О реализации скрещенных алгебр* в групповых алгебрах над конечными полями

К. БУЗАШИ—З. АБД ЭЛ МОНЕИМ (Дебрецен)

Раасматриваются группы G, содержащие бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Пусть K — поле с некоторым ограничением на характеристику. В работе [1] было показано, что групповая алгебра KG разлагается в прямую сумму полных матричных колец над так называемыми алгебрами типа E над полем K: скрещенными произведениями некоторого тела F, содержащего в своем центре поле K, либо с бесконечной циклической группой (a), либо с бесконечной группой диэдра $\mathcal{D}$. Было показано, что изучение конечнопорожденных KG-модулей сводится к изучению таких алгебр типа E над полем K. В работе [2] были описаны все алгебры типа E над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, а в работе [3] — алгебры типа E над произвольным конечным полем K по отношению к любому конечному расширению F поля K.

Естественно поставить вопрос, все ли алгебры типа E над данным полем K требуются при разложении конечнопорожденных KG-модулей на неразложимые прямые слагаемые. В работе [4] было показано, что все вещественные алгебры типа E реализуются в групповых алгебрах групп рассматриваемого класса над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел, то есть для любой фиксированной вещественной алгебры типа E существует такаяа группа G рассматриваемого класса, вещественная групповая алгебра которой содержит минимальный идеал, который как $\mathbf{R}$-алгебра изоморфен данной алгебре типа E.

В настоящей работе доказывается, что каждая алгебра типа E над конечным полем K по отношению к любому конечному его расширению F реализуется в групповых алгебрах над полем K.

Для однозначности выпишем все алгебры типа E над полем K по отношению к полю F (см. [3]):

Лемма 1. *Пусть K — конечное поле порядка $|K|=p^m$, $p\neq 2$, F — расширение конечной степени $(F\colon K)=n$ поля K. Если n — нечетное число, то все алгебры типа E над полем K по отношению к полю F задаются соотношениями:*

$$E_i = \{F, a\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^{im}} a \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

* Исследования финансирована Венгерским национальным Фондом Научных Исследований кредита № 1813.

где E_0 — *групповая алгебра бесконечной циклической группы* (a) *над полем* F, *а* E_i $(i=1, 2, \dots, n-1)$ — *скрещенные групповые алгебры группы* (a) *над* F,

$$A_1 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_2 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = b\lambda; \quad b^{-1}ab = \xi a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_3 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = \xi,$$

где $\lambda \in F$, ξ — *фиксированный квадратный невычет в поле* F. A_1 — *групповая алгебра бесконечной группы диэдра* $\mathcal{D}$ *над полем* F, *а* A_2, A_3 — *скрещенные групповые алгебры группы* $\mathcal{D}$ *над* F.

Если $n=2k$, *то кроме алгебр* E_i $(i=0, 1, \dots, n-1)$, A_1, A_2, и A_3 *имеются еще три типа алгебр типа* E *над полем* K. *Они являются скрещеными групповыми алгебрами группы* $\mathcal{D}$ *над полем* F *и задаются соотношениями:*

$$A_4 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda a; \quad b\lambda = \lambda^{p^{km}} b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_5 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^{km}} a; \quad b\lambda = \lambda b; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

$$A_6 = \{F, a, b\}; \quad a\lambda = \lambda^{p^{km}} a; \quad b\lambda = \lambda^{p^{km}} b; \quad b^{-1}ab = \xi a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

где $\lambda \in F$, ξ — *фиксированный квадратный невычет в поле* F.

В дальнейшем K и F будут означать поля, заданные в лемме 1, F^* — мультипликативную группу поля F.

Лемма 2. *Поле* F *изоморфно идеалу* KF^*e *групповой алгебры* KF^*, *порожденного идемпотентом*

$$e = \frac{1}{|F^*|} \sum_{c \in F^*} \chi_{F|K}(c^{-1}) c \in KF^*. \tag{1}$$

Доказательство очевидно, так как отображение $c \to ce$ $(c \in F)$ реализует искомый изоморфизм.

Лемма 3. *Пусть* H*-произвольная группа и*

$$H_1 = F^* \times H$$

прямое произведение группы F^* *и группы* H. *Тогда групповая алгебра* FH *как* K*-алгебра изоморфна идеалу групповой алгебры* KH_1, *порожденному идемпотентом* (1).

Доказательство. Согласно лемме 2, идеал KF^*e изоморфен полю F. Тогда каждый элемент x групповой алгебры KH_1 представляется в виде

$$x = \sum_j \lambda_j' h_j \quad (\lambda_j' \in KF^* e, h_j \in H).$$

Отображение

$$\sum_j \lambda_j' h_j \to \sum_j \lambda_j h_j,$$

где $\lambda_j \in F$ — образ элемента $\lambda_j' \in KF^*e$ при изоморфизме $KF^*e \cong F$, очевидно, является K — изоморфизмом K — алгебр KH_1 и FH. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для алгебр E_0 и A_1 существуют такие группы G_0 и G_1, что алгебры E_0 и A_1 соответственно K — изоморфны некоторым идеалам групповых алгебр соответственно KG_0 и KG_1.*

Доказательство. Пусть

$$G_0 = (c)\times(a); \quad G_1 = (c)\times\mathscr{D},$$

где $F^*=(c)$, (a) — бесконечная циклическая группа, а $\mathscr{D}$ — бесконечная группа диэдра.

