О полугрупповом условии Л. Фукса относительно линейной упорядочиваемости группы

С. Тодоринов, Н. Петрова (Пловдив)

В (1) Л. Фукс дает необходимое и достаточное условие продолжения частичного порядка P группы G до линейного порядка.

Частичный порядок P группы G тогда и только тогда может быть продолжен до линейного, когда для произвольного множества $a_1, \ldots, a_n$ неединичных элементов G можно так подобрать числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, что

$$P \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}) = \emptyset.$$

Через S обозначена инвариантная подполугруппа, порожденная персчисленными в скобках элементами.

Следствием этой теоремы является утверждение, что в группе G можно ввести линейный порядок тогда и только тогда, когда для произвольного конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ неединичных элементов можно так подобрать числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, что

$$e \notin S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n}).$$

Возникает следующий вопрос: возможно ли в общем случае утверждать, что если в группе G условие Фукса выполняется относительно какого-нибудь $m \in \mathbf{N}$, то отсюда следует, что оно выполняется и для любого n, $n \in \mathbf{N}$?

В некоторых случаях на этот вопрос дается положительный ответ — всякая нильпотентная группа без кручения линейно упорядочена. В общем случае, однако, как мы покажем в настоящей работе, ответ отрицательный.

Пример, рассматриваемый Блудовым В. В. (2), дает ответ на некоторые вопросы поставленные первым Всесоюзным симпозиумом по теории групп в 1965 г.

В (5) мы делаем модификацию этого примера и получаем группу, в которой условие Фукса выполняется относительно $n=1$ и 2, а нарушается для $n=3$.

Мы доказываем, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ можно построить группу, в которой условие Фукса выполнено для всех натуральных чисел, не превышающих n, но для $n+1$ оно уже нарушено. Группа представляет собой следующую модификацию примера Блудова:

Пусть $F_1 = \langle x_1, \ldots, x_{2^n} \rangle$ и $F_2 = \langle y_1, \ldots, y_{2^n} \rangle$ — две свободные группы, каждая с 2^n пораждающими элементами и $F = F_1 \times F_2$ является их прямым произведением.

Для элементов группы F_1, как для слов над алфавитом $x_1, \dots, x_{2^n}$, $x_1^{-1}, \dots, x_{2^n}^{-1}$ вводим следующие числовые характеристики:

1) $l(v)$ — длина слова v (для пустого слова $\emptyset$ полагаем $l(\emptyset)=0$) и

$$m(v) = \begin{cases} l(v)-1 & \text{если} \quad v = x_i v', \quad i = 1, \dots, 2^n \\ l(v) & \text{если} \quad v = x_i^{-1} v', \quad i = 1, \dots, 2^n \\ 0 & \text{если} \quad v = \emptyset \end{cases} \tag{2}$$

Здесь знакозначает лексикографическое равенство слов. Он используется только для слов, представленных в редуцированном (сокрашенном) виде.

Если $f\in F$ и $f=uv$, где $v\in F_1$, $u\in F_2$, то полагаем $l(f)=l(v)$ и $m(f)=$ $=m(v)$.

Через $\mathbf{Z}_+(F)$ обозначаем подмножество элементов целочисленного группового кольца над F со строго положительными коэффициентами. Аналогичный смысл имеют и обозначения $\mathbf{Z}_+(F_1)$ и $\mathbf{Z}_+(F_2)$.

Если $\sigma\in\mathbf{Z}_+(F)$ и $\sigma=n_1f_1+\dots+n_kf_k$, то полагаем $l(\sigma)=\max l(f_i)$ и $m(\sigma)=\max m(f_i)$.

В группу F_2 вводим линейный порядок так, что $y_i>l$, $i=1, \dots, 2^n$.

Рассмотрим свободную абелеву группу M с базисными элементами a_α и $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$, где $\alpha\in F_2$ и $\beta\in F_1$, т. е.

$$M = \{a_\alpha, b(k)_\alpha^\beta, k = 1, \dots, n, m_1+m_2 = m_2+m_1, \alpha\in F_2, \alpha\in F_1\}.$$

Образуем полупрямое (нормальное) произведение $G=M\lambda F$. Действие F на M задаем через следующие соотношения, причем для операции в M используем аддитивную запись, а для действия F над M — правую мультипликативную запись:

$$a_\alpha x_i = -a_\alpha + \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(i, k)\big(b(k)_\alpha^e + b(k)_{y_i\alpha}^e\big)$$

$$a_\alpha y_i = a_{\alpha y_i}$$

$$b(k)_\alpha^\beta x_i = b(k)_\alpha^{\beta x_i},$$

$$b(k)_\alpha^\beta y_i = b(k)_{\alpha y_i}^\beta,$$

$i=1, 2, \dots, 2^n, k=1, \dots, n$, а функция $\varphi_n(i, k)$ задается рекурентно следующим способом:

$$\varphi_1(1, 1) = -1; \quad \varphi_1(2, 1) = 1;$$

$$\varphi_{n+1}(i,k) = \begin{cases} \varphi_n(i, k), & i \leqq 2^n, & k \leqq n \\ \varphi_n(i-2^n, k), & 2^n < i \leqq 2^{n+1}, & k \leqq n \\ -1, & i \leqq 2^n, & k = n+1 \\ 1, & 2^n < i \leqq 2^{n+1}, & k = n+1. \end{cases}$$

Пусть A означает подгруппу M, порожденную элементами a_α, а B_k, $k=1, \dots, n$ — подгруппы M, порожденные соответственно элементами $b(k)_\alpha^\beta$.

Если $m\in M$, $\sigma\in\mathbf{Z}_+(F)$, где $\sigma=p_1f_1+\dots+p_Nf_N$, то $m\sigma$ означает

$$p_1mf_1+\dots+p_Nmf_N.$$

Прежде всего сформулируем и докажем несколько лемм, аналогичных леммам из примера Блудова В. В. Затем с их помощью установим, что в построенной таким образом группе G условие Фукса выполнено для любого натурального числа, не превышающего n, а для $n+1$ оно уже нарушено.

Лемма 1. *Пусть $a \in A$, $a \neq 0$ и $\sigma \in \mathbf{Z}_+(F_2)$. Тогда $a\sigma \neq 0$ и $a\sigma \in A$.*

Доказательство. Принадлежность $a\sigma \in A$ вытекает непосредственно из соотношений, задающих действие F над M.

Пусть

$$a = n_1 a_{\alpha_1} + \ldots + a_N a_{\alpha_N},$$

$$\sigma = p_1 u_1 + \ldots + p_M u_M$$

и для определенности допустим, что

$$\alpha_1 > \alpha_i, \quad i = 2, \ldots, N$$

$$u_1 > u_j, \quad j = 2, \ldots, M.$$

Тогда

$$a\sigma = n_1 a_{\alpha_1} p_1 u_1 + n_1 a_{\alpha_1} \sum_{j=2}^{M} p_j u_j + \sum_{l=2}^{N} n_i a_{\alpha_i} \sigma =$$

$$= n_1 p_1 a_{\alpha_1 u_1} \sum_{j=2}^{M} n_1 p_j a_{\alpha_1 u_j} + \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{M} n_i p_j a_{\alpha_i u_j}$$

Так как $p_1 n_1 \neq 0$ и $\alpha_1 u_1 > \alpha_i u_j$ для $j=2, \ldots, M$; $\alpha_1 u_1 > \alpha_i u_j$ для $i=2, \ldots, N$ и $j=1, \ldots, M$, то $a\sigma \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $a \in A$, $\sigma \in \mathbf{Z}_+(F)$ и в базисном развитии $a\sigma$ встречается базисный элемент $b(k)_\alpha^\beta$ с ненулевым коэффициентом. Тогда для $b(k)_\alpha^\beta$ выполняется неравенство $l(\beta) \leqq m(\sigma)$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = p_1 f_1 + \ldots + p_M f_M$. Для произвольного $j=1, \ldots, M$, рассматриваем $ap_j f_j = p_j a u_j v_j = a' v_j$, где $u_j \in F_1$, $v_j \in F_1$, $u_j v_j = f_j$ и согласно Л. 1 $a' \in A$.

