

Über isomorphe Paare endlicher abelscher Gruppen*

EDIT SZABÓ (Debrecen)

In der Gruppentheorie ist es oft wichtig zu wissen, wie eine Untergruppe in der Gruppe liegt. Auf welcher Art können wir solche Invarianten finden, die die Gruppe und ihre Untergruppe zusammen charakterisieren? Schon mehrere Autoren haben Forschungen auf diesem Gebiet fortgesetzt. Z. P. ZILINSKAYA beschäftigte sich mit diesem Thema in Moduln über bestimmten Ringen. ([1], [2].) K. BÚZÁSI untersuchte das Problem in endlichen und unendlichen abelschen Gruppen, falls die betrachtete Untergruppe zyklisch ist. ([3], [4].)

T. Z. MOLLOW erweiterte die Frage auf Gruppenringe und Gruppenalgebren. ([5], [6].)

Unter einem Gruppenpaar (G, H) versteht man eine Gruppe G , mit ihrer Untergruppe H . In dieser Arbeit untersuchen wir den Fall, daß G eine endliche abelsche Gruppe und H eine (nicht unbedingt zyklische) Untergruppe ist.

1. Definition. Es seien G_i ($i=1, 2$) abelsche Gruppen und H_i ($i=1, 2$) Untergruppen von G . Das Paar (G_1, H_1) heißt isomorph mit (G_2, H_2) , wenn ein Isomorphismus $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ existiert, wobei $\varphi(H_1) = H_2$ gilt.

Wir untersuchen die Frage, mit welchen Invarianten die Gruppenpaare (G, H) bis auf Isomorphismus eindeutig charakterisiert werden können. Das Problem kann man auch so sehen, daß eine festgesetzte endliche abelsche Gruppe G und zwei beliebige Untergruppen $H_1, H_2 \subseteq G$ betrachtet werden. Wenn ein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(H_1) = H_2$ existiert, dann sind die folgenden Bedingungen offenbar notwendig

$$(a) \quad H_1 \cong H_2,$$

$$(b) \quad G/H_1 \cong G/H_2.$$

Es wurde von K. BÚZÁSI [3] bewiesen, daß wenn G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ zyklische Untergruppe ist, so sind die Bedingungen (a) und (b) hinreichend.

1. Satz. (BÚZÁSI [3].) *Ist G eine endliche abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine zyklische Untergruppe, so ist das Paar (G, H) durch die Invarianten von G und von Faktorgruppe G/H bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Im folgenden zeigen wir mit Hilfe eines Beispiels, daß wenn die Untergruppe einer endlichen abelschen Gruppe nicht zyklisch ist, die Bedingungen (a) und (b) nicht hinreichend sind.

* Die Forschung ist von der ungarischen National Stiftung № 1813 unterschützt.

2. Satz. *Es existiert eine endliche abelsche Gruppe G und es gibt nicht-zyklische Untergruppen H_1, H_2 von G , die die Bedingungen*

$$(a) \quad H_1 \cong H_2$$

und

$$(b) \quad G/H_1 \cong G/H_2$$

erfüllen, und $(G, H_1), (G, H_2)$ keine isomorphen Paaren sind.

Beweis. Es sei

$$G = (a_1) \times (a_2) \times (a_3) \quad a_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i = 1 \dots 3, p \text{ Primzahl}$$

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 7, \quad \alpha_3 = 9.$$

Es seien

$$H_1 = (a_1^{p^2}) \times (a_2^{p^6}) \times (a_3^{p^4})$$

$$H_2 = (a_1^{p^4}) \times (a_2^{p^2}) \times (a_3^{p^6}).$$

Dann gelten

$$H_1 = C(p^3) \times C(p) \times C(p^5), \quad H_2 = C(p) \times C(p^5) \times C(p^3)$$

$$G/H_1 = C(p^2) \times C(p^6) \times C(p^4), \quad G/H_2 = C(p^4) \times C(p^2) \times C(p^6).$$

Also $H_1 \cong H_2$ und $G/H_1 \cong G/H_2$.

