Über die Invarianten endlicher abelscher Gruppenpaare

EDIT SZABÓ (Debrecen)*

In der Gruppentheorie ist es oft wichtig zu wissen, wie eine Untergruppe in der Gruppe liegt. Wie können wir solche Invarianten finden, die die Gruppe und ihre Untergruppe zusammen charackteristieren? K. BUZÁSI untersuchte das Problem in endlichen und unendlichen abelschen Gruppen, falls die betrachtete Untergruppe zyklisch ist [1], [2]. In dieser Arbeit wir untersuchen den Fall, wobei die Untergruppe nicht unbedingt zyklisch ist.

Unter einem Gruppenpaar (G, H) versteht man eine Gruppe G, mit ihrer Untergruppe H. Das Paar (G_1, H_1) heißt isomorph mit (G_2, H_2), wenn ein Isomorphismus $\varphi\colon G_1 \to G_2$ existiert, wobei $\varphi(H_1)=H_2$ gilt. Wir untersuchen die Frage, mit welchen Invarianten die Gruppenpaare bis auf Isomorphismus eindeutig charakterisiert werden können. Das Problem kann man auch so sehen, daß eine festgesetzte endliche abelsche Gruppe G und in G zwei Untergruppen H_1, H_2 betrachtet werden. Wenn ein Automoprhismus $\varphi\colon G \to G$, $\varphi(H_1)=H_2$ existiert, dann sind die folgenden offenbar notwendige Bedingungen.

(a) $$H_1 \cong H_2$$

(b) $$G/H_1 \cong G/H_2.$$

Es wurde von K. BUZÁSI [1] bewiesen, daß wenn G eine endliche abelsche Gruppe und $H_1, H_2 \subseteqq G$ zyklische Untergruppen sind, so sind die Bedingungen (a) und (b) hinreichend. Wir haben in der Arbeit [3] gezeigt, daß wenn die Untergruppe einer endlichen abelschen Gruppe nicht zyklisch ist, so in allgemeine die Bedingungen (a) und (b) nicht hinreichend sind. Wir untersuchen die Frage, bei welchen speziellen Untergruppen einer endlichen abelschen Gruppe sind die Bedingungen (a) und (b) hinreichend dafür, daß Paar (G, H_1) mit (G, H_2) isomorph ist.

Es wurde in der Arbeit [3] der Fall geschrieben, daß G eine endliche abelsche p-Gruppe und H_1, H_2 solche homogene Untergruppen sind, die durch Potenzen der Basiselemente von G generiert werden.

1. Satz. *Es sei G eine endliche abelsche p-Gruppe.*

$$G = (a_1)\times(a_2)\times\ldots\times(a_n) \quad a_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n.$$

* Die Forschung wird von der ungarischen Nationalstieftung, N° 1813, unterstützt.

Es seien H_1 und H_2 homogene Untergruppen in G, wo $H_1 \cong H_2$ und $G/H_1 \cong G/H_2$ gelten. Ferner nahmen wir an, daß H_1 und H_2 die folgende Struktur besitzen:

$$H_1 = (a_1^{\mu_1} \cdot a_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot a_s^{\mu_s}) \times (a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}}}) \times \ldots \times (a_{s+k}^{p^{\beta_{s+k}}})$$

$$H_2 = (a_1^{\bar{\mu}_1} \cdot a_2^{\bar{\mu}_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{\bar{\mu}_t}) \times (a_{t+1}^{p^{\bar{\beta}_{t+1}}}) \times \ldots \times (a_{t+k}^{p^{\bar{\beta}_{t+k}}})$$

Dann die Paare (G, H_1) und (G, H_2) sind isomorph zueinander.

Beweis. Wir werden die folgende Bezeichnungen einführen.

$$G_s = (a_1) \times (a_2) \times \ldots \times (a_s)$$

$$\bar{H}_1 = (a_1^{\mu_1} \cdot a_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot a_s^{\mu_s})$$

$$G_t = (a_1) \times (a_2) \times \ldots \times (a_t)$$

$$\bar{H}_2 = (a_1^{\bar{\mu}_1} \cdot a_2^{\bar{\mu}_2} \cdot \ldots \cdot a_t^{\bar{\mu}_t}).$$

Zuerst es wird gezeigt, daß $s=t$ ist. Nehmen wir an, daß $s<t$.
Da H_1 und H_2 homogene Untergruppen sind, gelten

