Die Frenetformeln des Weyl—Otsukischen Raumes

Von DJERDJI F. NADJ (Sopron)

Herrn Professor Zoltán Daróczy zum 50. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Die Grundlagen der Theorie der affinen Otsukischen Räume stammen von T. OTSUKI [5]. Die metrischen Otsukischen Räume, insbesondere die Weyl—Otsukischen Räume (W—O_n) wurden von A. MOÓR [1] eingeführt.

Im folgenden bestimmen wir die Frenetformeln des W—O_n Raumes, für ko- und kontravariante Vektoren, sowohl auch für verschiedene invariante Differentiale. Die Resultate werden in den Relationen (2.18), (2.26), (3.3) und (3.4) angegeben. Diese werden Frenetformeln genannt, da sie die Ableitungen der Vektoren eines n-Beins durch dieselbe Vektoren ausdrücken. Die hier angegebenen Formeln unterscheiden sich von denjenigen des Riemannschen Raumes. Diese Abweichung hat zwei Gründe: einerseits gilt in den W—O_n $\frac{D\delta^i_j}{dt}\neq 0$; anderseits verschwindet das absolute Differential des metrischen Grundtensors g_{ij} nicht, der Grundtensor ist nur rekurrent. Die bekannten Formeln für den Riemannschen Raum sind allerdings als Sonderfälle enthalten. Nach unserem Wissen ist dieses Problem bisher noch nicht untersucht worden.

1. §. Der Weyl—Otsukische Raum

Ein Weyl—Otsukischer Raum ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem symmetrischen Grundtensor g_{ij} $(\det(g_{ij})\neq 0)$ und mit einem Tensor P^i_j $(\det(P^i_j)\neq 0)$, der einen eindeutig bestimmten Inversen Q^i_j besitzt, wobei $P^i_j Q^j_r=\delta^i_r$. gilt In den Otsukischen Räumen ist der längs der Kurve $x^i(t)$ gegebene invariante Differentialquotient eines Tensorfeldes T^i_j auf folgende Weise definiert ([1] (§ 1); [5] (3.6)—(3.8)):

$$\frac{DT^i_j}{dt} := P^b_j P^i_a \frac{\bar{D}T^a_b}{dt} = P^b_j P^i_a (\partial_k T^a_b + {}'\Gamma_r{}^a{}_k T_b{}^r - {}''\Gamma_b{}^t{}_k T^a_t)\frac{dx^k}{dt}. \tag{1.1}$$

Diese Ableitungen werden im folgenden der Kürze halber mit D bzw. $\bar{D}$ bezeichnet. Für die Ableitung (1.1) ist die Leibnitz-Formel nicht mehr gültig. $\bar{D}$ nennt man die fundamentale invariante Ableitung.

Die Verschiedenheit der Übertragungsparameter $'\Gamma_b{}^a{}_k$ und $''\Gamma_b{}^a{}_k$ für ko- und kontravarianten Indizes ist in den Otsukischen Räumen charakteristisch. Ferner gilt

$$(1.2) \qquad D\delta^i_j = P^i_a P^b_j \bar{D}\delta^a_b = P^i_a P^b_j ('\Gamma_b{}^a{}_k - ''\Gamma_b{}^a{}_k)\frac{dx^k}{dt} \neq 0.$$

Im Weyl—Otsukischen Raum (W—O$_n$) hat A. Moór die Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k$ aus der Rekurrenz des metrischen Grundtensors bestimmt, das heißt aus der Relation ([1], (2.3))

$$(1.3) \qquad \bar{D}g_{ij} = \gamma_k g_{ij}\dot{x}^k.$$

Dann bestimmen wir die Übertragungsparameter $'\Gamma_j{}^i{}_k$ so, daß die Otsukische Relation ([5], (3.13))

$$(1.4) \qquad \partial_k P^i_j + ''\Gamma_h{}^i{}_k P^h_j - P^i_h{}'\Gamma_j{}^h{}_k = 0$$

besteht.

Dieser Raum wird Riemann—Otsukischer genannt und mit R—O$_n$ bezeichnet, wenn $\bar{D}g_{ij}=0$, das heißt $\gamma_k=0$ gilt ([3]).

In Otsukischen Räumen kann man die folgenden zwei invarianten Ableitungen definieren ([5], (3.14))

$$(1.5) \qquad 'DT^i_j := P^i_a P^b_j{}'\bar{D}T^a_b = P^i_a P^b_j(\partial_k T^a_b + '\Gamma_r{}^a{}_k T^r_b - '\Gamma_b{}^r{}_k T^a_r)\dot{x}^k,$$

$$(1.6) \qquad ''DT^i_j := P^i_a P^b_j{}''\bar{D}T^a_b = P^i_a P^b_j(\partial_k T^a_b + ''\Gamma_r{}^a{}_k T^r_b - ''\Gamma_b{}^r{}_k T^a_r)\dot{x}^k.$$

Für diese Ableitungen sind die Leibnitz-Formel, wie auch die Relationen

$$(1.7) \qquad \text{a)}\ \ 'DT^a = DT^a; \qquad \text{b)}\ \ ''DT_a = DT_a$$

gültig. Man kann leicht ausrechnen, daß die Gleichungen

$$(1.8) \qquad '\bar{D}g_{ij} = \gamma_k g_{ij}\dot{x}^k - 2g_{r(j}\bar{D}\delta^r_{i)}$$

$$(1.9) \qquad '\bar{D}g^{rj} = -\gamma_k g^{rj}\dot{x}^k + 2g^{i(r}\bar{D}\delta^{j)}_i$$

gelten; (i,j) bezeichnet die Symmetrisation der in den Klammern stehenden Indizes.

