Примитивные системы подмножеств конечного множества

Т. Я. БЕРКОВИЧ, Я. Г. БЕРКОВИЧ

Вводимые ниже обозначения используются на протяжении всей статьи.

Пусть s — натуральное число, $n=2s+\varepsilon$, $\varepsilon\in\{0, 1\}$, $\mathfrak{M}$ — множество из n элементов. Два множества назовем инцидентными, если одно из них содержится в другом, и неинцидентными — в противном случае. Система Σ подмножеств множества $\mathfrak{M}$ называется примитивной, если любые два различных элемента этой системы неинцидентны. Система Σ называется максимальной примитивной системой, если она не является собственной подсистемой некоторой примитивной системы подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Далее рассматриваются только системы подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Приведем пример максимальной примитивной системы. Пусть $k\leqq n$ — натуральное число, $\mathfrak{M}^k$ — множество всех k-элементных подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}^k$ — максимальная примитивная система, содержащая C_n^k элементов, где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Пусть $\mu(n)$ — максимум длин примитивных систем подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Э. Шпернер [1] показал, что $\mu(n)=C_n^s$ и примитивная система длины $\mu(n)$ совпадает с $\mathfrak{M}^s$ или $\mathfrak{M}^{s+\varepsilon}$.

Цель этой заметки — доказать усиление теоремы Шпернера.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\Sigma_1=\{A_1, \dots, A_t\}$, $\Sigma_2=\{B_1, \dots, B_r\}$ — две конечные системы множеств (не обязательно предполагать, что эти множества конечные). Через $i(\Sigma_1, \Sigma_2)$ обозначим число пар инциденций $B_k\subseteqq A_J$, где $A_J\in\Sigma_1$, $B_k\in\Sigma_2$. Вычислим число $i(\Sigma_1, \Sigma_2)$ двумя способами. Пусть A_J содержит точно α_J элементов системы Σ_2, а B_k содержится точно в β_k элементах системы Σ_1. Тогда, очевидно, имеем

$$\alpha_1+\dots+\alpha_t = i(\textstyle\sum_1, \sum_2) = \beta_1+\dots+\beta_r \tag{1}$$

Мы применим равенство (1) и случаю, когда

$$\textstyle\sum_1 = \{A_1, \dots, A_t\} \subseteqq \mathfrak{M}^k,$$

где натуральное число $k\in\{s+1, \dots, n\}$, а

$$\textstyle\sum_2 = \{B_1, \dots, B_r\} = A_1^{k-1}\cup\dots\cup A_t^{k-1}$$

(здесь A_i^{k-1} — множество всех $(k-1)$-элементных подмножеств множества A_i). В этих обозначениях справедлива такая

Теорема. *Всегда* $r\leqq t$. *Если* $r=t$, *то* $\Sigma_1=\mathfrak{M}^{s+1}$ *и* $\varepsilon=1$, $k=s+1$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1). Так как $|A_J^{k-1}|=k$, то $\alpha_J=k$ для всех $J\in\overline{1,t}$. Поэтому равенство (1) в нашей ситуации принимает вид

$$tk=\beta_1+\ldots+\beta_r \tag{2}$$

Каждое множество $B_m\in\Sigma_2$ лежит ровно в $n-(k-1)=n-k+1$ элементах множества $\mathfrak{M}^k$. Поэтому все

$$\beta_m\leqq n-k+1\leqq 2s+\varepsilon-(s+1)+1=s+\varepsilon,$$

так что из (2) получается

$$t(s+1)\leqq tk\leqq r(s+\varepsilon) \tag{3}$$

откуда $r\geqq t(s+1)/(s+\varepsilon)\geqq t$, так как $\varepsilon\in\{0,1\}$.

Пусть теперь $r=t$. Тогда (2) принимает вид

$$tk=\beta_1+\ldots+\beta_t \tag{4}$$

Каждое из t слагаемых справа в (4) не превосходят $s+\varepsilon\leqq s+1\leqq k$; поэтому из (4) следует $\beta_J=k\leqq s+\varepsilon$ для всех $J\in\overline{1,r}$, и окончательно $\varepsilon=1$, $k=s+1$, и, следовательно, все $\beta_J=s+1$. Покажем, что в этом случае $\Sigma_1=\mathfrak{M}^{s+1}$, что и завершит доказательство.