Nehmen wir an, daß ein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ existiert, wobei $\varphi(H_1) = H_2$ gilt. Dann ist $a_3^{p^4} \in H_1$ und $\varphi(a_3^{p^4}) \in H_2$. Also existieren natürliche Zahlen $k_1, k_2, k_3 > 0$, mit

$$\varphi(a_3^{p^4}) = a_1^{k_1 p^4} \cdot a_2^{k_2 p^2} \cdot a_3^{k_3 p^6}.$$

Sei

$$\varphi(a_3) = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot a_3^{x_3} \quad (x_1, x_2, x_3 \text{ natürliche Zahlen})$$

Es ist $\text{ord } \varphi(a_3) = \text{ord } a_3 = p^9$ und $\text{ord } a_1 < \text{ord } a_2 < p^9$ also gilt für $x_3, (x_3, p) = 1$.

So besteht

$$\varphi(a_3^{p^4}) = a_1^{x_1 p^4} \cdot a_2^{x_2 p^4} \cdot a_3^{x_3 p^4}.$$

Die direkten Faktoren $\varphi(a_3^{p^4})$ sind eindeutig bestimmt, deshalb gilt:

$$x_3 \cdot p^4 \equiv k_3 p^6 \pmod{p^9}$$

daher

$$p^9 | p^4(x_3 - k_3 p^2),$$

daraus folgt

$$p | x_3$$

und das ist ein Widerspruch zur Bedingung $(x_3, p) = 1$. Kein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ existiert also mit $\varphi(H_1) = H_2$.

Eine weitere Frage: Bei welchen speziellen Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe sind die Bedingungen (a) und (b) hinreichend damit das Paar (G_1, H_1) mit (G_2, H_2) isomorph ist. Wir untersuchen die Frage für den Fall, daß G eine endliche abelsche p -Gruppe ist. Danach kann man diese Ergebnisse einfach auf beliebige endliche abelsche Gruppe erweitern.

2. *Definition.* Wir nennen eine endliche abelsche p -Gruppe homogen, wenn ihre Invarianten gleiche Potenzen von p sind.

3. *Satz.* Ist G eine endliche abelsche p -Gruppe, H_1 und H_2 homogene Untergruppen in G , die durch Potenzen der Basiselemente von G generiert werden, und es gilt,

$$H_1 \cong H_2, \quad G/H_1 \cong G/H_2.$$

So existiert ein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$, wobei gilt $\varphi(H_1) = H_2$. (D. h. die Paare (G, H_1) und (G, H_2) sind isomorph.)

BEWEIS. Es sei

$$G = (a_1) \times (a_2) \dots (a_n), \quad a_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

(1) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$.

Seien

$$H_1 = (a_{i_1}^{p^{\beta_1}}) \times (a_{i_2}^{p^{\beta_2}}) \times \dots \times (a_{i_s}^{p^{\beta_s}}), \quad s \leq n$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n, \quad 0 < \beta_l < \alpha_{i_l}, \quad l = 1, \dots, s$$

$$H_2 = (a_{j_1}^{p^{\bar{\beta}_1}}) \times (a_{j_2}^{p^{\bar{\beta}_2}}) \times \dots \times (a_{j_s}^{p^{\bar{\beta}_s}})$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq n, \quad 0 < \bar{\beta}_l < \alpha_{j_l}, \quad l = 1, \dots, s.$$

Weil H_1 und H_2 homogene und mit einander isomorphe Untergruppen sind, folgt, daß

(2) $\alpha_{i_1} - \beta_1 = \alpha_{i_2} - \beta_2 = \dots = \alpha_{i_s} - \beta_s = d$

(3) $\alpha_{j_1} - \bar{\beta}_1 = \alpha_{j_2} - \bar{\beta}_2 = \dots = \alpha_{j_s} - \bar{\beta}_s = d.$

Aus (1), (2) und (3) folgen die Ungleichungen (4) und (5).

