Описание модулей с двумя образующими над ненётеровым кольцом нормирования

К. БУЗАШИ (Дебрецен)—Н. И. ВИШНЯКОВА (Харьков)

Пусть R—ненётерово кольцо нормирования (коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь). Все рассматриваемые R-модули будут предполагаться унитарными.

Локально цикличеким R-модуем будем называть R-модуль, каждый конечно порождённый подмодуль которого цикличен. Если M R-модуль, то элемент $x \in M, x \neq 0$ называется регулярным, если циклический подмодуль (x) свободен. Модуль M назовём регулярным, если он содержит регулярный элемент. Эту терминологию будем использовать и для идеалов кольца R.

Будем употреблять следующие обозначения:

V — максимальный идеал кольца R;

A — простой идеал кольца R, состоящий из всех нерегулярных элементов кольца;

R_A— полное кольцо частных кольца R (R_A совпадает с кольцом частных кольца по отношению к мультипликативной системе всех регулярных элементов в R).

Будем говорить, что ненулевые идеалы $I, J \subseteq R$ принадлежат к одному классу, если существуют такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$.

Если R—целостное кольцо, то ненулевые аннуляторы его ненулевых элементов лежат в одном классе идеалов. Условимся считать, что идеал (0) образует класс идеалов, если R—целостное кольцо, и что (0) лежит в классе ненулевых аннуляторов ненулевых элементов кольца, если R нецелостно.

Если $I \neq 0$, то стабилизатором $S(I)$ идеала I назовём подмножество $S(I) = \{a \in R | aI = I\}$.

Стабилизатор $S(I)$ есть инвариант класса идеалов (см. [1]). Легко показать, что ненулевые аннуляторы ненулевых элементов произвольного локально циклического модуля M лежат в одном классе идеалов.

Идеал $I \subseteq R$ назовём регулярно главным, если I порождает в полном кольце частных R_A главный идеал.

Лемма 1. *Пусть M—локально циклический модуль, $u \in M$, $u \neq 0$. Если $\lambda x = \lambda y = u$ $(\lambda \in R)$, то $y = \Theta x$, где Θ—обратимый элемент кольца R.*

Доказательство. Предположим, для определённости, что $(x) \subseteq (y)$. Пусть $x = \gamma y$, где $\gamma \in V$. Тогда $\lambda \gamma y = \lambda y$, откуда $\lambda(1-\gamma)y = 0$, что ведёт к противоречию, ибо $(1-\gamma)$—обратимый в R элемент. Значит, γ—единица кольца R. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $a, b, c \in R$ *и* $ab = ac \neq 0$. *Тогда* $b = \Theta c$, *где* Θ*—единица* R.

Лемма 2. *Пусть* $a, b \in R$ *и* $b = at$. *Идеалы* $\mathrm{Ann}\, a$ *и* $\mathrm{Ann}\, b$ *совпадаюм тогда и только тогда, когда* t*—регулярный элемент кольца* R.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ann}\, a = \mathrm{Ann}\, b$. Тогда

$$(b) \cap \mathrm{Ann}\, t = 0. \tag{1}$$

В самом деле, пусть $(bc)\, t = 0$ и $bc \neq 0$. Так как

$$\mathrm{Ann}\,(bc) = \frac{\mathrm{Ann}\, b}{c} = \frac{\mathrm{Ann}\, a}{c} = \mathrm{Ann}\,(ac),$$

то $act = 0$, но с другой стороны $act = bc \neq 0$. Получили противоречие.

Если b регулярен, то элемент t также регулярен. Если же b нерегулярен, то из (1) вытекает, что t снова регулярен.

Наоборот, если t регулярен, то, очевидно, аннуляторы элементов a и b совпадают. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* R*—кольцо нормирования, а* $I \neq 0$*—идеал в* R. *Тогда каждый* R*-гомоморфизм* $\varphi\colon I \to R$ *задаётся формулой*

$$\varphi(\lambda) = \Theta_\lambda \delta \lambda, \tag{2}$$

где $\lambda \in I$, Θ_λ*—единицы в* R, *а* δ*—фиксированный элемент из полного кольца частных* R_A *кольца* R.

