Sur deux formes équivalentes de la notion de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein

Par BIESZK LEON et STASIAK EUGENIUSZ (Szczecin)

1. Notions et notations fondamentales

Le but de ce travail est de donner la solution du problème de la (r, s)-orientation de la géométrie de Klein, posé par M. Kucharzewski, tandis que la notion de (r, s)-orientation vient des auteurs de ce travail-ci. On donne deux formes équivalentes de cette notion.

Le problème ci-dessus se pose naturellement à partir de l'analyse des travaux ([9], [10]). Avant de préciser de plus pres ce que nous comprenons par (r, s)-orientation nous allons rappeler quelques notions fondamentales de la théorie de la géométrie de Klein.

Par la géométrie de Klein nous comprenons l'objet géométrique abstrait effectif (M, G, F), [4], c'est-à-dire la trois composée d'un ensemble non-vide M, du groupe G et de l'opération $F\colon M\times G\to M$ remplissante les trois conditions suivantes:

$$\forall x\in M\ \forall g_1, g_2\in G\quad (F(F(x, g_1), g_2) = F(x, g_2\cdot g_1)), \tag{1.1}$$

$$\forall x\in M\quad (F(x, e) = x), \tag{1.2}$$

$$\forall x\in M\quad (F(x, g) = x \Rightarrow g = e). \tag{1.3}$$

Pour quelconque sous-ensemble non-vide $P\subset M$ considérons le sous-groupe

$$H(P) = \{g\in G\colon \forall x\in P,\ F(x, g) = x\}. \tag{1.4}$$

Le sous-ensemble $P\subset M$ nous appelons le repère de la géométrie de Klein (M, G, F), [7] si est remplie la condition

$$H(P) = \{e\}. \tag{1.5}$$

Considérons l'objet produit de la géométrie de Klein, [3], qui constitue lui-même la géométrie de Klein :

$$(M^s, G, F^s), \tag{1.6}$$

où $M^S = M\times\ldots\times M$ (s fois) et pour $\forall x=(x_1, \ldots, x_s)\in M^s$ $\forall g\in G$ l'opération F^s a la forme

$$F^s(x, g) \overset{\mathrm{df}}{=} (F(x_1, g), \ldots, F(x_s, g)). \tag{1.7}$$

Par M_S nous désignons la classe de tous les repères $x \in M^s$ de l'ordre s, c'est-à-dire des suites $(x_1, \ldots, x_s)$ des éléments différents de l'ensemble M pour lesquelles $H\big((x_1, \ldots, x_s)\big) = \{e\}$. Il apparaît que M_S est un sous-ensemble invariant de l'objet (1.6), ([7], Hilfssatz 1.1), nous pouvons donc former le sous-objet de l'objet (1.6) :

$$(1.8) \qquad (M_s, G, F_s), \quad F_s \overset{\mathrm{df}}{=} F | M_s \times G.$$

Admettant que $M_s \neq 0$ désignons par $\mathfrak{M}_S$ quelconque orbite de la fibre M_s de l'objet (1.8).

Nous pouvons donc former le sous-objet de l'objet (1.8) :

$$(1.9) \qquad (\mathfrak{M}_S, G, \hat{F}_s), \quad \hat{F}_s \overset{\mathrm{df}}{=} F_s|_{\mathfrak{M}_s \times G}.$$

A partir de l'objet (1.9) nous allons définir (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F).