(4) $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_s$

(5) $\bar{\beta}_1 \leq \bar{\beta}_2 \leq \dots \leq \bar{\beta}_s.$

Die Invarianten von G/H_1 sind:

$$p^{\alpha_1}, p^{\beta_2}, \dots, p^{\beta_s}, p^{\alpha_r}, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_s\}.$$

Die Invarianten von G/H_2 sind:

$$p^{\bar{\beta}_1}, p^{\bar{\beta}_2}, \dots, p^{\bar{\beta}_s}, p^{\alpha_r}, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_s\}.$$

Wir nehmen an, daß $G/H_1 \cong G/H_2$, somit haben G/H_1 und G/H_2 gleiche Invarianten $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_n}$. Aus diesen Invarianten $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_n}$ wählen wir das minimale Element δ_1 , welches

— entweder als Invariante von G nicht auftritt,

— oder in der Reihe $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_n}$ öfter auftritt als in der Reihe $p^{\beta_1}, \dots, p^{\beta_s}$.

Wegen (4) und (5) gilt $\delta_1 = p^{\beta_1} = p^{\bar{\beta}_1}$. Damit folgt aus (2) und (3): $\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1}$. Es sei $2 \leq k \leq s$ ein Index mit:

(6) $\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}} = \alpha_{j_{k-1}}$ aber $\alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k}$.

Nehmen wir an, daß $\alpha_{i_k} < \alpha_{j_k}$.

In diesem Fall ist:

$$(7) \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1, \dots, \beta_{k-1} = \bar{\beta}_{k-1}, \quad \text{und} \quad \beta_k < \bar{\beta}_k.$$

Wir können die Invarianten $G/H_1, p^{x_1}, \dots, p^{x_n}$ in zwei Mengen $L_1 \cup M_1$ zerlegen:

$$L_1 = \{p^{\beta_1}, \dots, p^{\beta_{k-1}}, p^{\alpha_r} \text{ mit } r \in \{1, 2, \dots, i_k - 1\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}\}$$

$$M_1 = \{p^{\beta_k}, \dots, p^{\beta_s}, p^{\alpha_r} \text{ mit } r \in \{i_k, \dots, n\} \setminus \{i_k, \dots, i_s\}\}.$$

Wir können auch die Invarianten $G/H_2, p^{x_1}, \dots, p^{x_n}$ in zwei Mengen $L_2 \cup M_2$ zerlegen:

$$L_2 = \{p^{\bar{\beta}_1}, \dots, p^{\bar{\beta}_{k-1}}, p^{\alpha_r} \text{ mit } r \in \{1, 2, \dots, i_k - 1\} \setminus \{j_1, \dots, j_{k-1}\}\}$$

$$M_2 = \{p^{\bar{\beta}_k}, \dots, p^{\bar{\beta}_s}, p^{\alpha_r} \text{ mit } r \in \{i_k, \dots, n\} \setminus \{j_k, j_{k+1}, \dots, j_s\}\}$$

Da (6) und (7) die Mengen L_1 und L_2 dieselben Elemente enthalten, müssen auch die Mengen M_1 und M_2 die gleichen Elemente enthalten.

$$p^{\beta_k} = p^{\alpha_{i_k} - d} \in M_1$$

In der Menge M_2 ist jedes Element größer als p^{β_k} , weil

$$\bar{\beta}_l > \beta_k \quad l = k, \dots, s \quad \text{und} \quad \alpha_r \cong \alpha_{i_k} > \alpha_{i_k} - d$$

für jedes $r \in \{i_k, \dots, n\} \setminus \{j_k, \dots, j_s\}$.

Damit ist $p^{\beta_k} \notin M_2$ und es ist ein Widerspruch zu der Bedingung $M_1 = M_2$.

Es existiert also kein solcher Index k , $2 \leq k \leq s$, wobei $\alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k}$.