Используем индукцию по длине v_j. Для $l(v_j)=0$ предположение справедливо. (Тогда согласно Л. 1 $p_j a f_j \in A$ и элемент $b(k)_\alpha^\beta$ не будет участвовать в базисном разложении $p_j a f_j$.) Допустим, что оно справедливо для всех v_j, таких, что $l(v_j) < L$, $L \geqq 1$.

Пусть $l(v_j) = L$. Представим v_j в виде $v_j = w v_j'$ так, что $l(w) = 1$. Тогда $l(v_j') < L$.

Полагаем

$$a = \sum_{t=1}^{T} n_t a_{\alpha_t}$$

и получаем

$$a' v_j = a' w v'_j = \Big(\sum_{t=1}^{T} n_t a_{\alpha_t}\Big) w v'_j = \Big[-a' + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{n} n_t \varphi_n(i,k)\big(b(k)^{\beta}_{\alpha_t} + b(k)^{\beta}_{y_i \alpha_t}\big)\Big] v'_j =$$

$$= -a' v'_j + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{n} n_t \varphi_n(i,k)\big(b(k)^{\beta v'_j}_{\alpha_t} + b(k)^{\beta v'_j}_{y_i \alpha_t}\big),$$

где $\beta = w$, если $w = x_i^{-1}$ и $\beta = e$, если $w = x_i$, $i = 1, \ldots, 2^n$.

Очевидно, что

$$l(\beta v'_j) = m(w v'_j) = m(v_j) \leqq m(\sigma).$$

Для $a' v'_j$ имеем $l(v'_j) < L$ и, следовательно, в силе индукционное предположение.

Таким образом, утверждение доказано для произвольного члена $a\sigma$.

Лемма 3. *Пусть* $a \in A$, $\sigma \in \mathbf{Z}_+(F)$ *и в базисном выражение* $a\sigma$ *встречается базисный элемент* $b(k)^{\beta}_{\alpha}$, $k = 1, \ldots, n$ *с ненулевым коэффициентом и с таким, что* $l(\beta) = m(\sigma)$.

Тогда:

1) *если* $\beta = x_\varepsilon \beta'$, $\varepsilon = 1, \ldots, 2^n$, *то* $\sigma = v\sigma_1 + \sigma_2$, *где*

$$v \in F_1,\ v = x_\delta \beta,\ \delta = 1, \ldots, 2^n,$$

$$\sigma_1 \in \mathbf{Z}_+(F_2), \sigma_2 \in \mathbf{Z}_+(F).$$

2) *Если* $\beta = x_\varepsilon^{-1} \beta'$, $\varepsilon = 1, \ldots, 2^n$, *то* $\sigma = v\sigma_1 + \sigma_2$, $v \in F_1$, $v = \beta$ *или* $v = x_\delta \beta$, $\delta = 1, \ldots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$, $\sigma_1 \in \mathbf{Z}_+(F_2)$; $\sigma_2 \in \mathbf{Z}_+(F)$.

Доказательство.

Пусть

$$a = n_1 a_\alpha + \ldots + n_N a_{\alpha_N}$$

и

$$\sigma = p_j f_1 + \ldots + p_M f_M.$$

Тогда

$$a\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} n_i p_j a_{\alpha_i f_j}$$

Рассмотрим произвольное слагаемое этой суммы

$$n_i p_j a_{\alpha_i} f_j = n_i p_j a_{\alpha_i} u_j v_j = a' v_j,$$

где $v_j \in F$, $u_j \in F_2$, $u_j v_j = f_j$ и, согласно Л. 1, $a' \in A$. Пусть

$$a' = n'_1 a_{p_1} + \ldots + n'_t a_{p_t}.$$

Если $l(v_j) = 0$, то утверждение справедливо.

Если $l(v_j) \neq 0$, представляем v_j в виде $v_j = w v'_j$, где $l(w) = 1$.

Рассмотрим элемент $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ такой, что $l(\beta)=m(\sigma)$ и $\beta=x_\varepsilon\beta'$ $(x_\varepsilon^{-1}\beta')$ и допустим, что $v_j \neq x_\delta\beta$, $\delta=1, \dots, 2^n$

$$(v_j \neq \beta, \quad v_j \neq x_\delta\beta, \quad \delta \neq \varepsilon, \quad \delta = 1, \dots, 2^n).$$

Покажем, что в таком случае $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в базисном выражении $a'v_j$.

Имеем

$$a'v_j = a'wv_j' = -a'v_j' + \sum_{i=1}^{t}\sum_{k=1}^{N} n_i'\varphi_n(\xi, k)\big(b(k)_{p_i}^{\omega v_j'} + b(k)_{y_\xi\gamma_i}^{\omega v_j'}\big),$$

$$\xi = 1, \dots, 2^n$$

$\omega = w$ если $w=x_\xi^{-1}$, $\omega=l$ если $w=x_\xi$.

Так как $\omega v_j' \neq \beta$, то элемент $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в двойной сумме. Для первого слагаемого имеем, или 1) $m(v_j') < m(\sigma) = l(\beta)$ и тогда, согласно Л. 2, $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не будет встречаться в базисном выражении $a'v_j'$; или 2) $m(v_j') = m(\sigma)$.

Из $l(v_j') < l(\sigma)$ следует, что $v_j' = x_\delta^{-1}v''$, $\delta=1, \dots, 2^n$, и тогда

$$a'v_j' = -a'v'' + \sum_{i=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon, k)\big(b(k)_{\gamma_i}^{v_j'} + b(k)_{y_\varepsilon\gamma_i}^{v_j'}\big),$$

$$\varepsilon = 1, \dots, 2^n.$$

Снова $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в двойной сумме, а для первого слагаемого $a'v''$ имеем $m(v'') < m(v_j') = m(\sigma) = l(\beta)$. Это, согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$, не будет встречаться в базисном выражении av''. Вследствие полученных противоречий и произвольного выбора слагаемого $n_ip_ja_{\alpha_i}f_j$ лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $a \in A$, $a = n_1a_{\alpha_1} + \dots + n_Na_{\alpha_N}$ *и для определенности* $\alpha_1 > \alpha_i$, $i=2, \dots, \mathbf{N}$, $n_1 \neq 0$.

Пусть далее $\sigma = \sum_{j=1}^{M} p_jv_1u_j + \sigma_2$, *где*

$$p_j \in \mathbf{Z}_+, \quad v_1 \in F_1, \quad m(v_1) = m(\sigma) = l(\sigma),$$

т. е. $v_1 = x_\varepsilon^{-1}v_1'$, $\varepsilon=1, \dots, 2^n$, $u_j \in F_2$ *и для определенности* $u_1 > u_j$, $j=2, \dots, M$; $\sigma_2 \in \mathbf{Z}_+(F)$ *и* v_1 *не встречается в базисном выражении* σ_2.

Тогда в базисном развитии $a\sigma$ *элементы* $b(k)'_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}$, $k=1, \dots, n$ *встречаются с коэффициентами соответственно* $\varphi_n(\varepsilon, k)n_1p_1 \neq 0$ *и для всех других базисных элементов* $b(k)_\alpha^\beta$ *этого разложения* $\alpha < y_\varepsilon\alpha_1u_1$.