Définition 1. La suivante décomposition de l'orbite $\mathfrak{M}_S$ sur r composants nous appelons invariante :

$$(1.10) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_S = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_s^i, \\ \forall\, i \neq j, \quad i, j \in (1, \ldots, r), \mathfrak{M}_s^i \cap \mathfrak{M}_s^j = \emptyset, \mathfrak{M}_s^i \neq \emptyset, \\ (\forall\, x, y \in \mathfrak{M}_s^i, \quad i \in (1, \ldots, r) \forall\, g \in G \exists j \in (1, \ldots, r) \Rightarrow \hat{F}_s(x, g), \hat{F}_s(s, g) \in \mathfrak{M}_s^j. \end{cases}$$

Définition 2. Nous disons que la géométrie de Klein (M, G, F) est (r, s)-orientable si l'orbite fixée $\mathfrak{M}_S$ de l'objet (1.8) a la décomposition invariante de type (1.10) ; les parametres $r, s \in N$ sont fixés et satisfont à la condition $r \geqq 2$, $s \geqq 1$.

La notion de s-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) jusqu'alors utilisée était dans le sens de (r, s)-l'orientation puisque dans la décomposition invariante (1.10) de l'orbite $\mathfrak{M}_S$ on n'acceptait que $r = 2$, ([7], [8], [9]).

Analogiquement aux travaux ([9], [10], [11]) la notion de r-orientation du groupe G aura un rôle fondamental à jouer.

Définition 3. Le groupe G est appelé r-orientable s'il contient le sous-groupe $H \subset G$ dont l'index est $\operatorname{ind}(H) = r$.

Nous utilisons le suivant

Lemme 1. *Pour tous les deux repères $\omega_1, \omega_2 \in M_s$ de l'ordre s de la géométrie (M, G, F) il existe en plus un element $g \in G$ qui transforme l'un des deux repères en l'autre: $\omega_2 = F_s(\omega_1, g)$, ([9], lemme 2).*

Pour démontrer que la notion de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F), n'est pas vide analysons les exemples suivants.

Exemple 1. Donnons l'exemple de la géométrie de Klein (Z, G, F) qui est $(r, 1)$-orientable.

Dans ce but nous utilisons les désignations suivantes :

Z-l'ensemble des nombres complexe (le plan complexe) ;

$P_r(1)$ — le groupe multiplicatif des racines du degré nature r de l'unité $z=1$, c'est-à-dire $P_r(1)=\left\{\omega_k\in Z: \omega_k=\exp\left(\frac{2k\pi i}{r}\right), k=0,1,\ldots,r-1\right\}$;

R_+ — le groupe multiplicatif des nombres réels positifs;

$G=R_+P_r(1)$ — le produit de complexe des groupes R_+, $P_r(1)$, c'est-à-dire

$$G=\{g\in Z:\ g=x\cdot\omega_k,\ x\in R_+,\ \omega_k\in P_r(1)\}. \tag{1.12}$$

La trois (Z, G, F), où l'opération $F: Z\times G\to Z$ est définie comme suit :

$$\forall z\in Z\forall g\in G\big(F(z,g)\overset{\text{df}}{=}g\cdot z\big) \tag{1.13}$$

constitue la géométrie de Klein, ce qui est facile à vérifier.

Vraie est l'implication suivante

$$[(Z\ni z_0\neq 0)\wedge(g\in G)\wedge(F(z_0,g)=z_0)]\Rightarrow(g=1), \tag{1.14}$$

alors tout point $z_0\neq 0$ constitue repère de la géométrie etudiée.

Selon (1.12) on peut constater que le sous-groupe (invariant) $R_+\subset G$ a l'indice $\operatorname{ind}(R_+)=r$.

En effet, introduisons les désignations suplémentaires

$$H_k=\{g\in G:\ g=x\cdot\omega_k,\ x\in R_+\},\quad k=0,1,\ldots,r-1. \tag{1.15}$$

Vérifions que les ensembles H_k, $k=0,1,\ldots,r-1$ sont les couches du sous-groupe R_+ du groupe G.