Доказательство. Покажем, что $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R_A$. Предположим сначала, что идеал I содержит регулярный элемент λ. Тогда все элементы $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$ также регулярны. Так как в кольце R_A все регулярные элементы обратимы, то для всех $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$ имеет место формула $\varphi(\mu) = \mu \delta_\mu$ где $\delta_\mu \in R_A$. Тогда, очевидно, эта формула справедлива для всех $\lambda \in I$.

Предположим теперь, что I—нерегулярный идеал. Пусть $\lambda \in I$, $\lambda \neq 0$ и $J = \mathrm{Ann}\, \lambda$. Тогда $J\varphi(\lambda) = 0$. Применяя лемму 2, получим, что либо $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R$, либо $\lambda = \gamma \varphi(\lambda)$, где γ—регулярный элемент кольца. В любом случае $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R_A$. Фиксируем элемент $\lambda \in I$, $\lambda \neq 0$. Пусть $\varphi(\lambda) \neq 0$. Если $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$, то $\lambda = \mu\tau$ $(\tau \in R)$ и

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\tau\mu) = \tau\varphi(\mu) = \tau\mu\delta_\mu = \lambda\delta_\mu = \lambda\delta_\lambda. \tag{3}$$

На основании леммы 2 из (3) вытекает, что все элементы δ_μ обратимы в R_A, если δ_λ обратим в R_A, и все элементы δ_μ необратимые элементы кольца R, если $\delta_\lambda \in R$ и δ_λ—необратим в R. Предположим, что δ_λ—необратимый элемент в R. Тогда из (3), ввиду следствия из леммы 1, получаем $\delta_\mu = \delta_\lambda \Theta_\mu$ для всех $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$, где Θ_μ—единица кольца R. Пусть δ_λ обратим в R_A. Тогда один из элементов δ_λ; $\dfrac{1}{\delta_\lambda}$ является регулярным элементом кольца R, и то же имеет место для элементов δ_μ, $\dfrac{1}{\delta_\mu}$. Снова применяя (3) и следствие из леммы 1, получим, что один из элементов $\delta_\mu \cdot \delta_\lambda^{-1}$, $\delta_\lambda \cdot \delta_\mu^{-1}$ обрятим в R. В любом случае $\delta_\mu = \Theta_\mu \delta_\lambda$, где Θ_μ—еиница R.

Итак, для всех $\lambda \in I$ имеет место формула (2). Лемма доказана.

Следствие. *Если I—регулярный идеал кольца R, а гомоморфизм φ: $I \to R$ отображает I на регулярный идеал кольца R, то $\varphi(\lambda)=\delta\lambda$ $(\lambda \in I)$, где δ—фиксированный обратимый элемент в R_A.*

Доказательство. Пусть λ и μ—регулярные элементы идеала I с регулярными образами $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$. Тогда в силу (3) $\lambda\delta_\lambda=\lambda\delta_\mu$, откуда $\delta_\lambda=\delta_\mu$. Значит формула (3) принимает вид $\varphi(\lambda)=\delta\lambda$, где δ—фиксированный обратимый элемент кольца R_A.

Лемма 4. *Кольцо R-эндоморфизмов произвольного локально циклического модуля M локально.*

Доказательство. Пусть $M \neq 0$. Покажем, что разность двух необратимых эндоморфизмов модуля M также необратима. Пусть φ—произвольный необратимый эндоморфизм модуля M. Если для всех $x \in M$ выполняются включения $(x) \subseteq (\varphi(x))$, то φ—сюръективное отображение и из $\varphi(x)=0$ следует, что $x=0$, то есть $\varphi - R$-автоморфизм модуля M. Следовательно, существует такой элемент $u \in R$, $u \neq 0$, что $\varphi(u)=\lambda u$. Тогда для любого $x \in M$ имеет место формула

$$\varphi(x) = \lambda \Theta_x x, \tag{4}$$

где Θ_x—единица кольца R. В самом деле, если $x \in (u)$, то $x=\mu u$ и $\varphi(x)= =\mu\varphi(u)=\mu\lambda u=\lambda x$. Пусть $(u) \subset (x)$ и $u=\gamma x$; $\gamma \in R$. Тогда $\varphi(\gamma x)=\lambda\gamma x=\gamma\varphi(x)$. Так как $\varphi(u) \neq 0$, то ввиду леммы 1 имеем $\varphi(x)=\lambda\Theta_x x$, где Θ_x—единица кольца R, что устанавливает формулу (4).