Предположим, что $\Sigma_1\neq\mathfrak{M}^{s+1}$. Тогда в $\mathfrak{M}^{s+1}-\Sigma_1$ имеется элемент M. Пусть для определенности $D=M\cap A_1$ таково, что

$$|D|=\max\{|M\cap A_i|\,\big|\,i\in\overline{1,t}\}.$$

Так как $|D|\leqq s$, то $D\subseteqq D_1\in A_1^s$. Пусть $M_1,\ldots,M_{s+1}$ — все те элементы множества $\mathfrak{M}^{s+1}$, которые содержат D_1. Покажем, что

$$M_1,\ldots,M_{s+1}\in\textstyle\sum_1.$$

Предположим, что это не так. Очевидно, $D_1=B_J$ для некоторого $J\in\overline{1,t}=\overline{1,r}$. Тогда по предположению $\beta_J<s+1$, что противоречит доказанному выше равенству $\beta_J=s+1$ для всех J. Итак, $M_1,\ldots,M_{s+1}\in\Sigma_1$.

Предположим, что $|D|<s$. Возьмем $x\in M-D$. Тогда $|D\cup\{x\}|\leqq s$. Так как $M_1\cup\ldots\cup M_{s+1}=\mathfrak{M}$, то существует $i\in\overline{1,s+1}$ такое, что $D\cup\{x\}\subset M_i$. Но тогда

$$|D|=|M\cap A_1|<|D\cup\{x\}|\leqq|M\cap M_i|.$$

По доказанному выше $M_i\in\Sigma_1$, так что последнее неравенство противоречит выбору D. Итак, $|D|=s$.

Тогда $M\in\{M_1,\ldots,M_{s+1}\}\subseteqq\Sigma_1$, что противоречит предположению об M. Итак, $\Sigma_1\supseteqq\mathfrak{M}^{s+1}$. Так как $\mathfrak{M}^{s+1}$ — максимальная примитивная система, то $\sum_1=\mathfrak{M}^{s+1}$, и теорема доказана.

Из теоремы в качестве простого следствия выведем сформулированную в начале заметки теорему Шпернера.

Введем дополнительные обозначения. Если Σ — система подмножеств множества $\mathfrak{M}$, то положим $\Sigma'=\{\mathfrak{M}-A|A\in\Sigma\}$. Пусть, далее, $m(\Sigma)=$

$=\max\{|A| \mid A\in\Sigma\}$. Очевидно,

(5) $$m(\Sigma)+m(\Sigma')\geqq|\mathfrak{M}|=n$$

при этом в (5) стоит знак равенства тогда и только тогда, когда $\Sigma=\mathfrak{M}^{m(\Sigma)}$ (так что $\Sigma'=\mathfrak{M}^{m(\Sigma')}$).

Следствие *(Шпернер* [1]*). Если Σ — примитивная система длины $\mu(n)$, то $\Sigma=\mathfrak{M}^s$ или $\mathfrak{M}^{s+1}$.*

Доказательство. Очевидно, $|\Sigma|=|\Sigma'|$. Поэтому в случае необходимости Σ можно заменить на Σ'. Если $m(\Sigma)\leqq s$, $m(\Sigma')\leqq s$, то из (5) следует, что $m(\Sigma)=m(\Sigma')$ и $\Sigma=\mathfrak{M}^s$. Поэтому можем считать, не уменьшая общности, что $m(\Sigma)>s$. Для упрощения обозначений положим $m(\Sigma)=k$.

Пусть
$$\Sigma_k=\{A\in\Sigma \mid |A|=k\},\quad \Sigma_0=\bigcup_{A\in\Sigma_k}A^{k-1},$$
$$\Sigma_{00}=(\Sigma-\Sigma_k)\cup\Sigma_0.$$

Так как система Σ примитивна, то, благодаря определению k, примитивной будет также и система Σ_{00}. По условию $|\Sigma_{00}|)\leqq|\Sigma|$. По теореме $|\Sigma_0|\geqq|\Sigma_k|$. Поэтому $|\Sigma_{00}|\geqq|\Sigma|$, так что $|\Sigma_{00}|=|\Sigma|$. Но тогда $|\Sigma_k|=|\Sigma_0|$, так что по теореме $\Sigma_k=\mathfrak{M}^{s+1}$. Так как $\Sigma\supseteqq\Sigma_k=\mathfrak{M}^{s+1}$ и $\mathfrak{M}^{s+1}$ — максимальная примитивная система, окончательно получаем $\Sigma=\mathfrak{M}^{s+1}$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mu_1(n)=\mu(n)$, и предположим, что уже определены числа $\mu_1(n),\ldots,\mu_i(n)$. Тогда полагаем $\mu_{i+1}(n)=\max\{|\Sigma| \mid \Sigma$ — максимальная примитивная система длины, меньшей $\mu_i(n)\}$.

Задача вычисления чисел $\mu_i(n)$ и характеризации максимальных примитивных систем длины $\mu_i(n)$ имеет важное значение для комбинаторики в связи с широкой применимостью теорем типа Шпернера.

