Аналог теоремы Лагранжа для локально циклических модулей над кольцом нормирования

К. БУЗАШИ (Дебрецен) и Н. И. ВИШНЯКОВА (Харьков)

К пятидесятилетнему юбилею профессора Золтана Дароци

Кольцом нормирования называется ненулевое коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь.

В дальнейшем буква R везде обозначает кольцо нормирования, а V — его максимальный идеал.

Ненулевой R-модуль M назовем локально циклическим, если любой его конечно порожденный подмодуль цикличен.

В настоящей работе доказывается теорема, являющаяся аналогом теоремы Лагранжа для конечных групп. Формулировка теоремы опубликована в [1].

В дальнейшем будем пользоваться следующими определениями и обозначениями:

Будем говорить, что ненулевые идеалы $I, J \subset R$ принадлежат к одному классу, если существуют такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$.

Легко видеть, что множество всех ненулевых идеалов кольца R распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образует класс. Введем дополнительное соглашение, что нулевой идеал образует также класс идеалов, если R — целостное кольцо. Если R — нецелостное кольцо, то ненулевые аннуляторы его элементов принадлежат к одному классу. Условимся считать, что идеал 0 также лежит в этом классе.

Стабилизатором идеала $I \neq 0$ кольца R (обозначение: $S(I)$) будем называть совокупность всех элементов $a \in R$, для которых $aI = I$. Очевидно, $S(I)$ — подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R, причем $0 \notin S(I)$.

Пусть P — простой идеал кольца R. Идеал $I \subset R, I \neq 0$ назовем P-чистым, если $S(I) \supseteq S(P)$. В [2] доказано, что это эквивалентно условию $aI = I$ для всех $a \notin P$. Ясно, что каждый P-чистый идеал I содержится в идеале P. Если $a \in P$, $a \neq 0$, то P-главным идеалом, порожденным элементом a (обозначение: $(a)_P$) будем называть объединение всех главных идеалов $\tau^{-1}(a)$, где τ пробегает все элементы из $S(P) = R \setminus P$. Очевидно, идеал $(a)_P$ является пересечением всех P-чистых идеалов, содержащих элемент a, а каждый P-чистый идеал есть объединение P-главных идеалов.

Каждый ненулевой идеал I кольца R и любой фактор-модуль I/J (I, J — идеалы R, $I \supset J$) локально циклические модули над R.

Легко видеть, что R-модуль M локально цикличен тогда и только тогда, когда M можно представить в виде объединения циклических подмодулей $M=\bigcup\limits_{\alpha}(x_\alpha)$, где индекс α пробегает некоторое вполне упорядоченное множество и $(x_\alpha)\supset(x_\beta)$ при $\alpha>\beta$.

Пусть M — локально циклический модуль. Введем для M следующие обозначения: $I=I(u)$ — аннулятор ненулевого элемента $u\in M$; $H=H(u)=\{\lambda\in R|\lambda x=u;\ x\in M\}$; $W=W(u)=\cap(\lambda)$, $\lambda\in H(u)$ — высота элемента u в M.

Легко показать, что множество $H(u)$ наряду с каждым элементом λ содержит все его делители. Отсюда сразу следует.

Лемма 1. *Если модуль M нециклический, то $H(u)=R\setminus W(u)$. Если M — циклический модуль, то $W(u)=(\mu)$ — главный идеал кольца R, а множество $H(u)$ состоит из всех делителей элемента μ.*

Замечание. Пусть M — локально циклический модуль, $u\in M$, $u\neq 0$. Если $\lambda x=\lambda y=u$ $(x, y\in M)$, то $y=\theta x$, где θ — обратимый элемент R.

В самом деле, предположим, что имеет место строгое включение $(x)\subset(y)$. Тогда $x=\gamma y$, где $\gamma\in V$. Имеем $\lambda\gamma y=\lambda y=u$, откуда $\lambda(1-\gamma)y=0$, что ведет к противоречию, ибо $(1-\gamma)\in R$ — обратимый элемент.

Укажем ряд инвариантов локально циклического модуля.