Если для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $\operatorname{Ann}\varphi(x)=\operatorname{Ann} x$, то φ—R-автоморфизм модуля M, так как тогда $(x)=(\varphi(x))$ для всех $x \in M$, и при этом φ—мономорфизм. Следовательно, эндоморфизм (4) необратим тогда и только тогда, когда имеет место строгое включение

$$\operatorname{Ann}\varphi(x) \supset \operatorname{Ann} x \tag{5}$$

для некоторого $x \in M$, $x \neq 0$.

Пусть $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, $\operatorname{Ann} x_0=I \neq 0$ и φ—эндоморфизм вида (4). Предположим, что $\operatorname{Ann}\varphi(x_0)=\operatorname{Ann} x_0=I$. Тогда $\lambda I=I$, то есть λ—элемент стабилизатора идеала I. Идеалы из одного класса идеалов имеют один и тот же стабилизатор. Так как ненулевые аннуляторы ненулевых элементов локально циклического модуля M лежат в одном классе идеалов, то включение (5) одновременно выполняется или не выполняется для всех $x \in M$, $x \neq 0$. Пусть теперь φ_1 и φ_2 — два необратимых эндоморфизма модуля M вида (4). Тогда для всех $x \in M$, $x \neq 0$ по доказанному выполняются строгие включения

$$\operatorname{Ann}\varphi_1(x) \supset \operatorname{Ann} x, \quad \operatorname{Ann}\varphi_2(x) \supset \operatorname{Ann} x.$$

Следовательно, для эндоморфизма $\psi=\varphi_1-\varphi_2$ также выполняются строгие включения

$$\operatorname{Ann}\psi(x) \supset \operatorname{Ann} x$$

для всех $x \in M$, $x \neq 0$.

Итак, разность двух необратимых R-эндоморфизмов модуля M является необратимым эндоморфизмом. Следовательно, кольцо R-эндоморфизмов локально циклического модуля локально. Лемма доказана.

Следствием леммы 4 и известных теорем единственности [2], [3], [4] является

Предложение 1. *Изоморфные любые два разложения R-модуля M в прямые суммы локально циклических модулей.*

В дальнейшем будут рассматриваться R-модули M с двумя образующими.

Пусть $M=(a, b)-R$-модуль с двумя образующими, $I_1=\operatorname{Ann} a$, $I_2=\operatorname{Ann} b$ и, для определенности, $I_1\subseteq I_2$. Тогда M можно рассматривать как точный модуль над кольцом $R_1=R/I_1$. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать точные циклические модули с двумя образующими.

Введём один существенный инвариант модуля M. Рассмотрим всевозможные идеалы I кольца R, такие, что модуль IM локально цикличен. Объединение J всех таких идеалов очевидно является наибольшим (по включению) из идеалов I, для которых подмодуль IM локально цикличен. Будем называть J идеалом-инвариантом модуля M, а иногда для краткости инвариантом. Если для всех идеалов $I\neq 0$ модуль IM не локально цикличен, то инвариант J есть нулевой идеал.

Прежде всего покажем, что модуль M можно задать специальной системой образующих, связанной с инвариантом J.

Пусть M — точный циклический модуль с двумя образующими: $M=(a, b)$, $\operatorname{Ann} a=0$. Пусть $I=\operatorname{Ann} M/(a)$, $I\neq 0$.
Тогда в силу леммы 3

$$\tau b = \Theta_\tau \delta \tau a \tag{6}$$

или

$$\tau b = \frac{\Theta_\tau \tau}{\varrho} a, \tag{7}$$

где $\tau\in I$, Θ_τ — единицы R, $\delta\in R$, $I\subset(\varrho)$ а ϱ — регулярный элемент.