(1) $$\alpha_{s+1} - \beta_{s+1} = \alpha_{s+2} - \beta_{s+2} = \ldots = \alpha_{s+k} - \beta_{s+k} = d$$

(2) $$\alpha_{t+1} - \beta_{t+1} = \alpha_{t+2} - \beta_{t+2} = \ldots = \alpha_{t+k} - \beta_{r+k} = d.$$

Es seien

M_1=die Menge der Invarianten von $G_s/\bar{H}_1$.

$$M_2 = \{p^{\alpha_{s+i}-d},\ i = 1, \ldots, k,\ p^{\alpha_{s+k+l}},\ l = 1, \ldots, t-s\}$$

$$M_3 = \{p^{\alpha_{t+k+i}},\ i = 1, \ldots, n-(t+k)\}$$

Dann die Menge der Invarianten von G/H_1 ist $M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Es seien

L_1=die Menge der Invarianten von $G_t/\bar{H}_2$.

$$L_2 = \{p^{\alpha_{t+i}-d},\ i = 1, \ldots, k\}$$

$$L_3 = \{p^{\alpha_{t+k+i}},\ i = 1, \ldots, n-(t+k)\}.$$

Dann die Menge der Invarianten von G/H_2 ist $L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Da $M_3 = L_3$ gilt ist $M_1 \cup M_2 = L_1 \cup L_2$ erfüllt. Betrachten wir das Element $p^{\alpha_{t+k}}, p^{\alpha_{t+k}} \in M_2$, so $p^{\alpha_{t+k}} \in L_1 \cup L_2$ folgt. Wenn $p^{\alpha_{t+k}} \in L_1$, dann $p^{\alpha_{t+k}} \leqq p^{\alpha_t}$ folgt. Wenn $p^{\alpha_{t+k}} \in L_2$, dann $p^{\alpha_{t+k}} \leqq p^{\alpha_{t+k}-d}$ folgt und das ist ein Widerspruch zur Bedingung $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ So wir haben gezeigt, daß $s=t$ ist. Daraus folgt, daß $G_s/\bar{H}_1$ und $G_s/\bar{H}_2$ gleiche Invarianten besitzen. Anhand von dem Satz von Buzási [1] es existiert ein Automorphismus $\varphi\colon G_s \to G_s$ wobei $\varphi(\bar{H}_1) = \bar{H}_2$. Betrachten wir den folgenden Automorphismus $\varphi^*\colon G \to G$,

$$\varphi^*(a_i) = \varphi(a_i) \quad i = 1, \ldots, s$$

$$\varphi^*(a_i) = a_i \quad i = s+1, \ldots, n.$$

Bei diesem Automorphismus gilt $\varphi(H_1) = H_2$, also (G, H_1) und (G, H_2) isomorph sind.

1. Definition. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe, und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Das Paar (G, H) heißt zerlegbar wenn eine direkte Zerlegung von G und H existiert, wobei

$$G = G_1 \times G_2 \quad G_1 \neq \{1\},\ G_2 \neq \{1\}$$
$$H = H_1 \times H_2$$

und $H_1 \subseteq G_1$, $H_2 \subseteq G_2$ gelten. Im Gegenteil das Paar (G, H) heißt unzerlegbar. In der Arbeit (1) K. Buzási gab eine explicite Formel zur Invarianten von G/H, wenn G eine endliche abelsche p-Gruppe und H eine zyklische Untergruppe in G ist, ferner wenn das Paar (G, H) unzerlegbar ist.

2. Satz. *Es existiert eine endliche abelsche p-Gruppe G und H_1, H_2 homogene Untergruppen in G, welche die Bedingungen* (a) *und* (b) *erfüllen, ferner H_1 und H_2 besitzen genau einen solchen direkten Faktor der nicht durch die Potenz der Basiselemente von G generiert wird, aber (G, H_1) und (G, H_2) sind keine isomorphe Paare.*

Beweis. Betrachten wir das folgenden Beispiel: Es sei

$$G = (a_1)\times(a_2)\times(a_3)\times(a_4)\times(a_5) \quad a_i^{p^{\alpha_i}} = 1 \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 11, \quad \alpha_3 = 18, \quad \alpha_4 = 22, \quad \alpha_5 = 27.$$

Es seien

$$H_1 = (a_1^{p^4} \cdot a_2^{p^5} \cdot a_3^{p^9} \cdot a_5^{p^{15}}) \times (a_4^{p^{10}})$$
$$H_2 = (a_1^{p^4} \cdot a_2^{p^9} \cdot a_4^{p^{13}} \cdot a_5^{p^{15}}) \times (a_3^{p^6})$$

Dann

$$H_1 = C(p^{12}) \times C(p^{12}),$$

und

$$H_2 = C(p^{12}) \times C(p^{12}).$$

Also H_1 und H_2 sind homogene und isomorphe Untergruppen.