Доказательство. Полагаем

$$a_1 = \sum_{i=2}^{N} n_ia_{\alpha_i} \quad \text{и} \quad \sigma_1 = \sum_{j=2}^{M} p_jv_1u_j$$

Тогда

$$a\sigma=(n_1a_{\alpha_1}+a_1)(p_1v_1u_1+\sigma_1+\sigma_2)=n_1p_1a_{\alpha_1}v_1u_1+a_1p_1v_1u_1+a\sigma_1+a\sigma_2=$$

$$=n_1p_1a_{\alpha_1}v_1'u_1+\sum_{k=1}^{n}n_1p_1\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)^{v_1}_{\alpha_1u_1}+b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}\big)-$$

$$-a_1p_1v_1'u_1+p_1\sum_{i=2}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)^{v_1}_{\alpha_iu_1}+b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}\big)-$$

$$-a_1v_1'\sum_{j=2}^{M}p_ju_j+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{M}\sum_{k=1}^{n}n_ip_j\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)^{v_1}_{\alpha_iu_j}+b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_iu_j}\big)+a\sigma_2.$$

Рассмотрим часть этой суммы:

$$-n_1p_1a_{\alpha_1}v_1'u_1-a_1p_1v_1'u_1-av_1'\sum_{j=2}^{M}p_ju_j=a'v'.$$

Из Л. 1 следует, что $a'\in A$. Имеем еще $m(v_1')<m(v_1)=l(v_1)$. Оледовательно, согласно Л. 2 $b(k)^{v_1}_{\alpha}$, $k=1,\dots,n$ не встречается в базисном разложении $a'v'$.

Рассмотрим последнее слагаемое $a\sigma_2$ и, применив Л. 3, получим, что $b(k)^{\beta}_{\alpha}$ можно встретить в базисном развитии $a\sigma_2$ только если в базисном разложении σ_2 встречается v_1 или $x_\delta v_1$, $\delta=1,\dots,2^n$, $\delta\neq\varepsilon$.

Первое невозможно по предположению, а второе невозможно, так как

$$l(x_\delta v_1)=l(v_1)+1>l(\sigma)\geqq l(\sigma_2).$$

Для слагаемых

$$\sum_{k=1}^{n}n_1p_1\varphi_n(\varepsilon,k)b(k)^{v_1}_{\alpha},$$

$$p_1\sum_{i=2}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)^{v_1}_{\alpha_iu_1}+b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}\big)$$

и

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{M}\sum_{k=1}^{n}n_ip_j\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)^{v_1}_{\alpha_iu_j}+b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_iu_j}\big)$$

имеем $\alpha_iu_j\leqq\alpha_1u_1<y_\varepsilon\alpha_1u_1$ для $i=1,\dots,\mathbf{N}$, $j=1,\dots,M$ и

$$y_\varepsilon\alpha_iu_j\leqq y_\varepsilon\alpha_1u_j<y_\varepsilon\alpha_1u_1$$

для $i=1,\dots,N$, $j=2,\dots,M$.

В таком случае $b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}$, $k=1,\dots,n$ не встречается в этих слагаемых, а для всех других $b(k)^{v_1}_{\alpha}$ имеем $\alpha<y_\varepsilon\alpha_1u_1$.

И так $b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}$, $k=1,\dots,n$ встречается только в сумме $\sum_{k=1}^{n}n_1p_1\varphi_n(\varepsilon,k)b(k)^{v_1}_{y_\varepsilon\alpha_1u_1}$, причем с коэффициентом $\varphi_n(\varepsilon,k)n_1p_1$.

Этим лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть*

$$b = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} b(k)_{\alpha_i}^{\beta_1} + b_2,$$

где для всех $b(k)_\alpha^\beta$ *из базисного разложения* b_2

$$\beta \neq \beta_1, \quad l(\beta) \leqq l(\beta_1).$$

Пусть

$$\sigma \in \mathbf{Z}_+(F), \quad \sigma = \sum_{t=1}^{T} p_t u_1 v_t + \sigma_2,$$

где $p_t \in \mathbf{Z}_+$, $v_1 \in F_1$, $u_t \in F_2$ *и для определенности* $u_1 > u_t$ *при* $t=2, \ldots, T$.

Пусть еше v_1 *не встречается в базисном развитии* σ_2 *и* $l(v_1) \geqq m(v)$, $l(\beta_1 v_1) = l(\beta_1) + l(v_1)$ *и для каждого другого* v *из базисного развития* σ $l(\beta_1 v_1) \geqq l(\beta_i v_t)$ *для* $t=1, \ldots, T$.

Тогда элементы $b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \ldots, n$ *встречаются и то только с коэффициентами соответствено* n_{1k} $p_1 \neq 0$ *в базисном разложении* $b\sigma$, *а для всех других* $b(k)_\alpha^{\beta_1 v_1}$ *имеем* $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Доказательство. Полагаем

$$b_1 = \sum_{i=2}^{N} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} n(k)_{\alpha_i}^{\beta_1}, \quad \sigma_1 = \sum_{t=2}^{T} p_t v_1 u_t$$

Тогда

$$b\sigma = \Big(\sum_{k=1}^{n} n_{1k} b(k)_{\alpha_1}^{\beta_1} + b_1 + b_2\Big)(p_1 v_1 u_1 + \sigma_1 + \sigma_2) =$$

$$= p_1 \sum_{k=1}^{n} n_{1k} b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=2}^{T} n_{1k} p_t b(k)_{\alpha_1 u_t}^{\beta_1 v_1} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} n_{ik} p_t b(k)_{\alpha_i u_t}^{\beta_1 v_1} + b_2 \sum_{t=1}^{T} p_t v_1 u_t +$$

$$+ b_2 \sigma_2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} b(k)_{\alpha_i}^{\beta_1} \sigma_2.$$

Очевидно, что $b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \ldots, n$ встречается только в первой сумме и то с коэффициентами соответственно $n_{1k} p_1 \neq 0$. Покажем, что эти элементы не встречаются в базисном разложении остальных слагаемых и для всех других $b(k)_\alpha^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \ldots, n$ имеем $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Рассмотрим слагаемое $b_2 \sum_{t=2}^{T} p_t v_1 u_t$. Базисные элементы его разложения имеют вид $b(k)_{\alpha u_j}^{\beta v_1}$, $k=1, \ldots, n$, где $b(k)_\alpha^\beta$ из базисного развития b_2 и, так как по условию для всех таких $b(k)_\alpha^\beta$, $\beta \neq \beta_1$, то $b(k)_\alpha^{\beta_1 v_1}$ не встречается в базисном выражении этого слагаемого.

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_{ik}\, b(k)_{\alpha_1}^{\beta_1}\sigma_2.$$

Его базисные элементы имеют вид $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v}$, где $v \neq v_1$ так как по условию v_1 не участвует в базисном развитии σ_2. Следовательно $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ не встречается в базисном развитии и этого слагаемого.

Рассмотрим теперь слагаемые:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=2}^{T} n_{1k}\, p_t\, b(k)_{\alpha_1 u_t}^{\beta_1 v_1}, \quad \sum_{i=2}^{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} n_{ik}\, p_t\, b(k)_{\alpha_i u_t}^{\beta_1 v_1}.$$

Так как $\alpha_1 u_t < \alpha_1 u_1$ для $t=2, \ldots, T$ и $\alpha_i u_t \leqq \alpha_i u_1 < \alpha_1 u_1$ для $i=2, \ldots, N$, $t=1, \ldots, T$, то для всех $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ из базисного выражения этих слагаемых $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Рассмотрим теперь слагаемое $b_2\sigma_2$ и допустим, что в базисном его выражении участвуют элементы $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \ldots, n$.