Если в (6) δ — необратимый элемент, то сделаем замену $\bar{b}=b+a$. Тогда

$$\tau\bar{b} = \tau(1+\Theta_\tau\delta) a, \tag{8}$$

где $\Theta'_\tau=1+\Theta_\tau\delta$ — единицы кольца R и $\operatorname{Ann}\bar{b}=0$.

Пусть имеет место формула (7). Тогда

$$\operatorname{Ann} b = 0;\ \operatorname{Ann} M/(b) = \frac{I}{\varrho} = I_1.$$

Действительно, если $\lambda a=\mu b$, то в силу (7) $\mu=\tau\gamma\in I$ и

$$\lambda = \frac{\Theta_\tau\cdot\tau}{\varrho}\tau \quad (\gamma\in R).$$

Таким образом, для элементов $\tau' \in I_1$ имеют место формулы

$$\tau' a = \Theta_{\tau'} \varrho \tau' b. \tag{9}$$

Сравнивая (6), (7), (8) и (9), окончательно получаем, что модуль M либо свободен, либо может быть задан двумя свободными образующими так, что

$$\tau b = \theta_\tau \tau a; \quad \tau \in I = \operatorname{Ann} M/(a) \tag{10}$$

$$I \neq 0; \quad \operatorname{Ann} a = 0; \quad \operatorname{Ann} b = 0.$$

Назовем элементы a, b, участвующие в записи (10), канонической системой образующих.

Покажем теперь, что идеал I в (10) совпадает с инвариантом J модуля M. В самом деле, из (10) следует, что $Ib = Ia = IM$. Значит, модуль IM локально цикличен. Предположим, что $R \supset I' \supset I$ и покажем, что модуль $I'M$ не локально цикличен. Действительно, Ib — собственный подмодуль модуля $I'b$, так как модуль (b) свободен. Далее

$$I'M = (I'b, I'a).$$

Пусть $x \in I'b \cap I'a$. Тогда

$$x \in Ib \cap I'a = Ia \cap I'a = Ia,$$

и, следовательно, $I'b \cap I'a = Ib = Ia$. Значит, фактор-модуль $I'M/Ib$ разлагается в прямую сумму циклических подмодулей

$$I'M/Ib = I'b/Ib \dotplus I'a/Ia. \tag{11}$$

Отсюда сразу вытекает, что подмодуль $I'M$ не является локально циклическим, ибо каждый фактор-модуль локально циклического модуля локально цикличен. Таким образом, I — наибольший по включению идеал, для которого модуль IM локально цикличен, то есть $I = J$.

Теорема 1. *Пусть M—точный нециклический модуль с двумя образующими и инвариантом J. Модуль M свободен тогда и только тогда, когда $J = 0$. Все модули M с ненулевым инвариантом J задаются автоморфизмом φ идеала J вида:*

$$\varphi(\tau) = \Theta_\tau \tau, \tag{12}$$

где Θ_τ — единицы кольца R. Модули M и M', соответствующие автоморфизмам φ и φ', изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая обратимая над R матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

что

$$(\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \Theta'_\tau \equiv (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \pmod{\operatorname{Ann} \tau} \tag{13}$$

для всех $\tau \in J$.

Доказательство. Если модуль M свободен, то, очевидно, $J=0$. Пусть $J=0$. Зададим модуль M образующими a, b, где $\operatorname{Ann} a=0$ и $b \notin (a)$. Пусть $I=\operatorname{Ann} M/(a)$. Если $I=0$, то M свободен, а если $I \neq 0$, то, как показано выше, модуль M обладает системой образующих a_1, b_1 такой, что $\operatorname{Ann} a_1=0$, $\operatorname{Ann} b_1=0$ и

$$\operatorname{Ann} M/(a_1) = I_1 \neq 0,$$

причем $I_1=J$. Значит, модуль с ненулевым инвариантом J свободен.