Pour $g_1,g_2\in H_k$ il existe $x,y\in R_+$ tels que $g_1=x\cdot\omega_k$, $g_2=y\cdot\omega_k$, d'où $g_1^{-1}g_2= =x^{-1}y\omega_k^{-1}\omega_k=x^{-1}y\omega_0=x^{-1}y\in R_+$, alors H_k est la couche du sous-groupe R_+. Maintenant nous procédons à la décomposition de l'orbite du repere $z_0\in Z$

$$\mathfrak{M}_{Z_0}=\{z\in Z:\ z=g\cdot z_0,\ g\in G\} \tag{1.16}$$

en sous-ensembles non-vides et disjoints :

$$\mathfrak{M}^k_{Z_0}\overset{\text{df}}{=}\{z\in\mathfrak{M}_{Z_0}:\ z=g\cdot z_0, g\in H_k\},\quad k=0,1,\ldots,r-1. \tag{1.17}$$

Il est facile à la vérifier que l'orbite $\mathfrak{M}_{Z_0}$ ainsi que ses sous-ensembles $\mathfrak{M}_{Z_0}$, $k=0,1,\ldots,r-1$ satisfont à toutes les conditions de la décomposition invariante de type (1.10). Ainsi nous avons demontré conformément à la définition 2, que la géométrie de Klein (Z, G, F) etait $(r, 1)$-orientable.

Exemple 2. Ici nous donnons un exemple général de la géométrie de Klein (M, G, F) (r, s)-orientable, $r, s\in N$.

Dans ce but nous profitons de fait de la construction donnée du travail [5] et nous nous servons de l'exemple 1.

Considérons donc la géométrie de Klein décrite dans l'exemple 1:

$$(Z, G, F_1),\quad F_1(z,g)=g\cdot z, \tag{1.18}$$

ainsi que la géométrie affine de Klein [7] :

$$(R^{s-1}, GA(s-1,R), F_2), F_2(x,(A,a))=Ax+a. \tag{1.19}$$

La géométrie (1.18) est $(r, 1)$-orientable et la géométrie (1.19) — $(2, s)$-orientable. Constituons le produit direct des géométries de Klein (1.18)—(1.19) :

$$(1.20) \qquad (Z\times R^{s-1}, G\times GA(s-1, R), F_1\times F_2),$$

où le produit des opérations $F_1\times F_2$ nous définissons comme suit

$$(1.21) \qquad F_1\times F_2((z, x), (g, (A, a))) \overset{\mathrm{df}}{=} (F_1(z, g), F_2(x, (A, a))).$$

Nous démontrons que dans $Z\times R^{s-1}$ il existe un repère de l'ordre s et aussi que le groupe $G\times GA(s-1, R)$ est r-orientable. Si sont donnés les repères z_0, $(a_1, \ldots, a_s)$ des géométries correspondantes (1.18), (1.19), alors la suivante suite des pairs $\{(z_0, a_1), (z_0, a_2), \ldots, (z_0, a_s)\}$ est repère de l'ordre s du produit direct des géométries de Klein (1.20)—(1.21). Le fait peut être vérifié directement où selonle travail ([5], lemme 2.2).

Selon l'exemple 1, le sous-groupe R_+ définit r-orientation du groupe G de type (1.12). Nous démontrons que le sous-groupe $R_+\times GA(s-1, R)$ définit r-orientation du groupe $G\times GA(s-1, R)$. En effet, selon (1.15) nous avons la décomposition du groupe G en couches disjointes H_k :

$$(1.22) \qquad G = \bigcup_{k=0}^{r-1} H_k.$$

Nous avons donc la décomposition du groupe $G\times GA(s-1, R)$ en couches disjointes :

$$(1.23) \qquad G\times GA(s-1, R) = \bigcup_{k=0}^{r-1} H_k\times GA(s-1, R),$$

alors le sous-groupe $R_+\times GA(s-1, R)$ a l'indice égal à r. Vérifions que quelconque ensemble fixé $H_k\times GA(s-1, R)$ est la couche du sous-groupe $R_+\times GA(s-1, R)$.

