Über die ableitungsfreie Näherungsverfahren von der höheren Konvergenzenordnung für die Auflösung nichtlineare Operatorgleichungen in pseudometrischen Räumen

Von BÉLA JANKÓ (Budapest)

Herrn Professor Zoltán Daróczy zum 50. Geburtstag gewidmet

In dieser Arbeit möchten wir zuerst einige Ideen in Verbindung mit dem Begriffe der Konvergenzordnung in gewöhnlichen metrischen Räumen und auch in pseudometrischen Räumen — entwickeln. Unsere Fragestellung ist eigentlich die Folgende: Wie können wir die Konvergenz von Ordnung $k>1$ unter den Bedingungen der metrischen und pseudometrischen Räume characterisieren? Natürlich, ist heute schon gut bekannt, dass die Untersuchung der „Konvergenzgeschwindigkeit" für numerische Anwendungen ein wichtiges Problem darstellt. Sogar die Existenzbedingungen nehmen für die Lösung der in pseudometrischen Räumen definierten nichtlinearen Operatorgleichungen eine sehr allgemeine und umfangreiche Gestalt an.

Aus diesem Sichtpunkt existieren schon sehr viele interessante und wichtige Ergebnisse für den Fall der Banach Räume [4], [12].

In den gewöhnlichen metrischen Räumen können wir — in einer verbesserten Gestalt — das folgende Ergebnis aussagen [8]:

Satz 1. *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und A bedeute hier einen stetigen (nicht notwendig linearen) Operator, der eine Teilmenge S von X (den Definitionsbereich von A), in X eindeutig abbildet. Die Gleichung*

$$x = Ax, \quad A\colon S \to X, \quad S \subset X, \tag{1}$$

soll — ausgehend von einem zweckmässig gewählten Element $x_0 \in S$ — mit dem Näherungsverfahren

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

gelöst werden.

Der Operator A besitze die folgende Kontraktionseigenschaft

$$d(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqq \alpha d^k(x_n, x_{n-1}), \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

wo α eine reelle Zahl ist, mit $\alpha>0$, und es gilt noch

$$\alpha^{1/(k-1)}\, d(x_0, x_1) < 1 \tag{3'}$$

und $k>1$ ist auch eine reelle Zahl.

Dann existiert unter den hier gegebenen Voraussetzungen eine Lösung $x^* \in S$ der Gleichung (1) und es konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen die Lösung x^* und es gilt noch die folgende Fehlerabschätzung

$$d(x^*, x_n) < \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} H_k (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^n} \tag{4}$$

wo die Bezeichnungen

$$H_k := \frac{1}{1-\alpha^{1/(k-1)} d_0}, \quad d_0 := d(x_1, x_0) > 0 \tag{4'}$$

benützen, und die Kugel S mittels

$$S\colon\ d(x, x_0) \leqq r := \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} \frac{1}{1-\alpha^{1/(k-1)} d_0} \tag{4''}$$

gegeben ist.

Beweis. Die Folge $\{x_n\}$ ist Cauchy-konvergent. In der Tat folgen aus den Bedingungen (3) und (3') sogleich die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&d(x_1, x_2) \leqq \alpha d^k(x_0, x_1) \leqq \alpha d_0^k \\
&d(x_2, x_3) \leqq \alpha d^k(x_1, x_2) \leqq \alpha^{1+k} d_0^{k^2} \\
&d(x_3, x_4) \leqq \alpha d^k(x_2, x_4) \leqq \alpha^{1+k+k^2} d_0^{k^3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&d(x_n, x_{n+1}) \leqq \alpha d^k(x_{n-1}, x_n) \leqq \alpha^{1+k+\dots+k^{n-1}} \cdot d_0^{k^n} = \alpha^{(k^n-1)/(k-1)} d_0^{k^n} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Für eine beliebige natürliche Zahl p können wir noch die folgende Abschätzungen angeben:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leqq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqq \\
&< \frac{1}{\alpha^{1/k-1}} \{(\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^n} + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^{n+1}} + \dots + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^{n+p-1}}\} = \\
&= \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^n} \{1 + (\alpha^{1/(k-1)} d_0) + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^2 + \dots + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{p-1}\}
\end{aligned}$$

und endlich haben wir

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} (\alpha^{1/k-1} d_0)^{k^n} H_k. \tag{5}$$

Das heisst, dass die Folge $\{x_n\}$ Cauchy-konvergent ist. Da X vollständig ist und darum besitzt die Folge $\{x_n\}$ ein Grenzelement $x^* \in X$. So folgt beim Grenzübergang

$$d(x_n, x^*) \leqq \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} H_k (\alpha^{1/k-1} d_0)^{k^n} \tag{6}$$

und diese Ungleichung zeigt, dass $d(x_n, x^*) \to 0$ für $n \to \infty$.