Wir werden die folgende Bezeichnungen einführen.

$$G' = (a_1)\times(a_2)\times(a_3)\times(a_5)$$
$$\overline{H}_1 = (a_1^{p^4} \cdot a_2^{p^5} \cdot a_3^{p^9} \cdot a_5^{p^{15}})$$
$$G'' = (a_1)\times(a_2)\times(a_4)\times(a_5)$$
$$\overline{H}_2 = (a_1^{p^4} \cdot a_2^{p^9} \cdot a_4^{p^{13}} \cdot v_5^{p^{15}}).$$

Man kann leicht prüfen, daß $(G', \overline{H}_1)$ und $(G'', \overline{H}_2)$ unzerlegbare Paare sind. So können wir die Ergebnisse von Buzási [1] anwenden, nach seiner Formel die Invarianten von $G'/\overline{H}_1$ sind:

$$p^4, p^6, p^{15}, p^{24}.$$

Die Invarianten von $G''/\overline{H}_1$ sind: $p^4, p^{10}, p^{15}, p^{24}$. So die Invarianten von G/H_1 und G/H_2 sind gleiche

$$p^4, p^6, p^{10}, p^{15}, p^{24}.$$

also G/H_1 und G/H_2 sind isomorph. Nehmen wir an, daß ein Automorphismus

$\varphi\colon G\to G$ existiert wobei $\varphi(H_1)=H_2$ gilt. Dann ist $a_4^{p^{10}}\in H_1$ und $\varphi(a_4^{p^{10}})\in H_2$. Also existieren solche natürlichen Zahlen k, l, mit

$$\varphi(a_4^{p^{10}}) = (a_1^{p^4}\cdot a_2^{p^9}\cdot a_4^{p^{13}}\cdot a_5^{p^{15}})^k\cdot(a_3^{p^6})^l. \tag{3}$$

Weil $\operatorname{ord}\varphi(a_4^{p^{10}})=\operatorname{ord} a_4^{p^{10}}=12$ ist, $(k,p)=1$ oder $(l,p)=1$ gilt.

Es sei

$$\varphi(a_4) = a_1^{x_1}\cdot a_2^{x_2}\cdot a_3^{x_3}\cdot a_4^{x_4}\cdot a_5^{x_5}.$$

Dann gilt

$$\varphi(a_4^{p^{10}}) = a_1^{x_1\cdot p^{10}}\cdot a_2^{x_2\cdot p^{10}}\cdot a_3^{x_3\cdot p^{10}}\cdot a_4^{x_4 p^{10}}\cdot a_5^{x_5\cdot p^{10}}. \tag{4}$$

Die direkten Faktoren von $\varphi(a_4^{p^{10}})$ sind eindeutig bestimmt, deshalb aus (3) und (4) folgen

$$x_1 p^{10}\equiv k\cdot p^4\,(mod\,p^5) \tag{5}$$

und

$$x_3 p^{10}\equiv l p^6\,(mod\,p^{18}) \tag{6}$$

Aus (5) folgert man, daß

$$p^5\,|\,p^4(x_1\cdot p-k),\quad \text{daher}\quad p\,|\,x_1\cdot p-k$$

also $(p,k)\neq 1$.

Aus (4) folgt, daß

$$p^{18}\,|\,p^6(x_3p^4-l),\quad p\,|\,x_3p^4-l$$

gelten also $(p,l)\neq 1$.

Es ist ein Widerspruch zur Bedingung $(p,k)=1$, oder $(p,l)=1$. Also existiert ein Automorphismus $\varphi\colon G\to G$ mit $\varphi(H_1)=H_2$, (H,G_1) *und* (G,H_2) *sind keine isomorphen Paare.*

Literaturverzeichnis

[1] К. Бузаши, Об инвариантах пар конечных абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1984), 317—326.

[2] К. Бузаши, Об изоморфизме пар бесконечных абелевых групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982) 139—154.

[3] E. Szabó, Über isomorphe Paare endlicher abelscher Gruppen. *Publ. Math. (Debrecen).*

(Eingegangen am 3. Januar 1986.)