Pour $(x, (A, a)), (y, (B, b))\in H_k\times GA(s-1, R)$ nous avons successivement

$$\begin{aligned}(x, (A, a))^{-1}\cdot(y, (B, b)) &= (x^{-1}, (A^{-1}, -A^{-1}a))(y, (B, b)) = \\ &= (x^{-1}y, (A^{-1}B, A^{-1}(b-a)))\in R_+\times GA(s-1, R), \quad \text{C.Q.F.D}\end{aligned}$$

Par la suite nous omettons les raisonnements et les transformations détailles et nous nous appuyons sur le lemme 3 ce qui prouve indirectement que la géométrie de Klein (1.20)—(1.21) est (r, s)-orientable ; cela constitue que l'argumentation dans l'exemple 2 est générale et sensée.

2. Les théorèmes de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein

En s'appuyant sur le travail [9] et en procédant à certaines modifications nous démontrons deux lemmes et un théorème.

Lemme 2. *Si la géométrie de Klein* (M, G, F) *de type* (1.1)—(1.3) *est* (r, s)-*orientable, alors le groupe* G *est* r-*orientable.*

DÉMONSTRATION. Admettons que certaine orbite $\mathfrak{M}_S$ de l'objet (1.8) a la décomposition (1.10). Soit fixé quelconque repère $\omega_0 \in \mathfrak{M}_S^1$.

Alors nous définissons les sous-ensembles suivants $H_1, \ldots, H_r$ du groupe G:

$$H_i \overset{\mathrm{df}}{=} \{g \in G\colon \hat{F}_s(\omega_0, g) \in \mathfrak{M}_S^i\}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{2.1}$$

Démonstration de ce que H_1 est sous-groupe du groupe G est la même que la première partie de celle du lemme 3 au travail [9].

Vu que $\mathfrak{M}_S$ est orbite de l'objet (1.8), alors aucun des ensembles H_i, $i=1, \ldots, r$ n'est pas vide. Nous démontrons que les ensembles sont disjoints.

Supposons que

$$H_i \cap H_j \neq \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, r. \tag{2.2}$$

Soit $g_0 \in H_i \cap H_j$. Alors en vertu de (2.1) $\hat{F}(\omega_0, g_0) \in \mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S^j \neq \emptyset$, d'où il y a contradiction.

Maintenant nous démontrons que H_i, $i=1, \ldots, r$ sont des couches à gauche du sous-groupe H_1.

Soit $g, h \in H_i$. Alors

$$\hat{F}_s(\omega_0, g), \hat{F}_s \omega_0, h) \in \mathfrak{M}_S^i.$$

Pour g^{-1} nous avons

$$\begin{cases} \hat{F}_s(\hat{F}_s(\omega_0, g), g^{-1}) = \omega_0, \\ \hat{F}_s(\hat{F}_s(\omega_0, h), g^{-1}) = \hat{F}(\omega_0, g^{-1}h), \end{cases} \tag{2.3}$$

d'où en vertu de la décomposition (1.9), $\omega_0, \hat{F}_s(\omega_0, g^{-1} \cdot h) \in \mathfrak{M}_S^1$, alors $g^{-1}h \in H_1$, ce qui démontre que le sous-ensemble H_i est couche du sous-groupe H_1, $i=1, \ldots, r$.

De la définition (2.1) résulte que

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} H_i. \tag{2.4}$$

Ainsi le lemme **2** est entièrement démontré.

Remarque 1. Comme il se peut voir à partir de la construction (2.1) il existe r-différentes décompositions de type (2.4), alors r-différentes r-orientations du groupe G.

Lemme 3. *Si* $\operatorname{ind}(G)=r$ *et* $M_s \neq \emptyset$, *alors chaque orbite* $\mathfrak{M}_S$ *de l'objet* (1.8) *possède une décomposition invariante de type* (1.10), *alors la géométrie de Klein de type* (1.1)—(1.3) *est* (r, s)*-orientable.*

DÉMONSTRATION. Désignons par $H_1 \subset G$ le sous-groupe à $\operatorname{ind}(H_1)=r$ et ses couches à gauche- par H_i, $i=1, \ldots, r$. Alors est vraie la décomposition de type (2.4).