Das Grenzelement x^* ist eine Lösung der Gleichung (1). Tatsächlich ist hier A stetig und ähnlich wie im Falle (6) gilt die folgende Abschätzung

$$d(x_n, Ax^*) < \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} H_k(\alpha^{1/k-1} d_0)^{k^n}. \tag{6'}$$

Wegen der Dreiecksungleichung und den Abschätzungen (6), (6') folgt

$$d(x^*, Ax^*) \leqq d(x^*, x_n) + d(x_n, Ax^*)$$

und für $n \to \infty$ beim Grenzübergang $d(x^*, Ax^*) \leqq 0$, und zwar $d(x^*, Ax^*) = 0$, also $x^* = Ax^*$.

Für den Existenzbereich der Lösung betrachten wir die folgenden Abschätzungen und erhalten leicht, wie im Falle der Ungleichungen (5),

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leqq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \leqq \\ &\leqq d_0 + \alpha d_0^k + \alpha^{1+k} d_0^{k^2} + \ldots + \alpha^{1+k+k^2+\cdots+k^{n-2}} d_0^{k^{n-1}} = \\ = \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} \{\alpha^{1/(k-1)} d_0 &+ (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^k + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^2} + \ldots + (\alpha^{1/(k-1)} d_0)^{k^{n-1}}\} < \\ &< \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} \frac{1}{1-\alpha^{1/(k-1)} d_0} = \frac{1}{\alpha^{1/(k-1)}} H_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Somit liegt die Lösung x^* in der gegebenen Kugel S.

Wir sollen hier bemerken, dass — ähnlich wie im Falle der normierten Räume — die Konvergenzordnung k bei der Fehlerabschätzung (4) gegeben und mit seinem Exponent k^n ganz characterisiert ist, [4].

Anderseits, statt der Gleichung (1) können wir eine äquivalente Gleichung $x = \tilde{A}x$ konstruiren, so dass die Kontraktionsbedingungen (3), (3') für $\tilde{A}$ gelten. Es besteht auch die Möglichkeit durch Bildung der Iterierten Näherungsverfahren beliebig hoher Ordnung aufzustellen [4, S. 231].

Natürlich können wir diesen Problemkreis ausdehnen und eine ähnliche Frage stellen: Wie können wir in allgemeinen metrischen Räumen, — nämlich in pseudometrischen Räumen — die Konvergenz zweiter und höherer Ordnung charakterisieren?

Die pseudometrische Räume sind in 1943 von G. Kurepa eingeführt worden [10]; aber ihre besondere Bedeutung — für die numerische Analysis — hat J. Schröder gezeigt [15], [14].

Definition 1. Eine Menge X von Elementen $x, y, z, \ldots$ heisst bezüglich H ein pseudometrischer Raum, falls je zwei Elementen $x, y \in X$ ein (Pseudo-) Abstand $\varrho(x, y)$ zugeordnet ist, wo $\varrho(x, y)$ zu dem linearen halbgeordneten Raum H gehört, und die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Definitheit: $\varrho(x, y) = \theta_H$ genau für $x = y$, wo θ_H das Nullelement des Raumes H ist;

II. Die Dreiecksungleichung

$$\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(z, y)$$

ist für irgend drei Elemente $x, y, z \in X$ erfüllt.

Definition 2. Eine Menge M ist halbgeordnet (teilgeordnet, partiell geordnet, kurz geordnet), wenn für gewisse Paare $x, y \in M$ eine Beziehung $x \leqq y$ erklärt ist, mit den Eigenschaften:

A) Reflexivität: $x \leqq x$ für alle $x \in M$;

B) Transitivität: aus $x \leqq y$ und $y \leqq z$ folt $x \leqq z$;

C) Antisymmetrie: aus $x \leqq y$ und $y \leqq x$ folgt $x = y$.

Natürlich kommen im Falle der linearen Räume zur Halbordnung noch zwei Zusatzforderungen hinzu.