Daraus folgt:

$$(8) \quad \alpha_{i_1} = \alpha_{j_1}, \alpha_{i_2} = \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{i_s} = \alpha_{j_s}$$

und

$$(9) \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1, \beta_2 = \bar{\beta}_2, \dots, \beta_s = \bar{\beta}_s.$$

Betrachten wir den folgenden Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G$.

$$\varphi(a_{i_1}) = a_{j_1}, \quad \varphi(a_{i_2}) = a_{j_2}, \dots, \varphi(a_{i_s}) = a_{j_s}$$

$$\varphi(a_{j_1}) = a_{i_1}, \quad \varphi(a_{j_2}) = a_{i_2}, \dots, \varphi(a_{j_s}) = a_{i_s}$$

$$\varphi(a_i) = a_i, \quad \text{wenn } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s\}.$$

Wegen (8) ist dieser Homomorphismus ein Automorphismus von G , und wegen (8) und (9) erfüllt dieser Automorphismus die Bedingung $\varphi(H_1) = H_2$.

Damit wurde der Satz bewiesen.

Ferner kann man der Frage nachgehen, in Satz 2 unbedingt zu fordern ist, daß H_1 und H_2 homogene Untergruppen sind. Aus den Sätzen 4 und 5 können wir sehen, daß neben anderen speziellen Forderungen, auch diese Bedingung verlassen werden kann. Aber im allgemeinen, wenn die Untergruppen durch Potenzen Basis-elemente von G generiert werden und keine homogenen Untergruppen sind, kann man in der Gruppe G zwei Untergruppen H_1 und H_2 so konstruieren, daß die

Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind, aber kein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ mit $\varphi(H_1) = H_2$ existiert.

4. Satz. Sei G eine endliche abelsche p -Gruppe. Seien H_1 und H_2 solche Untergruppen von G , die durch gleiche Potenzen der bestimmten Basiselemente von G generiert werden. Ferner nehmen wir an, daß $H_1 \cong H_2$ und $G/H_1 \cong G/H_2$ gelten. Dann existiert ein solcher Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ bei welchem $\varphi(H_1) = H_2$ gilt.

(D. h. die Paare (G, H_1) und (G, H_2) sind isomorph.)

BEWEIS. Seien

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_n), a_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\alpha_1 \cong \alpha_2 \cong \dots \cong \alpha_n,$$

$$H_1 = (a_{i_1}^{p^\beta}) \times (a_{i_2}^{p^\beta}) \times \dots \times (a_{i_s}^{p^\beta}), \quad s \cong n$$

$$1 \cong i_1 < i_2 < \dots < i_s \cong n, \quad 0 < \beta < \alpha_{i_l}, \quad l = 1, \dots, s$$

$$H_2 = (a_{j_1}^{p^{\beta'}}) \times (a_{j_2}^{p^{\beta'}}) \times \dots \times (a_{j_s}^{p^{\beta'}})$$

$$1 \cong j_1 < j_2 < \dots < j_s \cong n, \quad 0 < \beta' < \alpha_{j_l}, \quad l = 1, \dots, s.$$

Dann sind die Invarianten von G/H_1 :

$$p^\beta, \dots, p^\beta (s\text{-mal}), p^{\alpha_r}, r \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_s\}.$$

Die Invarianten von G/H_2 sind:

$$p^{\beta'}, \dots, p^{\beta'} (s\text{-mal}), p^{\alpha_r}, r \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_s\}.$$

Da G/H_1 und G/H_2 zueinander isomorph sind, haben sie die gleichen Invarianten $p^{x_1}, p^{x_2}, \dots, p^{x_n}$. Aus der Reihe p^{x_1}, \dots, p^{x_n} wählen wir das Element p^{x_i} aus, das

— entweder nicht als Invariante von G auftritt

— oder in der Reihe $p^{x_1}, p^{x_2}, \dots, p^{x_n}$ mit größerer Multiplizität, als in der Reihe $p^{x_1}, p^{x_2}, \dots, p^{x_n}$ auftritt.