Оценим $\mu_2(n)$. Пусть $A_1\in\mathfrak{M}^{s+1}$. Образуем систему Σ, содержащую A_1 и все те элементы множества $\mathfrak{M}^s$, которые не содержатся во множестве A_1^s. Тогда $|\Sigma|=C_n^s-s=\mu_1(n)-s$. Итак, $\mu_2(n)\geqq C_n^s-s=\mu_1(n)-s$.

Положим для системы

$$\Sigma\colon\ m(\Sigma)=\max\{|A| \mid A\in\Sigma\},$$

$$d(\Sigma)=\min\{|A| \mid A\in\Sigma\}.$$

Далее отметим, что для биномиальных коэффициентов справедливы такие неравенства

(6) $$s>1\Rightarrow C_{2s+1}^{s+1}-C_{2s+1}^{s+2}>s$$

(7) $$s>2\Rightarrow C_{2s}^{s}-C_{2s}^{s+1}>s$$

Следствие 2. *Пусть Σ — максимальная примитивная система с $|\Sigma|=\mu_2(n)$, $n>4$. Тогда $\Sigma\neq\mathfrak{M}^k$ для всех натуральных k и справедливо одно из* *утверждений:*

(i) $\sum \subset \mathfrak{M}^{s-1} \cup \mathfrak{M}^{s}, \quad \varepsilon = 0.$

(ii) $\sum \subset \mathfrak{M}^{s} \cup \mathfrak{M}^{s+1}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}.$

(iii) $\sum \subset \mathfrak{M}^{s+1} \cup \mathfrak{M}^{s+2}, \quad \varepsilon = 1.$

Доказательство. По предположению и теореме Шпернера по крайней мере одно из чисел $m = m(\Sigma)$ и $d = d(\Sigma)$ отлично от $s+\varepsilon$. Заменяя, если нужно, Σ на Σ', можем, не уменьшая общности, считать, что $m > s$ и $m = \max\{m(\Sigma), m(\Sigma')\}$. Положим $\Sigma_m = \{A \in \Sigma \mid |A| = m\}$, $\Sigma_0 = \bigcup_{A \in \Sigma_m} A^{m-1}$, $\Sigma_{00} = (\Sigma - \Sigma_m) \cup \Sigma_0$. Отметим, что Σ_{00} — максимальная примитивная система.

Предположим, что $m > s+1+\varepsilon$. Тогда по теореме $|\Sigma_0| > |\Sigma_m|$, так что $\mu_2(n) = |\Sigma| < |\Sigma_{00}| < \mu_1(n)$ (последнее неравенство — по теореме Шпернера), а это противоречит определению чисел $\mu_1(n)$; $\mu_2(n)$. Итак, $m \leqq s+1+\varepsilon$. По предположению, $m \geqq s+1$. По той же причине $m-d \leqq 1$.

Пусть $m = s+2$. Тогда по сказанному $\varepsilon = 1$, и из неравенства (6) следует $m \neq d$ (очевидно, в этом случае $s > 1$). Это дает случай (iii). Случай (i) двойствен только что рассмотренному.

Пусть $m = s+1$. Если $d = m$, то по теореме Шпернера $\varepsilon = 0$, и неравенство (7) приводит к противоречию. Итак, $d = s$, и мы получаем случай (ii). Следствие доказано.

В общем случае, если Σ — максимальная примитивная система длины $\mu_{i+1}(n)$, то $m(\Sigma) \leqq d(\Sigma) + i$.

Следствие 2 не решает задачи характеризации максимальных примитивных систем длины $\mu_2(n)$. Неясно, для каких n могут реализавываться случаи (i) и (ii) этого следствия.

Отметим такое свойство примитивной системы Σ_1. Оказывается, Σ_1 можно дополнить до максимальной примитивной системы $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \mathfrak{M}^{d(\Sigma)} \cup \mathfrak{M}^{m(\Sigma)}$ (но, в общем случае, ни одно из двух последних слагаемых справа отбросить нельзя). Далее, если Σ — максимальная примитивная система, то $\bigcup_{A \in \Sigma} A^{d(\Sigma)} = \mathfrak{M}^{d(\Sigma)}$. Для этой же Σ, если $\Sigma_m = \{A \in \Sigma \mid |A| = m\}$, то, как уже отмечалось, $(\Sigma - \Sigma_m) \cup (\bigcup_{A \in \Sigma_m} A^{m(\Sigma)-1})$ — максимальная примитивная система.

Другое доказательство теоремы Шпернера имеется в книге [2]. Там же приведена общирная библиография, посвященная этой тематике.

Литература

[1] Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928), 544—548.
[2] М. Айгнер, Комбинаторная теория, *Москва, Мир,* 1982.

344 006. РОСТОВ-ИА-ДОНУ. ЭНГЕЛЬСА 111. кв. 18
БЕРКОВИЧ ТАТЬЯНА ЯКОВЛЕВНА, БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ

Поступило: 11. IV. 1986 г.)