Пусть идемпотент e задан формулой (1). Согласно лемме 3, групповая алгебра $E_0=F(a)$ как K — алгебра K — изоморфна идеалу KG_0e групповой алгебры KG_0. Используя ту же лемму 3, заключаем, что групповая алгебра $A_1=F\mathscr{D}$ как K — алгебра изомофна идеалу KG_1e групповой алгебры KG_1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть дана алгебра E_i $(i=1, \dots, n-1)$ и группа*

$$G_i = (c)\cdot(a); \quad a^{-1}ca = c^{p^m},$$

где $(c)=F^*$ и (a) — бесконечная циклическая группа. Тогда идеал KG_ie групповой алгебры KG_i, порожденный идемпотентом e, заданным формулой (1), как K — алгебра K — изоморфен алгебре E_i.

Доказательство. Согласно лемме 2, φ: $KF^*e\to F$ — изоморфизм. Для любого фиксированного i $(i=1, \dots, n-1)$ каждый элемент идеала KG_ie записуется в виде

$$\sum_j \alpha_j a^j \quad (\alpha_j\in KF^*e).$$

Тогда отображение

$$\psi\colon \sum_j \alpha_j a^j \to \sum_j \varphi(\alpha_j)a^j$$

является K — изоморфизмом K — алгебр KG_ie и E_i. Действительно, отображение ψ взаимно однозначно отображает KG_ie на всю алгебру E_i. Очевидно, оно выдерживает сложение и умножение на элементы поля F. Покажем, что в алгебре KG_ie выполняются соотношения алгебры E_i. Так как

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(e) = 1; \quad \psi(ce)\in F,$$

то

$$(ae)^{-1}(ce)(ae) = (a^{-1}ca)e = c^{p^{im}}e = (ce)^{p^{im}}.$$

Отсюда легко получается, что ψ выдерживает умножение, значит является изоморфизмом. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для алгебры A_2 (соответственно A_3) существует такая группа G_2 (соответственно G_3), что алгебра A_2 (A_3) как K — алгебра K — изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры KG_2 (KG_3).*

Доказательство. Пусть $H=F^*x(a)$ — прямое произведение группы $F^*=(c)$ и бесконечной циклической группы (a). Рассмотрим группы

$$G_2 = H\cdot(b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^{-1}; \quad bc = cb,$$

$$G_3 = H\cdot(b); \quad b^{2s} = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb\colon \quad b^2 = c^{-1}; \quad s = p^{n\cdot m}-1,$$

и идемпотент e, заданный формулой (1). Так как, с точностью до изоморфизма, алгебры A_2 и A_3 не зависят от выбора элемента ξ, то мы предполагаем, что $ce=\xi^{-1}e$ в этих алгебрах.

Сначала покажем, что идеал KG_2e как K — алгебра K — изоморфен алгебре A_2. Согласно лемме 2, φ: $KF^*e\cong F$. Элементы идеала KG_2e представляются в виде

$$\sum_j \alpha_j a^j b^{\delta_j} \quad (\alpha_j\in KF^*e;\ \delta_j = 0,1).$$

Рассмотрим отображение

$$\psi\colon \sum_j \alpha_j a^j b^{\delta_j} \to \sum_j \alpha'_j a^j b^{\delta_j}, \tag{2}$$

где $\alpha'_j=\varphi(\alpha_j)\in F$. Очевидно, ψ взаимно однозначно отображает идеал KG_2e на всю алгебру A_2. Ясно, что ψ выдерживает сложение и умножение на элементы из поля K. Покажем, что в алгебре KG_2e выполняются те же соотношения, что и в алгебре A_2, и из этого будет следовать, что ψ выдерживает умножение. Так как

$$\psi(e) = 1; \quad \psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b; \quad \psi(ce) = \xi^{-1},$$

то имеем

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (b^{-1}ab)e = a^{-1}c^{-1}e = a^{-1}\xi e = (\xi e)(ae)^{-1}.$$

Значит ψ — K — изоморфизм K — алгебр KG_2e и A_2.