Definition 3. Ist X ein linearer Raum mit dem Nullelement θ, dann nennt mann X einen halbgeordneten linearen Raum, wenn die Ordnungstruktur mit der linearen Struktur verträglich ist, d. h. we ausser den obigen Forderungen A)—C) zusätzlich noch gilt:

D) Aus $x \geqq \theta$ folgt $cx \geqq \theta$ für $c > 0$ reell;

E) Aus $x_1 \leqq y_1$ und $x_2 \leqq y_2$ folgt $x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$.

Definition 4. In einem halbgeordneten linearen Raum H nennt mann eine Folge $\{\varrho_n\}$ konvergent, wenn dieser Folge $\{\varrho_n\}$ ein eindeutig bestimmtes Grenzelement $\lim \varrho_n \in H$ zugeordnet ist, wobei die folgenden recht allgemeinen Forderungen erfüllt sind:

1) aus $\varrho_n = \varrho^*$ für alle $n = 1, 2, \ldots,$ folgt $\lim \varrho_n = \varrho^*$;

2) aus $\lim \varrho_n = \varrho^*$ folgt $\lim \varrho_{k_n} = \varrho^*$ für jede monotone Folge natürlicher Zahlen k_n, $n = 1, 2, \ldots$;

3) aus $\lim \varrho_n = \varrho^*$ und $\lim \sigma_n = \sigma^*$ folgt

$$\lim (\varrho_n + \sigma_n) = \varrho^* + \sigma^*;$$

4) aus $\lim \lambda_n = \lambda^*$ und $\lim \varrho_n = \varrho$c folgt

$$\lim \lambda_n \varrho_n = \lambda^* \varrho^*;$$

wo λ^*, λ_n zu dem Zahlenkörper K gehören;

5) aus $\theta_H \leqq \varrho_n \sigma_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $\lim \sigma_n = \theta_H$ folgt $\lim \varrho_n = \theta_H$;

6) aus $\varrho_n \geqq \theta_H$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $\lim \varrho_n = \varrho^*$ folgt $\varrho^* \geqq \theta_H$.

Natürlich sind diese Bedingungen bei den numerischen Anwendungen leicht nachzuprüfen und es werden damit sehr allgemeine, umfangreiche Räume erfasst. Sonst kann man in einigen linearen Räumen sehr leicht mit Hilfe des Supremumbegriffes einen Konvergenzbegriff einführen, z. B. in K-Räumen und K-Linealen [8], [16].

Definition 5. Ein bezüglich H pseudometrischer Raum X wird vollständig genannt, falls jede Folge $\{u_n\} \subset X$ ein Grenzelement $u^* \in X$ besitzt, wenn $\lim \varrho(u_{k_n}, u_n) = \theta$, für eine beliebige monotone Folge natürlicher Zahlen k_n.

Es sei jetzt H ein halbgeordneter linearer K-Raum und X ein bezüglich H vollständiger pseudometrischer Raum [4]. Dann bedeute A einen (i. a. nicht notwendig linearen) Operator, der in diesem Falle eine Teilmenge S von X, den Definitionsbereich von A, in X (eindeutig) abbildet. Betrachten wir nun die folgende Gleichung

$$x = Ax, \quad A\colon S \to X, \quad S \subset X, \tag{8}$$

und sei unser Näherungsverfahren

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

ausgehend von einem zweckmässig gewählten Anfangselement $x_0 \in S$.

Wir bemerken, dass J. Schröder für die Existenz der Lösung und für die Konvergenz des Näherungsverfahrens die folgende Verallgemeinerung des Kontraktionsbegriffes gegeben hat [14]:

$$\varrho(Au, Av) \leqq L\varrho(u, v)$$

für jedes Elementenpaar $u, v \in X$, wo L (die „Schranke" des Operators A) ein linearer, stetiger und positiver Operator ist.

In unserem Falle hat der Operator A auch eine sogenannte „Schranke" B konstruiert im folgenden Sinne:

$$\varrho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqq \varrho^2(x_n, x_{n-1}), \tag{10}$$

wobei das Produkt $\varrho^2(u, v)$ bei einem gewählten Operator B durch

$$\varrho^2(u, v) := B\big(\varrho(u, v);\ \varrho(u, v)\big),$$

erklärt wird; hier ist $B\colon H_x H \to H$ ein bilinearer (additiver und homogener), stetiger und monotoner Operator für beide Argumenten. Die Monotonität für B bedeute hier dass aus $\varrho > \theta$ folgt $B(\varrho, \varrho) > \theta$.