Soit $\mathfrak{M}_S$ orbite de l'objet (1.8). Nous choisissons un élément quelconque $\omega_0 \in \mathfrak{M}_S$.

Définissons les sous-ensembles suivants $\mathfrak{M}_S^i$, $i=1, \ldots, r$ de l'orbite $\mathfrak{M}_S$:

$$\mathfrak{M}_S^i \overset{\mathrm{df}}{=} \{\omega \in \mathfrak{M}_S\colon \exists g \in H_i, \omega = \hat{F}_s(\omega_0, g)\}. \tag{2.5}$$

Vérifions que les ensembles $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_S^i$, $i=1, \dots, r$ satisfont à toutes les conditions de la décomposition invariante (1.10).

De (2.5) il en résulte immédiatement que $\mathfrak{M}_S^i \neq \emptyset$, $i=1, \dots, r$ et que $\mathfrak{M}_S = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_S^i$.

D'abord nous démontrons que

$$\mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S^j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, r. \tag{2.6}$$

Supposons que $\tilde{\omega} \in \mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S^j \neq \emptyset$. De (2.5) il en résulte l'existence de $g_i \in H_i$, $g_j \in H_j$ tels que $\tilde{\omega} = \hat{F}_s(\omega_0, g_i) = \hat{F}_s(\omega_0, g_j)$, d'où en vertu du lemme 1 nous avons $g_i = g_j$, donc il y a contradiction.

Maintenant nous allons démontrer que la condition de la décomposition invariante (1.10) est satifaite.

Soit $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}_S^i$, $g \in G$. De la définition (2.5) il en résulte l'existence de $g_i, \tilde{g}_i \in H_i$ tels que $\omega_1 = \hat{F}_s(\omega_0, g_i)$, $\omega_2 = \hat{F}_s(\omega_0, \tilde{g}_i)$.

Vu ce qui précède nous avons:

$$\begin{cases} \hat{F}_s(\omega_1, g) = \hat{F}_s\big(\hat{F}_s(\omega_0, g_i), g\big) = \hat{F}_s(\omega_0, gg_i), \\ \hat{F}_s(\omega_2, g) = \hat{F}_s\big(\hat{F}_s(\omega_0, \tilde{g}_i), g\big) = \hat{F}_s(\omega_0, g\tilde{g}_i). \end{cases} \tag{2.7}$$

Vu que $(gg_i)^{-1} \cdot (g\tilde{g}_i) = g_i^{-1} \cdot \tilde{g}_i \in H_1$, donc gg_i et $g\tilde{g}_i$ appartiennent à la même couche et alors selon (2.5) nous voyons que $\hat{F}_s(\omega_1, g)$ et $\hat{F}_s(\omega_2, g)$ appartiennent au même ensemble fixé $\mathfrak{M}_S^j$, $1 \leqq j \leqq r$.

Ainsi le lemme 3 est entièrement démontré. Des lemmes 2 et 3, il en résulte le

Théorème 1. *Si la géométrie de Klein* (M, G, F) *est* (r, s)*-orientable par rapport à une certaine orbite de l'objet* (1.8) *alors elle est aussi* (r, s)*-orientable par rapport à chaque orbite de l'objet.*

3. La forme équivalente de la définition de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein

Notion (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) a été introduite à partir de s-orientation selon la définition de M. Kucharzewski ([8], (9)). A partir de s-orientation selon la définition de Z. Moszner [10] on peut aussi introduire la notion (r, s)-orientation de la géométrie de Klein. Les deux notions ainsi introduites de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) sont tout de même équivalentes ce qui fait le sujet de ce point-ci du travail.