Offenbar ist $p^{x_i} = p^\beta = p^{\beta'}$, daher

$$(10) \quad \beta = \beta'.$$

Dann wählen wir aus der Reihe $p^{x_1}, p^{x_2}, \dots, p^{x_n}$ das minimale Element δ_1 aus, das

— entweder in der Reihe p^{x_1}, \dots, p^{x_n} nicht auftritt,

— oder mit größerer Multiplizität in der Reihe p^{x_1}, \dots, p^{x_n} , als in der Reihe $p^{x_1}, p^{x_2}, \dots, p^{x_n}$ auftritt.

Offenbar gilt dann: $\delta_1 = p^{\alpha_{i_1}} = p^{\alpha_{j_1}}$.

Nehmen wir an, es existiert ein solcher Index $2 \cong k \cong s$ mit

$$(11) \quad \alpha_{i_1} = \alpha_{j_1}, \alpha_{i_2} = \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{i_{k-1}} = \alpha_{j_{k-1}} \quad \text{aber} \quad \alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k}.$$

Nehmen wir weiterhin an, daß $\alpha_{i_k} < \alpha_{j_k}$. Dann können wir die Invarianten von G/H_1 in zwei Mengen $L_1 \cup M_1$ zerlegen, wobei

$$L_1 = \{p^{\beta_k}, \dots, p^{\beta_k}, (k-1)\text{-mal}, p^{\alpha_r}, r \in \{1, 2, \dots, i_k-1\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}\}$$

$$M_1 = \{p^{\beta_k}, \dots, p^{\beta_k}, (s-k+1)\text{-mal}, p^{\alpha_r}, r \in \{i_k, \dots, n\} \setminus \{i_k, i_{k+1}, \dots, i_s\}\}.$$

Die Invarianten von G/H_2 können wir ebenfalls in zwei Mengen $L_2 \cup M_2$ zerlegen, wobei

$$L_2 = \{p^{\beta}, \dots, p^{\beta}, (k-1)\text{-mal}, p^{\alpha_r}, r \in \{1, 2, \dots, i_k - 1\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}\}\}$$

$$M_2 = \{p^{\beta}, \dots, p^{\beta}, (s-k+1)\text{-mal}, p^{\alpha_r}, r \in \{i_k, \dots, n\} \setminus \{j_k, j_{k+1}, \dots, j_s\}\}$$

Wegen (10) und (11) enthalten die Mengen L_1 und L_2 dieselben Elemente, so müssen auch die Mengen M_1 und M_2 gleiche Elemente enthalten. Aber die Multiplizität des Element $p^{\alpha_{i_k}}$ in der Menge M_1 ist mindestens um eins kleiner als in der Menge M_2 . Das ist ein Widerspruch zu $M_1 = M_2$. Also existiert kein Index $2 \leq k \leq n$, mit $\alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k}$. Somit ist

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1}, \alpha_{i_2} = \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{i_s} = \alpha_{j_s}.$$

Betrachten wir den Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ mit

$$\varphi(a_{i_1}) = a_{j_1}, \varphi(a_{i_2}) = a_{j_2}, \dots, \varphi(a_{i_s}) = a_{j_s}$$

$$\varphi(a_{j_1}) = a_{i_1}, \varphi(a_{j_2}) = a_{i_2}, \dots, \varphi(a_{j_s}) = a_{i_s}$$

$$\varphi(a_i) = a_i \quad \text{wenn} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s\}.$$

Offenbar ist φ ein Automorphismus von G und $\varphi(H_1) = H_2$.

5. Satz. *Es sei G eine endliche abelsche homogene p -Gruppe. Es seien H_1 und H_2 die Untergruppen von G , die durch Potenzen der Basiselemente von G generiert werden und $H_1 \cong H_2$, $G/H_1 \cong G/H_2$ gelten. Dann existiert ein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$, mit $\varphi(H_1) = H_2$.*