Satz 2. *Sei der Operator A durch die obigen Bedingungen erklärt und es sei*

$$\varrho_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_1^{2^i} \leqq w \in H, \quad \varrho_1 := \varrho(x_0, x_1), \tag{11}$$

wo w ein gegebenes Element ist; dann gibt es eine Lösung x^* im Gebiet S: $\varrho(x, x_0) \leqq w$ und es gilt die folgende Abschätzung

$$\varrho(x^*, x_n)\, w_n := \sum_{i=n}^{\infty} \varrho_1^{2^i}. \tag{12}$$

Beweis. Erstens soll man zeigen, dass $\{x_n\}$, kontruiert mit dem Verfahren (9), Cauchy-konvergent ist. So, folgen in ähnlicher Weise wie beim vorhergehenden Satz, aus der Kontraktionsbedingung (10) die Ungleichungen

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(Ax_0, Ax_1) \leqq B\big(\varrho(x_0, x_1),\ \varrho(x_0, x_1)\big) =: \varrho_1^2$$

und ferner

$$\varrho(x_2, x_3) = \varrho(Ax_1, Ax_2) \leqq B\big(\varrho(x_1, x_2),\ \varrho(x_1, x_2)\big) \leqq B(\varrho_1^2, \varrho_1^2) =: \varrho_1^4,$$
$$\varrho(x_3, x_4) = \varrho(Ax_2, Ax_3) \leqq B\big(\varrho(x_2, x_3),\ \varrho(x_2, x_3)\big) \leqq B(\varrho_1^4, \varrho_1^4) =: \varrho_1^8,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varrho(x_n, x_{n+1}) \leqq \varrho_1^{2^n}.$$

Für eine beliebige natürliche Zahl p haben wir die Abschätzung

$$\varrho(x_n, x_{n+p}) \leqq \varrho(x_n, x_{n+1}) + \varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \varrho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqq$$
$$\leqq \varrho_1^{2^n} + \varrho_1^{2^{n+1}} + \ldots + \varrho_1^{2^{n+p-1}} \leqq w$$

so dass unsere Folge Cauchy-konvergent ist. Da X vollständig ist besitzt die Folge $\{x_n\}$ ein Grenzelement $x^* \in X$. Für $p \to \infty$ bekommt man die Fählerabschätzung (12). In ähnlicher Weise erhält man

$$\varrho(x_n, Ax^*) \leqq w_n. \tag{13}$$

Das Grenzelement x^* ist eine Lösung der Operatorgleichung (8) Tatsächlich folgt da A stetig ist, und wegen der Dreiecksungleichung und den Abschätzungen (12), (13)

$$\varrho(x^*, Ax^*) \leqq \varrho(x^*, x_n) + \varrho(x_n, Ax,)$$

und für $n \to \infty$ somit $\varrho(x^*, Ax^*) \leqq \theta$, und zwar $\varrho(x^*, Ax^*) = \theta$, also $x^* = Ax^*$.

Für den Existenzbereich der Lösung x^* betrachten wir die folgenden Abschätzungen

$$\varrho(x_0, x_n) \leqq \varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + \ldots + \varrho(x_{n-1}, x_n) \leqq w.$$

somit befindet sich die Lösung x^* in der Kugel S.

Endlich können wir für die Konvergenz von Ordnung $k \geqq 2$ unter den Bedingungen der pseudometrischen Räume den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. *Sei der Operator A durch die obigen Bedingungen erklärt und sei statt* (10) *die folgende Kontraktionsbedingung erfüllt:*

$$\varrho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leqq \varrho^k(x_n, x_{n-1}), \quad (n = 1, 3, \ldots), \tag{10'}$$

wo das Produkt $\varrho^k(u, v)$ mit Hilfe eines zweckmässig gewählten k-linearen Operators U eingeführt ist

$$\varrho^k(u, v) := U(\underbrace{\varrho(u, v);\ \varrho(u, v);\ \ldots;\ \varrho(u, v)}_{k\text{-mal}}).$$

Der Operator

$$U\colon H_2\underbrace{H \ldots HH}_{k\text{-mal}}$$

sei ein stetiger und monotoner Operator für alle k Argumente.