Z. Moszner, dans le travail [10], introduit la définition s-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) comme suit:

Définition 3. La géométrie de Klein (M, G, F) de type (1.1)—(1.3) est appelée s-orientable s'il existe suivante décomposition invariante de la fibre $M_s \neq \emptyset$ de l'objet abstrait (M_s, G, F_s) de type (1.8):

$$(3.1)\qquad \begin{cases} a)\ M_s = M_s^1 \cup M_s^2; \\ b)\ M_s^1 \cap M_s^2 = \emptyset, M_s^1, M_s^2 \neq \emptyset; \\ c)\ \forall i \in (1, 2) \forall \omega_1, \omega_2 \in M_s^i \forall g \in G \\ \quad \exists j \in (1, 2) \Rightarrow F_s(\omega_1, g), F_s(\omega_2, g) \in M_s^j; \\ d)\ \exists \omega_0 \in M_s^1 \exists g_0 \in G \Rightarrow F_s(\omega_0, g_0) \in M_s^2. \end{cases}$$

Vu les définitions 2 et 3 il en résulte d'une façon naturelle la suivante

Définition 4. La géométrie de Klein (M, G, F) est appelée (r, s)-orientable si la fibre M_s de l'objet abstrait (M_s, G, F_s) possède la décomposition invariante suivante:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} a)\ M_s = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_S^i; \\ b)\ \forall i \neq j, \quad i, j \in (1, \ldots, r) (\mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S^j = \emptyset;\ \mathfrak{M}_S^i \neq \emptyset); \\ c)\ \forall i \in (1, \ldots, r) \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}_S^i \forall g \in G \exists j \in (1, \ldots, r) \\ \quad \Rightarrow F_s(\omega_1, g), F_s(\omega_2, g) \in \mathfrak{M}_S^j; \\ \text{doit être: } d)\ \exists \omega_0 \in \mathfrak{M}_S^1 \exists g_2, \ldots, g_n \in G \Rightarrow F_s(\omega_0, g_l) \in \mathfrak{M}_S^l, \\ \quad 1 = 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Démontrons le suivant

Théorème 2. *Définitions 2 et 4 de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. Si la géométrie (M, G, F) est (r, s)-orientable au sens de la définition 2, alors il existe une décomposition invariante de type (1.10) d'une certaine orbite fixée $\mathfrak{M}_S \subset M_s$. À partir du lemme 2 le groupe G est r-orientable et en vertu du lemme 3 chaque orbite $\mathfrak{M}_{S\varkappa}$, $\varkappa \in I$ de la fibre M_s de l'objet (M_s, G, F_s) possède la décomposition invariante du type (1.10).

Soit

$$(3.3)\qquad M_s^i \stackrel{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{\varkappa \in I} \mathfrak{M}_{S\varkappa}^i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Il est facile à vérifier que les ensembles M_s^i, $i = 1, \ldots, r$ de type (3.3) satisfont à toutes les conditions de la décomposition invariante (3.2) de la fibre M_s.

Bornons-nous à démontrer la condition d).

Soit $\omega_0 \in M_1^s$. D'où il en résulte que $\omega_0 \in \mathfrak{M}_{S\varkappa_0}^1 \subset \mathfrak{M}_{S\varkappa_0}$ pour un fixé $\varkappa_0 \in I$ Mais $\mathfrak{M}_{S\varkappa_0}$ est l'orbite de la fibre M_s, donc il existe un élément $g_{12} \in G$ qui transforme sur lui avec la fonction F_s deux éléments fixés quelconques

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}_{S\varkappa_0}:\ \omega_2 = F_s(\omega_1, g_{12}).$$

Pour chaque $l = 2, \ldots, r$ il existe donc élément $g_1 \in G$ tel que $F_s(\omega_0, g_1) \in \mathfrak{M}_{S\varkappa_0}$, alors $F_s(\omega_0, g_1) \in M_s^1$, $l = 2, \ldots, r$, ce qui démontre la condition d).