Это означает, что в базисном выражении b_2 встречается элемент $b(k)_{\alpha}^{\beta_r}$, а в базисном развитии σ_2 участвует такое v_s, что $\beta_r v_s = \beta_1 v_1$.

Так как $l(\beta_r v_s) \leqq l(\beta_r v_s) \leqq l(\beta_r) + l(v_s)$, то существуют две возможности:

(1) $$l(\beta_r v_s) < l(\beta_r) + l(v_s)$$

Тогда

$$l(\beta_r v_s) \leqq l(\beta_r) + l(v_s) - 2 < l(\beta_r) + l(v_s) - 1 \leqq l(\beta_r) + m(v_s) \leqq$$
$$\leqq l(\beta_r) + m(\sigma) \leqq l(\beta_1) + l(v_1) = l(\beta_1 v_1),$$

т. е. $l(\beta_r v_s) < l(\beta_1 v_1)$. Следовательно невозможно $\beta_r v_s = \beta_1 v_1$.

(2) $$l(\beta_r v_s) = l(\beta_r) + l(v_s).$$

Тогда $l(\beta_r) \leqq l(\beta_1)$.

При $l(\beta_r) = l(\beta_1)$ следует, что $\beta_r = \beta_1$ $(\beta_r v_s = \beta_1 v_1)$, а это противоречит условию леммы.

Остается $l(\beta_r) < l(\beta_1)$ и тогда должно быть $l(v_s) > l(v_1)$.

Но $l(v_1) \geqq m(\sigma) \geqq m(v_s) \geqq l(v_s) - 1$. Следовательно $l(v_1) = l(v_s) - 1 = m(v_s)$. Второе равенство показывает, что $v_s = x_\delta v_s'$, $\delta = 1, \ldots, 2^n$.

По условию имеем $l(\beta_1 v_1) \geqq l(\beta_1 v_s)$ и так как $l(v_s) > l(v_1)$, то

$$l(\beta_1 v_s) \leqq l(\beta_1 v_1) = l(\beta_1) + l(v_1) < l(\beta_1) + l(v_s).$$

Это означает, что при умножении β_1 на v_s остается сокращение, т. е. $\beta_1 = \beta_1' x_\delta^{-1}$ (такое же δ как при $v_s = x_\delta v_s'$). Ясно, что в элементе $\beta_1 v_1$ на $l(v_1)+1$ месте справа находится элемент x_δ^{-1}, а в $\beta_r v_s$ на том же месте находится элемент x_δ.

Следовательно, невозможно $\beta_1 v_1 = \beta_r v_s$. Поэтому элементы $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ не участвуют в базисном выражении рассматриваемых слагаемых.

Этим лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $b_1 \in B$, $b_2 \in B$,

$$b_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} n_{ik} \big(b(k)^{\beta}_{\alpha_i} + b(k)^{\beta}_{y_\varepsilon \alpha_i}\big),$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} m_{jk} \big(b(k)^{\beta}_{\gamma_i} + b(k)^{\beta}_{y_\delta \gamma_j}\big),$$

$$\varepsilon = 1, \dots, 2^n, \quad \delta = 1, \dots, 2^n, \quad \varepsilon \neq \delta$$

и пусть $b_1 + b_2 = 0$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{N} n_{ik} a_{\alpha_i} = 0$$

и $\sum_{j=1}^{M} m_{j_k} a_{p_j} = 0$ *для каждого* $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Допустим противное: пусть для определенност

$$\sum_{i=1}^{N} n_{ik} a_{\alpha_i} \neq 0.$$

Тогда после приведения подобных членов (если это несбходимо) останутся коэффициенты $n_{ik} \neq 0$ для некоторых $i = 1, \dots, N$. Полагаем

$$l_1 = \max_{n_{ik} \neq 0} [l(\alpha_i), l(y_\varepsilon \alpha_i)].$$

Аналогично

$$l_2 = \max_{m_{jk} \neq 0} [l(\gamma_j), l(y_s \gamma_j)].$$

Если $\sum_{j=1}^{M} m_{jk} a_{\gamma j} = 0$ для каждого $k = 1, \dots, n$, тогда $l_2 = 0$. (Здесь под $l(\alpha)$ подразумевается длина слова α.) Пусть α_s один из индексов α_i, $i = 1, \dots, N$, для которых $l(\alpha_s) = l_1$.

Тогда $\alpha_s = y_\varepsilon \alpha'$ или $y_\varepsilon^{-1} \alpha'$.

Аналогично для γ_r, такого, что $l(\gamma_r) = l_2$ имеем $\gamma_r = y_\delta \gamma'$ или $\gamma_r = y_\delta^{-1} \gamma'$.

Так как $\varepsilon \neq \delta$, то отсюда следует, что $\alpha_s \neq \gamma_r$.

Рассмотрим в b_1 базисный элемент $b(k)^{\beta}_{\alpha s}$ с ненулевым коэффициентом ($n_{ik} \neq 0$). Если $l_1 \geqq l_2$, то $b(k)^{\beta}_{\alpha_s}$ не встречается в базисном развитии b_2 и тогда $b_1 + b_2 \neq 0$, что противоречит условию.

Если $l_1 > l_2$, то $b_2 \neq 0$ и в базисном выражении b_2 будет участвовать элемент $b(k)^{\beta}_{\gamma_r}$ с ненулевым коэффициентом $m_{rk} \neq 0$, $l(\gamma_r) = l_2$. Элемент $b(k)^{\beta}_{\gamma_r}$ не будет встречаться в b_1, и следовательно $b_1 + b_2 \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. *В построенной таким образом группе G условие Фукса выполняется для произвольных n пораждающих элементов.*

Доказательство. Сначала покажем, что G имеет строго изолированную единицу. Это означает, что в G выполняется условие Фукса для $n = 1$.

Так как $G/M\cong F$, а F имеет строго изолированную единицу, то отсюда следует, что M строго изолирована в G. Следовательно достаточно показать, что если $q\in M$ и $\sigma\in\mathbf{Z}_+(F)$, то из $q\sigma=0$ следует, что $q=0$.

Рассмотрим два случая:

$$(1)\qquad q = a\in A.$$

Пусть $a\sigma=0$. Представим σ в виде $\sigma=\sigma_1 v_1+\sigma_2$, где $v_1\in F_1$, $l(v_1)=l(\sigma)$, $m(v_1)=m(\sigma)$, $\sigma_1\in\mathbf{Z}_+(F_2)$, $\sigma_2\in\mathbf{Z}_+(F)$ и v_1 не встречается в базисном выражении σ_2.

Если $l(v_1)=0$, то $l(\sigma)=0$ и $\sigma\in\mathbf{Z}_+(F_2)$. Отсюда по Л. 1 следует, что $a=0$.

Пусть $l(v_1)>0$. Полагаем $v_1=w_1v_1'$ так, что $l(w_1)=1$. В таком случае

$$a\sigma = a\sigma_1 v_1+a\sigma_2 = a_1 v_1+a\sigma_2.$$

Пусть

$$a\sigma_1 = a_1 = \sum_{i=1}^{N} n_i a_{\alpha_i}.$$

Тогда

$$(1)\qquad a\sigma = -a_1 v_1' + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{\omega v_1'}+b(k)_{y_\varepsilon\alpha_i}^{\omega v_1'}\big)+a\sigma_2$$

где $\omega=w_1$ если $w_1=x_\varepsilon^{-1}$, и $\omega=e$ если $w_1=x_\varepsilon$, $\varepsilon=1,\dots,2^n$.