BEWEIS. Sei

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_n), \quad a_i^{p^\alpha} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$H_1 = (a_{i_1}^{p^{\beta_1}}) \times (a_{i_2}^{p^{\beta_2}}) \times \dots \times (a_{i_s}^{p^{\beta_s}}), \quad s \leq n$$

$$1 \leq i_1 < i_2, \dots, < i_s \leq n, \quad 0 < \beta_l < \alpha, \quad l = 1, \dots, s$$

$$H_2 = (a_{j_1}^{p^{\bar{\beta}_1}}) \times (a_{j_2}^{p^{\bar{\beta}_2}}) \times \dots \times (a_{j_s}^{p^{\bar{\beta}_s}})$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s, \quad 0 < \bar{\beta}_l < \alpha, \quad l = 1, \dots, s.$$

Die Invarianten von G/H_1 sind:

$$p^{\beta_1}, p^{\beta_2}, \dots, p^{\beta_s}; \quad p^\alpha, \dots, p^\alpha \quad (n-s)\text{-mal.}$$

Die Invarianten von G/H_2 sind:

$$p^{\bar{\beta}_1}, p^{\bar{\beta}_2}, \dots, p^{\bar{\beta}_s}, \quad p^\alpha, \dots, p^\alpha \quad (n-s)\text{-mal.}$$

Weil $G/H_1 \cong G/H_2$, so gilt $\{\beta_1, \dots, \beta_s\} = \{\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_s\}$. Also existiert eine Permutation $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$ der Elemente $1, 2, \dots, s$ wobei

$$\beta_1 = \bar{\beta}_{\varrho_1}, \beta_2 = \bar{\beta}_{\varrho_2}, \dots, \beta_s = \bar{\beta}_{\varrho_s}.$$

Dann betrachten wir den Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G$,

$$\varphi(a_{i_1}) = a_{j_{q_1}}, \dots, \varphi(a_{i_s}) = a_{j_{q_s}}$$

$$\varphi(a_{j_{q_1}}) = a_{i_1}, \dots, \varphi(a_{j_{q_s}}) = a_{i_s}$$

$$\varphi(a_i) = a_i \quad \text{falls } i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s\}.$$

Offenbar ist φ ein Automorphismus und $\varphi(H_1) = H_2$.

6. Satz. Sei G eine endliche abelsche p -Gruppe.

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_n), \quad a_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n, \quad n \geq 3$$

Nehmen wir an, daß drei Indizes $1 \leq k < l < m \leq n$ existieren und es gelten:

$$(13) \quad 0 < \alpha_k < \alpha_l < \alpha_m,$$

$$(14) \quad \alpha_m \leq \alpha_k + \alpha_l - 2.$$

Dann kann man zwei nicht-homogene Untergruppen H_1 und H_2 in G angeben, die durch Potenzen bestimmter Basiselemente von G generiert werden und ferner $H_1 \cong H_2$, $G/H_1 \cong G/H_2$ gilt, aber (G, H_1) und (G, H_2) keine isomorphen Paare sind.

BEWEIS. Betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem.

$$(15) \quad \begin{aligned} \alpha_k - \beta_k &= \alpha_m - \beta_l \\ \alpha_l - \beta_l &= \alpha_k - \beta_m \\ \alpha_m - \beta_m &= \alpha_l - \beta_k \end{aligned}$$

wobei $\beta_k, \beta_l, \beta_m$ die Unbekannten sind.

Das sind zwei unabhängige Gleichungen. Wählen wir β_m als freie Unbekannte. Wegen (13) und (14) können wir β_m so wählen, daß die folgenden Ungleichungen bestehen:

$$(16) \quad \alpha_m - \alpha_l < \beta_m < \alpha_k.$$

Dann ist

$$\beta_l = \alpha_l - \alpha_k + \beta_m$$

So gilt

$$(17) \quad 0 < \beta_m < \beta_l < \alpha_l.$$

Dann ist

$$\beta_k = \alpha_l - \alpha_m + \beta_m$$

Wegen (16) gilt:

$$0 < \beta_k < \alpha_k.$$

Es seien H_1 und H_2 die folgende Untergruppen in G .

$$H_1 = (a_k^{p^{\beta_k}}) \times (a_l^{p^{\beta_l}}) \times (a_m^{p^{\beta_m}})$$

$$H_2 = (a_k^{p^{\beta_m}}) \times (a_l^{p^{\beta_k}}) \times (a_m^{p^{\beta_l}})$$

So sind die Invarianten von G/H_1 und G/H_2 :

$$p^{\beta_k}, p^{\beta_l}, p^{\beta_m} \quad \text{und} \quad p^{\alpha_i} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k, l, m\}.$$

Also sind G/H_1 und G/H_2 isomorph zueinander.