A l'inverse soit la géométrie de Klein (M, G, F), (r, s)-orientable dans le sens de la définition 4. Il existe donc la décomposition invariante de type (3.2) de la fibre M_s.

Désignant par $\mathfrak{M}_S$ l'orbite de l'objet (M_s, G, F_s) à laquelle appartient repère $\omega_0 \in \mathfrak{M}_S^1$, remplissant la condition d) de la décomposition invariante (3.2), nous définissons les suivants sous-ensemble de l'orbite $\mathfrak{M}_S$:

$$\overline{\mathfrak{M}}_S^i \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.4}$$

Vu qu'à l'orbite $\mathfrak{M}_S$ avec l'élément ω_0 appartient aussi chaques elements $F_s(\omega_0, g)$ pour $\forall g \in G$, donc il en résulte que les ensembles $\mathfrak{M}_S$, $\overline{\mathfrak{M}}_S^i$, $i=1, \ldots, r$ de type (3.4) remplissent deux conditions de la décomposition invariante (1.10). Nous démontrons en détail seulement la décomposition invariante (1.10). Conformement à la première condition deja vérifiée de la décomposition (1.10) nous avons

$$\mathfrak{M}_S = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{\mathfrak{M}}_S^i. \tag{3.5}$$

Soit $\omega_1, \omega_2 \in \overline{\mathfrak{M}}_S^i$, $g \in G$.

De (3.4) il résulte que $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}_S^i \cap \mathfrak{M}_S$, d'où en vertu de la condition invariant (3.2) c) $\exists j \in (1, \ldots, r)$ tels que $F_s(\omega_1, g), F_s(\omega_2, g) \in \mathfrak{M}_S^j$, donc $\hat{F}_s(\omega_1, g), \hat{F}_s(\omega_2, g) \in \overline{\mathfrak{M}}_S^j$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 2. Les généralisations ultérieures de la notion de (r, s)-orientation de la géométrie de Klein (M, G, F) feront partie d'un autre travail.

References

[1] L. Bieszk, W. Gordzijewski, Sur certaine géométrie transitive de Kleine sur le semi-direct produit des groups, str. **12** (1982), *(in print)*.

[2] W. M. Grzegorczyk, P. Kucharczyk, Klein geometry: equivalence relation and quotient geometries, *Dem. Mathem.* **13** *Warszawa* (1980), 469—482.

[3] E. J. Jasińska, M. Kucharzewski, Kleinische Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte, *Coll. Mathem. XXVI, Wrocław* (1972), S. 271—279.

[4] E. J. Jasińska, M. Kucharzewski, Grundlegende Begriffe der Kleinschen Geometrie, *Dem. Mathem. VII*, Warszawa (1974), S. 381—402.

[5] E. Kapustka, Remarques au sujet de l'orientation des géométries productives de Klein, *Dem. Mathem. XIII, Warszawa* (1980), 531—538.

[6] M. I. Kargapołów, J. I. Mierzlaków, Podstawy teorii group, *PWN Warszawa* (1976).

[7] M. Kucharzewski, Über die Orientierung der Kleinischen Geometrie, *Ann. Polon. Math.* **29**, *Warszawa* (1975), 364—371.

[8] M. Kucharzewski, Orientability of *n*-dimensional projective geometry, *Dem. Mathem. XI, Warszawa* (1978), 983—995.

[9] M. Kucharzewski, Uwagi do pojęcia orientowalności geometrii Kleina, *Zeszyty Nauk. Politechniki Śląskiej, Z. 30, 560, Gliwice* (1980), *str.* 165—172.

[10] Z. Moszner, L'orientation dans la géométrie de Klein, *Tensor, N.S.* **30** (1976), 293—296.

[11] Z. Moszner, J. Tabor, Sur la notion du biscalaire, *Ann. Polon. Mathem.* **19** *Warszawa* (1967), 323—330.

(Reçu la 1. novembre, 1985)