Если $\omega=w_1=x_\varepsilon^{-1}$, то $m(v_1')<l(\omega v_1')$ и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v_1'}$, $k=1,\dots,n$ не будут встречаться в базисном разложении a_1v_1'. Согласно Л. 3 $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v_1'}$ могут встречаться в базисном выражении $a\sigma_2$ только в случае, если $\sigma_2=v_2\sigma_3+\sigma_4$, где $\sigma_3\in\mathbf{Z}_+(F_2)$, $\sigma_4\in\mathbf{Z}(F)$ и $v_2=v_1$ или $v_2=x_\delta v_1$, $\delta=1,\dots,2^n$, $\delta\neq\varepsilon$.

Первое невозможно, так как v_1 по предположению не участвует в базисном выражении σ_2, а второе невозможно, так как $l(x_\delta v_1)>l(v_1)=l(\sigma)$.

Поэтому из $a\sigma=0$ следует

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{\omega v_1'}+b(k)_{y_\varepsilon\alpha_i}^{\omega v_1'}\big)=0$$

и согласно Л. 6 получаем, что $a_1=0$. Но $a_1=a\sigma_1$, следовательно $a=0$.

Пусть теперь $\omega=e$.

Если $l(v_1')=0$, то согласно Л. 1 $b(k)_{\alpha}^{v_1'}$ не встречается в базисном разложении a_1v_1' и, как в предыдущем случае, из $a\sigma=0$ следует что $a=0$.

Действительно, из (1) имеем

$$a\sigma = -a_1 v_1' + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n\big(b(k)_{\alpha_i}^{l}+b(k)_{y_\varepsilon\alpha_i}^{l}\big)+a\sigma_2$$

и, применив Л. 6, получим, что $a_1=0$ и следовательно и $a=0$.

Если $l(v_1')\neq 0$ и $l(v_1')>m(v_1')$, то $l(\omega v_1')=l(v_1')>m(v_1')$ и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha_1}^{\omega v_1'}$, $k=1,\dots,n$ не встречаются в базисном выражении a_1v_1'.

Пусть $b(k)^{\omega v}_{\alpha_i}$ встречаются в базисном выражении $a\sigma_2$. Тогда согласно Л. 3 $\sigma_2=v_2\sigma_3+\sigma_4$, где $v_2\in F_1$ и или $v_2=v_1'$, или $v_2=x_\delta v_1'$, $\delta=1, \ldots, 2^n$, $\delta\neq\varepsilon(v_1'=x_\varepsilon^{-1}v_1'')$, $\sigma_3\in\mathbf{Z}_+(F_2)$, $\sigma_4\in\mathbf{Z}_+(F)$ и v_2 не встречается в базисном выражении σ_4.

Так как $v_2\neq v_1$, из этого следует, что $v_2=x_\delta v_1'$, $\delta\neq\varepsilon$.

Имеем

$$a\sigma = a_1 v_1+a(v_2\sigma_3+\sigma_4) = a_1 v_1+a_2 v_2+a\sigma_4.$$

Полагаем $a_2=a\sigma_3=\sum_{j=1}^{M} m_j a_{\gamma_j}$ и получаем

$$a\sigma = -a_1 v_1'-a_2 v_1'+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon, k)\big(b(k)^{v_1'}_{\alpha_i}+b(k)^{v_1'}_{y_\varepsilon\alpha_i}\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} m_j\varphi_n(k, \delta)\big(b(k)^{v_1'}_{\gamma_j}+b(k)^{v_1'}_{y_\delta\gamma_j}\big)+a\sigma_4.$$

Согласно Л. 2 и Л. 3 $b(k)^{v_1}_{\alpha}$ не встречаются в базисном разложении $(a_1+a_2)v_1'+a\sigma_4$.

В таком случае из $a\sigma=0$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon, k)\big(b(k)^{v_1'}_{\alpha_i}+b(k)^{v_1'}_{y_\varepsilon\alpha_i}\big)+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} m_j\varphi_n(\delta, k)\big(b(k)^{v_1'}_{\gamma_j}+b(k)^{v_1'}_{y_\delta\gamma_j}\big) = 0.$$

Но тогда из Л. 6 следует, что $a_1=0$, $a_2=0$ и следовательно $a=0$.

Пусть теперь $l(v_1')=m(v_1')>0$.

Тогда $v_1'=x_\delta^{-1}v_1''$ и $\delta\neq\varepsilon$ $(v=x_\varepsilon v_1'=x_\varepsilon x_\delta^{-1}v_1'')$. Согласно Л. 3 $b(k)^{v_1'}_{\alpha_1}$ будут встречаться в базисном выражении $a\sigma_2$ если $\sigma_2=\sigma_3 v_2+\sigma_4$, где $v_2=v_1'$ или $v_2=x_\varrho v_1'$, $\varrho=1, \ldots, 2^n$, $\varrho\neq\delta, \varepsilon$ (если $\varrho=\varepsilon\neq\delta$, получим $v_2=v_1$, что противоречит предположениям).

a) Пусть $v_2=v_1'$.

Положим, что σ_3 и σ_4 выбраны как в вышеуказанном случае. Имеем

$$a\sigma = a_1 v_1+a_2 v_2+a\sigma_4,$$

где $a_1=a\sigma_3$ и

$$a_1 v_1+a_2 v_2 = a_1 x_\varepsilon v_1'+a_2 v_1' =$$

$$= (a_2-a_1)v_1'+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_i\varphi_n(\varepsilon, k)\big(b(k)^{v_1'}_{\alpha_i}+b(k)^{v_1'}_{y_\varepsilon\alpha_i}\big).$$

Полагаем

$$a_2-a_1 = a_3 = \sum_{j=1}^{M} m_j a.$$

Тогда

$$a_1v_1+a_2v_2=-a_3v_1''+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}m_j\varphi_n(\delta,k)\big(b(k)_{\gamma_j}^{v_1'}+b(k)_{y_\delta\gamma_j}^{v_1'}\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{v_1'}+b(k)_{y_\varepsilon\alpha_i}^{v_1'}\big).$$

Так как $m(v_1'')<l(v_1')$, то согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^{v_1'}$ не встречаются в базисном выражении a_3v''. Применив снова Л. 6, получим, что из $a\sigma=0$ следует $a=0$.

б) Пусть $v_2=x_\varrho v_1'$, $\varrho=1, \ldots, 2^n$,

$$\varrho\neq\varepsilon,\quad \varrho\neq\delta,\quad \varepsilon\neq\delta.$$

Имеем $a\sigma=a_1v_1+a_2v_2+a\sigma_4$. Полагаем $a_2=a\sigma_3=\sum_{j=1}^{M}m_ja_{\gamma_j}$. Тогда

$$a\sigma=-a_1v_1'+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{v_1'}+b(k)_{y_\varepsilon\alpha_i}^{v_1'}\big)-$$

$$-a_2v_1'+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}m_j\varphi_n(\varrho,k)\big(b(k)_{\gamma_j}^{v_1'}-b(k)_{y_\varrho\gamma_j}^{v_1'}\big)+a\sigma_4=$$

$$=(a_1+a_2)v_1''+a\sigma_4+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\delta,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{v_1'}+b(k)_{y_\delta\alpha_i}^{v_1'}\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}m_j\varphi_n(\delta,k)\big(b(k)_{\gamma_i}^{v_1'}+b(k)_{y_\delta\gamma_j}^{v_1'}\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}n_i\varphi_n(\varepsilon,k)\big(b(k)_{\alpha_i}^{v_1'}+b(k)_{y_\varepsilon\gamma_i}^{v_1'}\big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}m_j\varphi_n(\varrho,k)\big(b(k)_{\gamma_j}^{v_1'}+b(k)_{y_\varrho\gamma_j}^{v_1'}\big).$$