Die Invarianten von H_1 sind:

$$p^{\alpha_k - \beta_k}, p^{\alpha_l - \beta_l}, p^{\alpha_m - \beta_m}.$$

Die Invarianten von H_2 sind:

$$p^{\alpha_k - \beta_m}, p^{\alpha_l - \beta_k}, p^{\alpha_m - \beta_l}.$$

Da das Gleichungssystem (15) besteht, sind H_1 und H_2 zueinander isomorph.

Nehmen wir an, daß ein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ existiert, wobei $\varphi(H_1) = H_2$. Dann ist $a_m^{p^{\beta_m}} \in H_1$ und $\varphi(a_m^{p^{\beta_m}}) \in H_2$. Also existieren r_1, r_2, r_3 natürliche Zahlen, mit

$$\varphi(a_m^{p^{\beta_m}}) = a_k^{r_1 p^{\beta_m}} \cdot a_l^{r_2 p^{\beta_k}} \cdot a_m^{r_3 p^{\beta_l}}.$$

Sei

$$\varphi(a_m) = a_1^{x_1} \dots a_k^{x_k} \dots a_l^{x_l} \dots a_m^{x_m} \dots a_n^{x_n}.$$

Die Ordnung des Elementes $\varphi(a_m)$ ist p^{α_m} und so wegen (13), für x_m , $(x_m, p) = 1$ gilt. So ist:

$$\varphi(a_m^{p^{\beta_m}}) = a_1^{x_1 p^{\beta_m}} \dots a_k^{x_k p^{\beta_m}} \dots a_l^{x_l p^{\beta_m}} \dots a_m^{x_m p^{\beta_m}} \dots a_n^{x_n p^{\beta_m}}.$$

Die direkten Faktoren des Elementes sind eindeutig bestimmt, deshalb gilt:

$$r_3 p^{\beta_l} \equiv x_m p^{\beta_m}, \quad (\text{mod } p^{\alpha_m})$$

daher

$$p^{\alpha_m} | x_m p^{\beta_m} - r_3 p^{\beta_l}.$$

Weil $\beta_l > \beta_m$ ist, somit

$$p^{\alpha_m} | p^{\beta_m} (x_m - r_3 p^{\beta_l - \beta_m})$$

und daraus folgen

$$p | x_m - r_3 p^{\beta_l - \beta_m}, \quad p | x_m.$$

Das ist ein Widerspruch zur Bedingung $(x_m, p) = 1$. Also existiert kein Automorphismus $\varphi: G \rightarrow G$ mit $\varphi(H_1) = H_2$, so (G, H_1) und (G, H_2) sind keine isomorphen Paare.

Literaturverzeichnis

- [1] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О вложении подмодулей в конечнопорождённый модуль над кольцом главных идеалов, *Резюме сообщений и докладов, Кишинёв*, 1971, 117—118.
- [2] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечнопорождённой абелевой группы и её подгруппы. *Докл. А. Н. СССР*, **210** 1973. 1004—1007.
- [3] К. Бузаши, Об инвариантах пар конечных абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1981), 317—326.
- [4] К. Бузаши, Об изоморфизме пар бесконечных абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 140—154.
- [5] Т. Ж. Моллов, Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* Unter Erscheinung.
- [6] Т. Ж. Моллов, Инварианты пар полупростых алгебр конечных абелевых p -групп. *Publ. Math. (Debrecen)* Unter Erscheinung.

(Eingegangen am 24. November, 1985)