Аннуляторы всех ненулевых элементов модуля M принадлежат одному классу идеалов. Действительно, пусть $a, b\in M$; $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $a=\mu b$. Если $\operatorname{Ann} b\neq 0$, то $\operatorname{Ann} b=\mu\operatorname{Ann} a$. Если же $\operatorname{Ann} b=0$, то $\operatorname{Ann} a=\operatorname{Ann}\mu$. Значит, $\operatorname{Ann} a$ и $\operatorname{Ann} b$ лежат в одном классе идеалов. Итак, первый естественный инвариант локально циклического модуля: класс аннуляторов его ненулевых элементов.

Вторым очевидным инвариантом локально циклического модуля, как и любого R-модуля, является его аннулятор.

Наконец высоты всех элементов локально циклического модуля M также принадлежат к одному классу идеалов. Это вытекает из равенства

(1) $$\mu\bigcap_i(\lambda_i)=\bigcap_i(\mu\lambda_i).$$

Докажем эту формулу. Ясно, что

(2) $$\mu\bigcap_i(\lambda_i)\subseteqq\bigcap_i(\mu\lambda_i).$$

Если правая часть (2) равна нулю, то сразу получаем (1). Пусть теперь $\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)\neq 0$ и $y\in\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)$; $y\neq 0$. Тогда

(3) $$y=\delta_i\mu\lambda_i.$$

Так как μ делит y, то имеет место равенство

(4) $$y=\mu s,$$

где s фиксированный элемент R. Сравнивая (3) и (4), по замечанию к лемме 1 получаем, что $s=\theta_i\delta_i\lambda_i$, где θ_i — единицы в R. Значит, $s\in\bigcap\limits_i(\lambda_i)$, откуда $\mu\bigcap\limits_i(\lambda_i)\supseteqq\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)$, а это доказывает формулу (1).

Пусть теперь a, b — два ненулевых элемента локально циклического модуля M, $a=\mu b$. $W(b)=\bigcap(\lambda_x)$, где $\lambda_x x=b$, $x\in M$. Тогда $a=\mu\lambda_x x$ и $W(a)=$ $=\bigcap(\mu\lambda_x)=\mu\bigcap(\lambda_x)=\mu W(b)$ на основании формулы (1). Значит, $W(a)$ и $W(b)$ лежат в одном классе идеалов.

Итак, если $a, b\in M$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $a=\mu b$, то

$$\operatorname{Ann} b = \mu \operatorname{Ann} a, \tag{5}$$

$$W(a) = \mu W(b). \tag{6}$$

Из (5) и (6) легко получить, что произведение высоты любого ненулевого элемента $u\in M$ на его аннулятор не зависит от выбора элемента u, то есть это произведение однозначно определяется модулем M.

Докажем более сильное утверждение, которое можно назвать теоремой Лагранжа для локально циклических модулей. Предварительно введем еще один инвариант локально циклического модуля M.

Пусть $I=I(u)$ — ненулевой аннулятор элемента $u\in M$; $u\neq 0$ и пусть $P=P(I)=R\setminus S(I)$. В [2] показано, что стабилизатор $S(I)$ есть инвариант класса идеалов, следовательно, идеал P один и тот же для всех элементов $u\neq 0$ с ненулевыми аннуляторами. Будем обозначать P через $P(M)$.

Теорема 1. *Пусть M — локально циклический модуль, $C=\operatorname{Ann} M$ и $P=P(M)$, если M модуль с кручением. Пусть $u\neq 0$ — произвольный элемент модуля M, $I=\operatorname{Ann} u$, $W=W(u)$. Одновременно для всех элементов $u\in M$, $u\neq 0$ произведение $IW=C$ или $IW=PC$. Если идеал C есть P-главный, а идеал I не P-главный, или если идеалы C и I являются P-главными, но W лежит в одном классе с P, то $IW=PC$. В остальных случаях $IW=C$.*

Доказательство. Ясно, что $I\supseteq C$. Докажем включение $IW\subseteq C$. Пусть $x\in M$. Если $x\in(u)$, то $IWx=0$. Пусть $x\notin(u)$. Тогда $\lambda_x x=u$, $\lambda_x\in H(u)$. Если $\alpha\in IW$, то $\alpha=\beta\gamma$ (см. [2]), где $\beta\in I$, $\gamma\in W$. Но $\gamma\equiv 0 \pmod{\lambda_x}$ и поэтому $\alpha x=$ $=\beta\lambda_x\mu_x x=\beta(\mu_x u)=0$. Итак,

$$IW\subseteq C\subseteq I. \tag{7}$$

Если $C=0$, то в силу (7) $IW=0$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $C\neq 0$. Ввиду (5) имеет место формула

$$C = \bigcap_{\lambda\in H(u)} I\lambda. \tag{8}$$

Из (8) сразу следует, что

$$S(I)\subseteq S(C), \tag{9}$$

то есть идеал C является P-чистым.