Пусть $J \neq 0$. Выберем в M две канонические системы образующих a, b и a', b', где

$$\tau b = \Theta_\tau \tau a;\ \tau b' = \Theta'_\tau \tau a' \quad (\tau \in J). \tag{14}$$

Тогда

$$a' = \gamma_{11} a + \gamma_{21} b; \quad b' = \gamma_{12} a + \gamma_{22} b \tag{15}$$

и

$$\tau a' = (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \tau a; \quad \tau b' = (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \tau a. \tag{16}$$

Ввиду (14) и (16)

$$\Theta'_\tau (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \tau a = (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \tau a,$$

откуда

$$\Theta'_\tau (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \equiv (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \quad (\operatorname{mod} \operatorname{Ann} \tau), \quad (\tau \in J). \tag{17}$$

Из (11) следует, что

$$M/JM = (a)/Ja \dotplus (b)/Jb \tag{18}$$

$$M/JM = (a')/Ja' \dotplus (b')/Jb'.$$

Следовательно, в силу предположения 1 определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

обратим по модулю J, а тогда и обратим в R.

Мы установили необходимость условий теоремы. Они также и достаточны, ибо, если матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

обратима и выполняются сравнения (17), то элементы a' и b', заданные формулами (15), дают каноническую систему образующих для модуля M, причем $\tau b' = \Theta'_\tau \tau a'$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть J — нерегулярный неглавный идеал кольца R со счетным числом образующих, не являющийся регулярно главным. Тогда группа R-автоморфизмов модуля J вида $\tau \to \Theta_\tau \tau$ ($\tau \in J$, Θ_τ—единица R) имеет по меньшей мере мощность континуума.*

Доказательство. Так как J — не главный и не регулярно главный идеал, то J можно представить в виде объединения строго возрастающей цепочки главный идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset \dots$$

где

$$\operatorname{Ann} a_{i+1} \subset \operatorname{Ann} a_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(см. лемму 2), и идеал $\operatorname{Ann} a_{i+1}$ не является максимальным в $\operatorname{Ann} a_i$.

Фиксируем индекс i. Пусть Θ_i — единица кольца R. Так как $\operatorname{Ann} a_{i+1}$ не максимален в $\operatorname{Ann} a_i$, то существуют такие главные идеалы (c_1) и (c_2); что

$$\operatorname{Ann} a_i \supset (c_1) \supset (c_2) \supset \operatorname{Ann} a_{i+1}.$$

Пусть $c_2 = c_1 a \ (a \in V)$. Положим

$$\Theta'_{i+1} = \Theta_i + c_1 b_1, \ \Theta''_{i+1} = \Theta_i + c_1 b_2,$$

где b_1 и b_2 — такие элементы кольца R, что $b_1 \not\equiv b_2 \pmod a$. Тогда

$$\Theta'_{i+1} \equiv \Theta''_{i+1} \equiv \Theta_i \pmod{\operatorname{Ann} a_i}$$

и $\Theta'_{i+1} a_{i+1} \neq \Theta''_{i+1} a_{i+1}$. Значит каждый автоморфизм $a_i \to \Theta_i a_i$ идеала (a_i) по крайней мере двумя способами продолжается до автоморфизма идеала (a_{i+1}), а отсюда сразу следует, что существует по меньшей мере континуальное множество различных автоморфизмов идеала J. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть M — нециклический точный R-модуль с двумя образующими, а $J \neq 0$ — инвариант модуля M. Если J — главный, регулярный или нерегулярный, но регулярно главный идеал, то модуль M разложим.*

Если R — счетное кольцо, то существует континуум попарно неизоморфных точных модулей, соответствующих нерегулярному неглавному и не регулярно главному инварианту J, и среди них точно один разложимый.