Der Monotonitätsbegriff bedeutet hier natürlich, dass aus $\varrho > \theta$ folgt $U(\varrho, \varrho, \ldots, \varrho) > \theta$. Sei noch

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varrho_1^{k^i} \leqq \tilde{w} \in H, \quad \varrho_1 := \varrho(x_0, x_1), \tag{11'}$$

wo $\tilde{w}$ ein gegebenes Element ist. Dann existiert eine Lösung x^* der Gleichung (8) im Gebiet Ω: $\varrho(x, x_0) \leqq \tilde{w}$ und es gilt die Abschätzung

$$\varrho(x^*, x_n) \leqq w_n := \sum_{i=n}^{\infty} \varrho_1^{k^i}. \tag{12'}$$

Die Beweisführung ist dieselbe wie im Falle des Satzes 2.

Bemerkung. Für die numerische Anwendungsmöglichkeiten, s. [2], [3], [6], [15] und [16]. — In dieser Arbeit beschäftigen wir uns nicht mit der Optimalität, und der Komplexität der Iterationsverfahren; s. [9], [20], [21].

Literaturverzeichnis

[1] M. Altman, Contractors and Equations in pseudometric space. *Boll. Unione Mat. Ital.* **6, 3** (1972), 376—389.

[1a] P. Azzimondi and C. Scaravelli, Un teorema del punto unito in spazi metrici generalizatti. *Riv. mat. Univ. Parma,* **5/2,** (1979), 773—780.

[2] E. Bohl, Die metrische Struktur von Räumen mit allgemeinerem Abstandsbegriff ... *Computing,* **5, 3** (1970), 189.

[3] E. Bohl, Monotone, Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. *Springer Tracts Natur. Phil.* **25,** *Berlin* IV, (1974), 258,

[4] L. Collatz, Funktionalanalysis und numerische Mathematik, *Springer-Verlag, Berlin,* 1964.

[5] R. Cristescu, Geordnete lineare Raume und lineare Operatoren, (rumänisch), *Bucharest,* 1970.

[6] H. Ehrmann, Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren. *Ac. public.,* **4, 1** (1959), 45—64.

[7] H. Ehrmann, Konstruktion und durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **4,** 1959 (1960), 65—88.

[8] Béla Jankó and V. Pop, Über die Auflösung der nichtlinearen Operatorgleichungen in den metrischen Raumen mit der konvergenten Näherungsverfahren von der Ordnung k, (rumanisch). *Studii si Cercetari Matem. (Bucuresti),* **8, 19** (1967), 1155—1158.

[9] B. Jankó, On the Solving of Nonlinear Operator Equations in Banach Spaces (in Romanian), Publishing House of the Romanian Academy, *Bucharest,* 1969.

[10] B. Jankó, On Solving the Operator Equations (in Romanian), *Thesis Cluj-Kolozsvár,* 1967.

[11] B. Jankó, On a Unified Theory of Iteration Methods for Solving Nonlinear Operator Equations, II. *Annales Univ. Sci. Budapest, R. Eötvös nom., Sectio Computatorica* **VI,** (1985), 183—189.

[12] L. W. Kantorovitsch and C. P. Akilov, Funktionalanalysis in normierten Räumen, *Berlin* 1964.

[13] G. Kurepa, Tableaux ramifiés d'ensemble; Espaces pseudonormés. *C. R.,* **198** (1934), 1563—1565.

[14] E. Schröder, Über unendlichviele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Annalen,* **II,** (1870), 317—369.

[15] J. Schröder, Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. *Math. Z.,* **66** (1956), 111—116.

[16] J. Schröder, Neue Fehlerabschätzungen für versch edene Iterat onsverfahren. *ZAMM,* **36** (1956), 168—181.

[17] C. W. Rheinboldt, A unified convergence theory for a class of iterative processes. *SIAM J. Numer, Anal.* **5 (1)** (1968), 42—63.

[18] F. Stummel, Discrete Convergence of Mappings. Topics in Num. Anal. *Proc. Roy. Irish Acad. Conf. Dublin,* 1972.

[19] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski and H. Wozniakowski, Information, uncertaity, complexity Addison-Wesley Publishing Company, *London,* 1983.

[20] J. F. Traub, Analytic computational complexity *(Proc. Simp. Computer Sci.) Pittsburg,* 1975.

[21] J. F. Traub and A. Vozniakowski, A general theory of optimal algorithms, *New York,* 1980.

[22] B. Z. Wulich, Einleitung in die Theorie der halbgeordneten Räume (russisch), *Moskau,* 1961.

EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY
DEPARTMENT OF NUMERICAL ANALYSIS AND COMPUTER SCIENCE
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6—8