Покажем теперь, что K — алгебры KG_3e и A_3 также K — изоморфны и их изоморфизм осуществляется отображением (2). Очевидно, для этого достаточно показать, что в алгебре KG_3e выполняются соотношения алгебры A. Так как $ce=\xi^{-1}e$, $b^2=c^{-1}$, то

$$(be)^2 = b^2e = c^{-1}e = \xi e,$$

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (b^{-1}ab)e = a^{-1}e = (ae)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть дана алгебра A_4 (см. лемму 1), группа*

$$H = (a)\times F^*$$

прямое произведение группы $F^*=(c)$ а бесконечной циклической подгруппой (a), и задано полупрямое произведение

$$G_4 = H\cdot(b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{p^{km}},$$

где $n=2k$. *Тогда идеал групповой алгебры* KG_4, *порожденный идемпотентом* $e=e_1+e_2$,

$$(3)\qquad e_1=\frac{1}{|F^*|}\sum_{c\in F^*}\chi_{F|K}(c^{-1})\cdot c,\qquad e_2=\frac{1}{|F^*|}\sum_{c\in F^*}\chi_{F|K}(c^{-1})\cdot c^{km},$$

как K — *алгебра* K — *изоморфен алгебре* A_4.

Доказательство. Пусть элемент ξ выбран так в A_4, что $ce_1=\xi^{-1}e_1$. Так как $b^{-1}e_1b=e_2$, $b^{-1}e_2b=e_1$, то идеал KF^*e является полем, изоморфным полю F.

Тогда мы можем пользоваться отображением, заданным формулой (2). Покажем, что ψ определяет K — изоморфизм K — алгебр KG_4e и A_4. Для этого достаточно показать, что соотношения, определяющие A_4, выполняются также в алгебре KG_4e. Так как

$$\psi(ae)=a;\quad \psi(be)=b;\quad \psi(ce)=\xi^{-1}\in F,$$

то

$$(ae)(ce)=(ce)(ae)$$

$$(be)^{-1}(ce)(be)=(b^{-1}cb)e=c^{p^{km}}e=(ce)^{p^{km}},$$

$$(be)^{-1}(ae)(be)=(b^{-1}ab)e=a^{-1}e=(ae)^{-1},$$

$$(be)^2=b^2e=e.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Для алгебры* A_i $(i=5, 6)$ *существует такая группа* G_i, *что* A_i *как* K — *алгебра* K — *изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры* KG_i.

Доказательство. Пусть

$$H=(c)\cdot(a);\quad a^{-1}ca=c^{p^{km}}$$

полупрямое произведение группы $F^*=(c)$ с бесконечной циклической группой (a). Задаем группы

$$G_5=H\cdot(b);\quad b^2=1;\quad bc=cb;\quad b^{-1}ab=a^{-1},$$

$$G_6=H\cdot(b);\quad b^2=1;\quad b^{-1}cb=c^{p^{km}};\quad b^{-1}ab=c^{-1}a^{-1}.$$

Рассмотрим идемпотент $e=e_1+e_2$, где идемпотенты e_1 и e_2 заданы формулами (3). Так как $a^{-1}e_1a=e_2$, $a^{-1}e_2a=e_1$, а в идеале KG_6e также $b^{-1}e_1b=e_2$, $b^{-1}e_2b=e_1$, то идеал $K(c)e$ является полем, изоморфным полю F. Поэтому можем пользоваться отображением ψ, заданным формулой (2), для установления K — изоморфизмов

$$KG_5e\to A_5\quad \text{и}\quad KG_6e\to A_6.$$

Так как в обоих случаях

$$\psi(ae)=a;\quad \psi(be)=b;\quad \psi(e)=1;\quad \psi(ce)=\xi^{-1},$$

то, в случае идеала KG_5e имеем

$$(ae)^{-1}(ce)(ae) = (a^{-1}ca)e = c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}},$$
$$(be)(ce) = (ce)(be),$$
$$(be)^{-1}(ae)(be) = (b^{-1}ab)e = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$
$$(be)^2 = b^2e = e,$$

а в случае идеала KG_6e:

$$(ae)^{-1}(ce)(ae) = c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}},$$
$$(be)^{-1}(ce)(be) = c^{p^{km}}e = (ce)^{p^{km}},$$
$$(be)^{-1}(ae)(be) = c^{-1}a^{-1}e = (\xi e)(ae)^{-1},$$
$$(be)^2 = e,$$

так как в случае $e=e_1+e_2$ имеет место равенство $c^{-1}e=\xi e$. Отсюда в обоих случаях следует K — изоморфизм соответствующих K — алгебр. Теорема доказана.

Литература

[1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica,* **16** (1981), 455—470.

[2] С. Д. Берман—К. Бузащи, Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 133—144.

[3] К. Бузаши—Т. Краус, Описание скрещенных групповых алгебр над конечными полями. *Acta Sci. Math.* (Появляется).

[4] К. Бузаши, О вещественных групповых алгебрах групп с бесконечной циклической подгруппой конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **32** (1985), 267—276.

[5] Ч. Кертис—. И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. *Изд. Наука,* 1969.

[6] A. A. Albert, Structure of algebras. *Amer. Math. Soc.,* 1939.

(Поступило 25. III. 1986 г.)