Доказательство. Предположим, что J — регулярно главный идеал. Тогда совпадают аннуляторы всех элементов $\tau \in J$, $\tau \neq 0$ (лемма 2). Значит, в формулах (10) единицы Θ_τ могут быть заменены одной единицей Θ: $\tau b = \Theta \tau a$ для всех $\tau \in J$. Тогда модуль $M = (a, b)$ допускает прямое разложение

$$M = (a) \dotplus (b - a\Theta). \tag{19}$$

Если J — регулярный идеал, то в силу леммы 3 каждый его автоморфизм имеет вид $\tau \to \tau\varrho$ или $\tau \to \dfrac{\tau}{\varrho}$, где ϱ — фиксированный регулярный элемент кольца R. Следовательно, для регулярного идеала J формулы (10) принимают вид $\tau b = \Theta \tau a$ (Θ — единица R) и снова получаем разложение вида (19).

Наконец, если J — главный идеал, то модуль M конечно представим. Его разложение очевидно.

Предположим теперь, что R — счетное кольцо, а J — нерегулярный, неглавный и не регулярно главный идеал. Тогда в силу леммы 5 существует континуум автоморфизмов φ: $J \to J$, определяющих модули M по формуле (10). С другой стороны, ввиду счетности кольца R и (13) существует не более чем счетное множество модулей, изоморфных фуксированному модулю M вида (10). Следовательно, сущесвует континуум попарно неизоморфных модулей M с инвариантом J. Докажем, что среди этих модулей (с точностью до изоморфизма) существует точно один разложимый. В самом деле, пусть модуль M разложим $M=M_1+M_2$. Тогда

$$JM = JM_1 \dotplus IM_2 \tag{20}$$

(прямая сумма, быть может, с нулевыми слагаемыми). Так как модуль JM локально циклический, то точно одно слагаемое в правой части должно быть нулевым, например, $JM_2=0$. Тогда $JM=JM_1$. По доказанному ранее M/JM есть прямая сумма двух циклических модучей с аннульятором J (см. (18)). С другой стороны

$$M/JM \cong (M_1 \dotplus M_2)/JM = (M_1 \dotplus M_2)/JM_1 \cong M_1/JM_1 \dotplus M_2.$$

В силу предложения 1 об изоморфизме прямых разложений, M_2—циклический модуль с аннулятором J. Пусть $M=(\lambda_1 a+\lambda_2 b)$. Если λ_2 — обратимый элемент R, то $M=(a, \lambda_1 a+\lambda_2 b)$. Более того, $M=(a)\dotplus M_2$, ибо если $\delta(\lambda_1 a+\lambda_2 b)\in(a)$, то $\delta\in J$, и тогда $\delta(\lambda_1 a+\lambda_2 b)=0$. Значит, $M_1=M/M_2\cong(a)$. Предположим, что $\lambda_2\in V$. Тогда λ_1 — единица R, так как прямое слагаемое M_2 не содержится собственным образом в объемлющем циклическом подмодуле. Имеем для $\tau\in J$

$$\tau(\lambda_1 a+\lambda_2 b) = \tau\lambda_1 a+\tau\lambda_2\Theta_\tau a = \tau(\lambda_1+\lambda_1\Theta)a = 0.$$

Но $\lambda_1+\lambda_2\Theta_\tau$ — единица R и, значит, последнее равенство противоречит тому, что (a) — свободный модуль.

Итак, если $M=M_1\dotplus M_2$, то (после перенумерации) $M_1\cong(a)$, $M_2\cong R/J$. Теорема доказана.

Замечание. *Мы не использовали счетность кольца R для доказательства единственности разложения модуля M с фиксированным инвариантом J.*

Литература

[1] С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. Publ. Math. (Debrecen), **29** (1982), 171—176.

[2] C. Azumaya, Corrections and supplementories to my paper concerning Krull—Remark—Schmidt's theorem. *Nagoya Math. J.* (1950), 117—124.

[3] R. Swan, Algebraic *K*-theory. Lecture Notes in Math., *Springer, Berlin,* 76.

[4] R. B. Warfield, Krull—Schmidt theorem for infinite sums of modules. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **22** (1969), 460—465.

(Поступило: 30. X. 1984 г.)