Теперь уже $m(v_1'')<l(v_1')$ и согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^{v_1'}$ не встречаются в базисном выражении $(a_1+a_2)v_1''$. По предположению v_1' не встречается в базисном выражении σ_4. Следовательно сумма последних четырех слагаемых равна нулю и так как $\delta\neq\varrho\neq\varepsilon$, то и сумма последних двух слагаемых равна нулю. Если допустим противное, то после приведения останется базисный элемент вида $b(k)_\alpha^{v_1}$, который не сократится с соответствующим элементом из других слагаемых, поскольку $\varepsilon\neq\varrho$ и $\delta\neq\varrho$. (Делаются рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве Л. 6.) Тогда не будет справедливо утверждение, что сумма последних четырех слагаемых равна нулю. Применив Л. 6 для последних двух слагаемых, получим, что $a_1=a_2=0$ и следовательно $a=0$.

Этим первый случай полностью рассмотрен.

2) Пусть теперь $q\in M$, $q=a+b$

$$a\in A,\quad b\in B,\quad b=\sum_{i=1}^{n} b_i,\quad b\in B_i$$

($B_i=\langle b(i)_\alpha^\beta\rangle$) и хотя бы одно $b_i\neq 0$ (т. е. $b\neq 0$).

Если $l(\sigma)=0$, то $q\sigma\neq 0$ только тогда, когда $q\neq 0$ т. е. из $q\sigma=0$ следует $q=0$.

Пусть для таких σ, для которых $m(\sigma)+l(\sigma)<L$, строгая изолированность единицы доказана. Рассмотрим σ — такое, для которого $m(\sigma)+l(\sigma)=L$ и $q\sigma=0$. Найдем q_1 и σ_1 такие, что $m(\sigma_1)+l(\sigma_1)<L$ и $q_1\sigma_1=0$ когда $q\sigma=0$, а $q_1=0$, тогда и только тогда, когда $q=0$. Таким образом строгая изолированность единицы в группе G будет полностью доказана.

И так, пусть $\sigma\in\mathbf{Z}_+(F)$ и $l(\sigma)>0$.

Представим σ в виде $\sigma=v_1\sigma_1+\sigma_2$, где $v_1\in F_1$, $m(v_1)=m(\sigma)$, $\sigma_1\in\mathbf{Z}_+(F_2)$, $\sigma_2\in\mathbf{Z}_+(F)$ и v_1 не встречается в базисном выражении σ_2.

Ненулевое слагаемое b $q=a+b$ представим в виде

$$b=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_{ik}b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}}+b_2$$

так, чтобы $b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}}$ не встречалось в базисном выражении b_2, и $l(\beta_{1k})\geqq l(\beta_{jk})$, $k=1,\dots,n$ для всех β_{jk}, для которых $b(k)_\alpha^{\beta_{jk}}$ встречается в базисном выражении b_2.

Пусть для определенности $\alpha_{1k}>\alpha_{ik}$ для $i=2,\dots,N$, $k=1,\dots,n$ и $n_{ik}\neq 0$.

Представим σ_1 в виде

$$\sigma_1=p_1u_1+\dots+p_Tu_T,$$

так, что $u_1>u_t$ для $t=2,\dots,T$, $p_1>0$.

Рассмотрим два случая:

а) $v_1=x_\varepsilon v_1'$, $\varepsilon=1,\dots,2^n$.

В этом случае $l(v_1)=l(\sigma)=m(\sigma)+1$. Если $l(\beta_{1k}v_1)=l(\beta_{1k})+l(v_1)$ для некоторого k, то, имея ввиду, что $l(\beta_{1k})\geqq l(\beta_{jk})$ и $l(v_1)\geqq l(v_s)$ для всех β_{jk} таких, что $b(k)_\alpha^{\beta_{jk}}$ встречается в базисном выражении b и для всех v_s из базисного разложения σ, применим Л. 5, можем в разложении $b\sigma$ найти базисный элемент $b(k)_\alpha^{\beta_{1k}v_1}$ с отличным от нуля коэффициентом.

С другой стороны имеем

$$l(\beta_{1k}v_1)=l(\beta_{1k})+l(v_1)=l(\beta_{1k})+m(v_1)+1>m(\sigma)$$

и согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^{\beta_{1k}v_1}$ не будет встречаться и в базисном выражении $a\sigma$. Так как оно не встречается и в b_i, $i\neq k$, то $(a+b)\sigma\neq 0$.

Полученное противоречие условию показывает, что $l(\beta_{1k}v_1)<l(\beta_{1k})+l(v_1)$ для всех $k=1,\dots,n$ т. е. $\beta_{1k}=\beta_{1k}'x_\varepsilon^{-1}$ и следовательно $l(\beta_{1k})>0$.

Покажем, что для произвольного элемента $b(k)_\alpha^{\beta_{tk}}$ из базисного выражения b, такого, что $l(\beta_{tk})=l(\beta_{1k})$ и для произвольного v_s из разложения σ, такого, что $l(v_s)=l(v_1)$ должно быть также выполнено $l(\beta_{tk}v_s)<l(\beta_{tk})+l(v_s)$, так как в противном случае будут налицо условия из Л. 5 и в базисном выра-

жении $b\sigma$ будет участвовать базисный элемент $b(k)_\alpha^{\beta_{tk}v_s}$ с отличным от нуля коэффициентом. Этот элемент, однако, не будет встречаться в базисном выражении $a\sigma$ согласно Л. 2 и тогда $(a+b)\sigma\neq 0$. Поэтому для всех таких β_{tk} и v_s выполняется

$$l(\beta_{tk}v_s) < l(\beta_{tk})+l(v_s)$$

и следовательно

$$\beta_{tk} = \beta'_{tk}x_\varepsilon^{-1}, v_s = x_\varepsilon v'_s.$$

Пусть в базисом выражении σ встречается элемент v_r, такой, что $l(v_r)=$ $=l(\sigma)-1$ и $l(v_r)=m(\sigma)$. Для этого элемента снова должно быть выполнено $v_r=x_\varepsilon v'_r$. В противном случае $l(\beta_{1k}v_r)=l(\beta_{1k})+l(v_r)$ и

$$(1)\qquad l(\beta_{1k}v_r) \geqq l(\beta_{tk}v_\varrho)$$

для всех β_{tk} из базисного выражения b и v_ϱ из разложения σ. Действительно $l(\beta_{1k}v_r)\leqq l(\beta_{1k})+l(v_1)-1$ и если $l(\beta_{tk})\leqq l(\beta_{1k})-1$ или $l(v_\varrho)\leqq l(v_1)-1$, то неравенство (1) будет справедливо.

Если же $l(\beta_{tk})=l(\beta_{1k})$ и $l(v_\varrho)=l(v_1)$, то по доказанному выше будем иметь

$$l(\beta_{tk}v_\varrho) < l(\beta_{tk})+l(v_\varrho).$$

В таком случае

$$l(\beta_{tk}v_\varrho) \leqq l(\beta_{tk})+l(v_\varrho)-2 < l(\beta_{1k})+l(v_1)-1.$$

Тогда из Л. 5 получаем противоречеие. Действительно:

$$l(\beta_{1k}v_r) = l(\beta_{1k})+l(v_1)-1 = l(\beta_{1k})+m(\sigma) > m(\sigma),$$

так как $l(\beta_{1k})>0$.