Для циклического модуля M теорема тривиальным образом справедлива. Будем далее считать, что модуль M не цикличен. Заметим, что равенство $C=I$ имеет место тогда и только тогда, когда $W\supseteq P$. Действительно, если $W\supseteq P$ и $\alpha x=u$, то $\alpha\in H(u)=R\setminus W\subseteq S(P)=S(I)$ (см. [2]). Тогда $\operatorname{Ann} x=\alpha I=I$. Наоборот, если $C=I$, то $\operatorname{Ann} x=I$, то есть $\alpha I=I$, откуда $\alpha\in S(I)$. Значит $W=\bigcap_{\alpha\in H(u)}(\alpha)\supseteq\bigcap_{\lambda\in S(I)}(\lambda)=P$.

Предположим теперь, что C и I суть P-главные идеалы, а $W \neq 0$ лежит в одном классе с P. Тогда $W=\lambda P$, ибо $\frac{P}{\gamma}=P$ при $\gamma \notin P$. Так как $\lambda \notin W$, то $\lambda x=u$ для некоторого $x \in M$ и $W(x)=P$. Полагая $u=x$, можно теперь считать $\operatorname{Ann} M=\operatorname{Ann} u=I$ и $W(u)=P$. Если идеал P не является P-главным, то равенство $C=IW=IP$ невозможно, ибо идеал IP максимальный P-чистый идеал в P-главном идеале $I=C$. Пусть идеал P есть P-главный. Так как все P-главные идеалы лежат в одном классе (см. доказательство леммы 8 в [2]), то $I=\mu P$. Тогда $IW=\mu PP=\mu P^2 \neq \mu P=I=\operatorname{Ann} M$, ибо для P-главного идеала имеет место строгое включение $P^2 \subset P$. Итак, если C и I являются P-главными идеалами, а $W \neq 0$ лежит в одном классе с P, то $IW \neq C$.

Пусть C' обозначает идеал C, если C не P-главный идеал, или если C и I суть P-главные идеалы, а W не лежит в одном классе с P, и пусть C' обозначает идеал PC, если C есть P-главный идеал, а I не P-главный идеал, или если C и I суть P-главные идеалы, а W лежит в одном классе с P.

В [2] доказана следующая теорема: Пусть I, J — ненулевые идеалы кольца R, $I \subseteqq J$ и $P=P(J)$. Равенство $I=JL$, где L — некоторый идеал кольца R, выполняется тогда и только тогда, когда I есть P-чистый идеал, и при этом J является P-главным идеалом, если I есть P-главный идеал.

Используя предыдущие рассуждение, формулу (7) и эту теорему, имеем

$$IW \subseqq C' \subseqq I \tag{10}$$

и $C'=IL$, где L — идеал в R. Если $L \subseteqq W$, то в силу (10) $C'=IW$. Предположим, что $L \supset W$. Так как W не является идеалом вида aV, $a \neq 0$, то существует элемент α такой, что $W \subset (\alpha) \subset L$ (см. [2]). Имеем $I\alpha=C$.

С другой стороны, из того, что $\alpha \in H(u)=R \setminus W$, следует, что $I\alpha$ есть аннулятор элемента $x \in M$, $\alpha x=u$. Значит $C=I\alpha$. Возьмем в качестве элемента u элемент x и снова обозначим $\operatorname{Ann} x$ через I, а $W(x)$ через W. Тогда по доказанному $W \supseteqq P$. Следовательно, $IW \supseteqq IP$. Но в силу определения идеала C' во всех случаях

$$IP = C'. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем $IW=C'$. *Теорема доказана.*

Литература

[1] Н. И. Вишнякова и С. Д. Берман, О модулях над ненётеровыми кольцами нормирования. *Доклады АН Армянской ССР*, **60** № 3 (1875), 144—148.

[2] С. Д. Берман и Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. *Publ. Math. Debrecen*, **29** (1982), 171—176.

(Поступило 1. X. 1986 г.)