

[6] Z. Moszner, J. Tabor, L'équation de translation sur une structure avec zéro, *Ann. Polon. Math.* **31** (1976), 255—264.

[7] S. Midura, J. Tabor, The translation equation on a direct product of groups, *Ann. Polon. Math.* **35** (1978), 223—228.

[8] L. S. Pontriagin, Grupy topologiczne, *Warszawa* (1961).

[9] A. Zajtz, Algebraic objets, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, *Prace Matematyczne* **12** (1968), 67—79.

(Reçu 28 mai, 1984.)