Тогда, согласно Л. 2, $(a+b)\sigma\neq 0$.

Пусть $q_1=qx_\varepsilon$, $\sigma_1=x_\varepsilon^{-1}\sigma$. Тогда $q_1\sigma_1=q\sigma=0$ и $q_1=0$ только если $q=0$, а из условий (они основываются на доказанном о виде β_{tk} и v_s)

$$l(\sigma_1) \leqq m(\sigma) < l(\sigma)$$

и

$$m(\sigma_1) < l(\sigma_1) < m(\sigma)$$

следствует, что $m(\sigma_1)+l(\sigma_1)<m(\sigma)+l(\sigma)=L$.

б) $v_1=x_\varepsilon^{-1}v'_1$.

Пусть снова $\sigma=v_1\sigma_1+\sigma_2$, где $\sigma_1\in \mathbf{Z}_+(F_2)$, v_1 не встречается в базисном развитии σ_2 и $l(v_1)=m(\sigma)$. Следовательно $m(v_1)=m(\sigma)$.

Покажем, что $l(v_1)=l(\sigma)$.

Если в базисном выражении σ есть какое-то такое v_s, что $l(v_s)>l(v_1)$, то, так как $m(v_s)\leqq m(\sigma)=m(v_1)=l(v_1)$, получаем, что $m(v_s)<l(v_s)$ и следовательно $v_s=x_\delta v'_s$, $\delta=1, \ldots, 2^n$. Но, согласно выше рассмотренному случаю, невозможно, чтобы в базисном выражении σ встречался такой елемент v_1, что

$$l(v_1) = m(\sigma) = l(\sigma)-1 \quad \text{и} \quad v_1 = x_\varepsilon^{-1}v'_1.$$

Следовательно $l(v_1)=l(\sigma)$.

Пусть в базисном выражении σ встречается элемент v_s такой, что $l(v_s)=$ $=l(v_1)=m(\sigma)$ и $v_s=x_\delta^{-1}v'_s$. Покажем, что $\delta=\varepsilon$.

Имеем $m(\sigma)=l(\sigma)$ (мы убедились в том, что нет элемента с длиной, большей длины v_1 и, следовательно, $l(\sigma)=l(v_1)$).

Пусть $q=a+b$ и

$$b = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_{ik} b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}} + b_2.$$

В таком случае, если $l(\beta_{1k}v_1)=l(\beta_{1k})+l(v_1)$, то

$$l(\beta_{1k})+l(v_1) \geqq l(\beta_{tk})+l(v_s)$$

для всех β_{tk}, таких, что $b(k)_\alpha^{\beta_{tk}}$ участвует в базисном выражении b и для всех v_s из разложения $b\sigma$. Тогда согласно Л. 5 в разложении $b\sigma$ найдется элемент $b(k)_\alpha^{\beta_{1k}v_1}$ с ненулевым коэффициентом. Согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^{\beta_{1k}v_1}$ будет встречаться в базисном разложении $a\sigma$ только если $l(\beta_{1k}v_1)=m(\sigma)$. Но это возможно только если $l(\beta_{1k})=0$. Тогда b можно представить в виде

$$b = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} n_{ik} b(k)_{\alpha_{ik}}^{e}.$$

Пусть $a=p_1a_{\psi_l}+\ldots+p_la_{\psi_l}$, $\psi_1>\psi_j$, $j=2, \ldots, l$. Если использовать Л. 4, можно найти в разложении $a\sigma$ базисный элемент $b(k)_{y_\varepsilon\psi_1u_1}^{v_1}$ с отличным от нуля коэффициентом.

Согласно Л. 5 можем найти в разложении $a\sigma$ базисный элемент $b(k)_{\psi_1u_1}^{v_1}$ с отличным от нуля коэффициентом, но тогда $(a+b)\sigma=0$ только если $y_\varepsilon\psi_1u_1=$ $=\psi_1u_1$ т. е. $\alpha_{1k}=y_\varepsilon\psi_1$.

Представим σ в виде $\sigma=\sigma_3v_s+\sigma_4$, где $v_s=x_\delta^{-1}v_s'$ и $l(v_s)=m(\sigma)$. Использовав снова Л. 4 и Л. 5, получим, что $\alpha_{1k}=y_\delta\psi_1$ и, следовательно, $\varepsilon=\delta$.

Пусть теперь $l(v_s)=m(\sigma)$, но $v_s=x_\delta v_s'$, $\delta=1, \ldots, 2^n$.

Тогда из Л. 5 следует, что в базисном выражении $b\sigma$ встречается $b(k)_\alpha^{v_s}$. Согласно Л. 3 $b(k)_\alpha^{v_s}$ будет встречаться в базосном выражении $a\sigma$ только если в разложении σ найдется такой элемент v_r, что $v_r=x_\xi v_s$, $\xi=1, \ldots, 2^n$, а это невозможно, так как в таком случае будем иметь $l(v_r)>l(\sigma)$.

Остается рассмотреть случай

$$l(\beta_{1k}v_1) < l(\beta_{1k})+l(v_1).$$

Но тогда $\beta_{1k}=\beta'x_\varepsilon$. Если в разложении σ найдется элемент v_r, такой, что $v_r=x_\delta^{-1}v_r'$; $\varepsilon\neq\delta$ и $l(v_r)=m(\sigma)$, то $l(\beta_{1k}v_r)=l(\beta_{1k})+l(v_r)$ и $l(\beta_{1k}v_r)\geqq l(\beta_{tk}v_\varrho)$ для всех β_{tk}, таких, что $b(k)_\alpha^{\beta_{tk}}$ будет из разложения b и v_ϱ из разложения σ. Согласно Л. 5 $b(k)_\alpha^{\beta_{1k}v_r}$ встретится в разложении $b\sigma$ с отличным от нуля коэффициентом, но не встретится в разложении $a\sigma$, так как $l(\beta_{1k}v_r)>m(\sigma)$ (Л. 2).

Следовательно можем положить $q_1=qx_\varepsilon^{-1}$ и $\sigma_1=x_\varepsilon\sigma$. Тогда $l(\sigma_1)+m(\sigma_1)<$ $<l(\sigma)+m(\sigma)=L$.

Этим строгая изолированность единицы в группе G доказана. Этот факт означает, что в G выполняется условие Фукса для $n=1$.

Установим, что условие Фукса выполняется и для всех натуральных чисел, не превышающих n. И так как M является абелевой группой без кручения, причем строго изолированной в G и F свободная группа с конечным числом образующих, то утверждение будет иметь следующий вид:

Для произвольно выбранных $m_1, \dots, M_s \in M$, $m_i \neq 0$ существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i=1, \dots, s$, $s \leqq n$, такой, что при любых $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in \mathbf{Z}_+(F)$, $\sigma_i \neq e$ выполняется $\varepsilon_1 m_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s m_s \sigma_s \neq 0$. Так как

$$m_i = a_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ki}, \quad a_i \in A,$$

$$b_{ki} = \sum_{t=1}^{N_{ki}} \sum_{j=1}^{M_{ki}} b(k)_{\alpha_t}^{\beta_j},$$

и $i=1, \dots, s \leqq n$, то, на основании доказательства утверждения относительно $i=1$, все возможные сличаи сводятся к

$$\varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s,$$

и

$$\varepsilon_k b_{k1} \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s b_{ks} \sigma_s, \quad k = 1, \dots, n$$

Сначаля рассмотрим случай

$$\varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s,$$

где

$$a_i = n_{i_1} a_{\alpha_{i1}} + \dots + {}_{N_i} n_i a_{\alpha_i N_i}$$

и для определенности

$$\alpha_{i_1} > \alpha_{1 j_1}$$

(1′) $$i = 1, \dots, s, j_i = 2, \dots, N_i$$

и

$$\sigma_i = p_{i_1} u_{i_1} v_{i_1} + \dots + p_{i r_i} u_{i r_i} v_{i r_i}$$

и снова для определенности

(2) $$u_{i_1} > u_{i \delta_i}$$

$$i = 1, \dots, s', \quad \delta_i = 2, \dots, r_i.$$

Имеем

$$\varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i (n_{i_1} a_{\alpha_i 1} + a_i')(p_{i_1} u_{i_1} v_{i_1} + \sigma_i') =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_i n_{i_1} p_{i_1} a_{\alpha_{i1}} v_{i_1} + \varepsilon_i a_i' \sigma_1 + \varepsilon_i a_i \sigma_i') =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_i n_{i_1} p_{i_1} a_{\alpha_i 1} u_{i_1} v_{i_1} + \varepsilon_i \sum_{j=2}^{N_i} n_{ij} a_{\alpha_i j} \sum_{\varrho=1}^{r_i} p_{i\varrho} u_{i\varrho} v_{i\varrho} +$$

$$+ \varepsilon_i \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{\varrho=2}^{r_i} n_{ij} a_{\alpha_i j} p_{i\varrho} u_{i\varrho} v_{i\varrho}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_i n_{i_1} p_{i_1} u_{i_1} v_{i_1} + \varepsilon_i \sum_{j=2}^{N_i} \sum_{\varrho=1}^{r_i} n_{ij} p_{i\varrho} a_{\alpha_i j} u_{i\varrho} v_{i\varrho} +$$

$$+ \varepsilon_i \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{\varrho=2}^{r_i} n_{ij} p_{i\varrho} a_{\alpha_i j} u_{i\varrho} v_{i\varrho})$$

Из неравенств (1′) и (2) ясно, что

$$\alpha_{i1} u_{i1} < \alpha_{ij} u_{i1} \quad \text{для} \quad j = 2, \dots, N_i,;$$
$$\alpha_{i1} u_{i1} < \alpha_{ij} u_{i\varrho} \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, N_i$$

и $\varrho=1, \dots, r_i$.

Если $\alpha_{i1}u_{i1} \neq \alpha_{k1}u_{k1}$; $i=1, \dots, s$, $k=1, \dots, s$, $i \neq k$, то независимо от выбора $\varepsilon_i = \pm 1$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i a_i \sigma_i \neq 0.$$

Если для некоторого $i \neq k$ имеем

$$\alpha_{i_1 1} u_{i_1 1} = \alpha_{i_k 1} u_{i_k 1}, \quad 2 \leqq k \leqq s,$$

то ε_{i_1} и ε_{i_k} выбираем так, чтобы $\varepsilon_{i_1} n_{i_1 1}$ и $\varepsilon_{i_k} n_{i_k 1}$ имели одинаковые знаки. Тогда при любых $\sigma_i \in \mathbf{Z}_+(F)$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i a_i \sigma_i \neq 0.$$

Рассмотрим случай

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i,$$

где

$$b_{ki} = \sum_{\delta_i=1}^{N_i} \sum_{\varrho_i=1}^{M_i} n^i_{\varrho_i \delta_i} b(k)^{\beta_i \varrho_i}_{\alpha_i \delta_i} = n^i_{11} b(k)^{\beta i_1}_{\alpha_{i1}} + b'_{ki},$$
$$\sigma_i = p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \dots + p_{ir_i} u_{ir_i} v_{ir_i} = p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \sigma'_i.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\varepsilon_i n^i_{11} b(k)^{\beta_{i1}}_{\alpha_{i1}} + b'_{ki}\right)(p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \sigma'_i) = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i n^i_{11} p_{i1} b(k)^{\beta_{i1} v_{i1}}_{\alpha_{i1} u_{i1}} + b''.$$

В базисном выражении b'' будут участвовать элементы вида

$$b(k)^{\beta_{i\delta_i} V_{i\gamma_i}}_{\alpha_{i\varrho_i} u_{i\gamma_i}},$$

где хотя бы один из индексов ϱ_i, δ_i, γ_i больше 1.

В таком случае

$$\alpha_{i1} u_{i1} > \alpha_{i_{\varrho_i}} u_{i\gamma_i}$$

или

$$\beta_{i1} v_{i1} < \beta_{i\delta_i} v_{i\gamma_i}.$$

(О последнем соотношении будем считать, что в группе F_1 введен линеиный порядок, при котором $x_i > l$, $i=1, \dots, 2^n$.)

Если $\alpha_{i1}u_{i1} \neq \alpha_{k1}u_{k1}$ или же $\beta_{i1}v_{i1} \neq \beta_{k1}v_{k1}$ при $i \neq k$, $i=1, \ldots, s$, $k=1, \ldots, s$, то при любом выборе $\varepsilon_i = \pm 1$, $i=1, \ldots, n$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i \neq 0.$$

Если $\alpha_{i_1 1}u_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k 1}u_{i_k 1}$ и $\beta_{i_1 1}v_{i_1 1} = \ldots = \beta_{i_k 1}v_{i_k 1}$, то $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_k}$ выбираем так, чтобы $\varepsilon_{i_1} n_{11}^{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_k} n_{11}^{i_k}$ имели одинаковые знаки. Тогда

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i \neq 0$$

при любом выборе $\sigma_i \in \mathbf{Z}_+(F)$.

Теорема. *Группа G неупорядочиваемая группа.*

Доказательство: Допустим противное пусть группа G имеет линейный порядок p и для определенности $a_e \in p$ (если $a_e \notin p$ будем рассматровать противоположний p порядок). Каждому из базисных элементов $b(k)_i^j$ соответствует целое число $\varepsilon_k = \pm 1$ такое, что

$$\varepsilon_k b(k)_e^e \notin p.$$

Рассмотрим упорядоченную n-торку $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Из свойств функции $\varphi_n(i, k)$ следует, что для некоторого $i \in \mathbf{N}$, $1 \leqq i \leqq 2^n$ обе n-торки $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ и $(\varphi_n(i, 1), \ldots, \varphi_n(i, n))$ совпадают. Для этого значения i непосредственно из способа задания действия F над M следует равенство

$$a_e + a_e x_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(i, k)\big(b(k)_e^e + b(k)_e^e \cdot y_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k\big(b(k)_e^e + b(k)_e^e y_i\big).$$

Тогда

$$0 = a_e - a_e x_i + \sum_{k=1}^{n} (-\varepsilon_k)\big(b(k)_e^e + b(k)_e^e \cdot y_i\big) \in p$$

— противоречие, из которого следует справедливость теоремы.

Непосредственно из приведенного доказательства видно, что в группе G существуют $n+1$ нееденичных пораждающих элементов, относительно которых условие Фукса не выполняется, поскольку для произвольных s элементов $s=1, \ldots, n$ оно выполнено.

Литература

[1] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы. М., Мир, 1965.
[2] В. В. Блудов, Пример неупорядочиваемой группы со строго изолированний единицей. *Алгебра и логика*, **11** (1972), 619—632.
[3] А. И. Кокорин, В. М., Копытов, Линейно упорядоченные группы, М., *Наука*, 1972.
[4] Коуровская тетрадь, 1, 47, *Новосибирск*, 1969.
[5] С. А. Тодоринов, Н. Л. Петрова, Върху една теорема на Фукс, Годишник на висшите учебни заведения, *Приложна математика*, т. 18, (1982).

(Поступило 8. XI. 1985 г.)