2. §. Der kontravariante Fall

2.1. Die Frenetformel bezüglich $\bar{D}$

Der vorige Paragraph zeigt, daß im W—O$_n$ Raum für ko- bzw. kontravariante Vektoren verschiedene Ableitungsoperatoren existieren. Zuerst wollen wir $'\bar{D}$ auf die kontravarianten Vektoren anwenden. Wir setzen

$$(2.1) \qquad \frac{1}{2}\gamma_k\dot{x}^k = \gamma$$

und beweisen das folgende

Lemma. *Ist v ein Einheitsvektorfeld im* W—O$_n$ *Raum, dann gilt:*

$$(2.2) \qquad g_{ij}v^i(\bar{D}v^j - v^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma v^j) = 0.$$

Nach unserer Voraussetzung ist $g_{ij}v^i v^j=1$. Wir wenden darauf den fundamentalen invarianten Ableitungsoperator $'\bar{D}$ an. Nachdem $'\bar{D}$ die Leibnitz-Formel befriedigt, ist

$$('\bar{D}g_{ij})v^i v^j + 2g_{ij}v^i('\bar{D}v^j) = 0.$$

Aufgrund von (1.8) und (1.7) folgt (2.2).

Wir betrachten eine Kurve $x^i=x^i(s)$, wo s die Bogenlänge ist. Ihr Tangentenvektor $\underset{0}{v}^i := \frac{dx^i}{ds}$ ist ein Einheitsvektorfeld. Nach dem Lemma ist längs der Kurve

$$g_{ij}\underset{0}{v}^i(\bar{D}\underset{0}{v}^j - \underset{0}{v}^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{0}{v}^j) = 0.$$

Die Länge von $\underset{1}{\tilde{v}}^j := \bar{D}\underset{0}{v}^j - \underset{0}{v}^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{0}{v}^j$ ist

$$\underset{1}{\varkappa} = [g_{ij}(\bar{D}\underset{0}{v}^i - \underset{0}{v}^r\bar{D}\delta^i_r + \gamma\underset{0}{v}^i)(\bar{D}\underset{0}{v}^j - \underset{0}{v}^t\bar{D}\delta^j_t + \gamma\underset{0}{v}^j)]^{1/2}. \tag{2.3}$$

Dann ist der in die Richtung $\underset{1}{\tilde{v}}$ zeigende Einheitsvektor $\underset{1}{v}$

$$\underset{1}{v}^i = \underset{1}{\varkappa}^{-1}(\bar{D}\underset{0}{v}^i - \underset{0}{v}^r\bar{D}\delta^i_r + \gamma\underset{0}{v}^i) \tag{2.4}$$

orthogonal zu $\underset{0}{v}$.

Wendet man das Lemma auf das Einheitsvektorfeld $\underset{1}{v}$ an, so bekommt man

$$g_{ij}\underset{1}{v}^i(\bar{D}\underset{1}{v}^j - \underset{1}{v}^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{1}{v}^j) = 0.$$

Das heißt, der Vektor

$$\underset{2}{\overset{*}{v}} := \bar{D}\underset{1}{v}^j - \underset{1}{v}^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{1}{v}^j$$

ist orthogonal zu $\underset{1}{v}$. Nehmen wir jetzt an, daß $\underset{2}{\overset{*}{v}}$ nicht in der von $\underset{0}{v}$ und $\underset{1}{v}$ aufgespannten Ebene liegt. Dann ist der in der Ebene von $\underset{0}{v}$ und $\underset{2}{\overset{*}{v}}$ liegende Vektor $\underset{2}{\tilde{v}} := \underset{2}{\overset{*}{v}} + \alpha\underset{0}{v}$ bei entsprechendem $\alpha\in R$ orthogonal zu $\underset{0}{v}$. Bezeichnen wir die Länge des Vektors $\underset{2}{\tilde{v}}$ mit $\underset{2}{\varkappa}$ und den in dessen Richtung zeigenden Einheitsvektor mit $\underset{2}{v}$, so erhalten wir

$$\underset{2}{\varkappa}\underset{2}{v}^j = \bar{D}\underset{1}{v}^j - \underset{1}{v}^r\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{1}{v}^j + \alpha\underset{0}{v}^j. \tag{2.5}$$

Zwecks Bestimmung von α wenden wir den Operator $'\bar{D}$ auf die Identität $g_{ij}\underset{0}{v}^i\underset{1}{v}^j=0$ an und bekommen

$$('\bar{D}g_{ij})\underset{0}{v}^i\underset{1}{v}^j + g_{ij}('\bar{D}\underset{0}{v}^i)\underset{1}{v}^j + g_{ij}\underset{0}{v}^i('\bar{D}\underset{1}{v}^j) = 0. \tag{2.6}$$

Aus der Relation (1.8) und dem aus (2.4) ausgedrückten $\bar{D}\underset{0}{v}^i$, sowie aus (1.7a) in Anbetracht der Orthogonalität der Vektoren $\underset{0}{v}$ und $\underset{1}{v}$ folgt der Ausdruck

$$g_{ij}\underset{0}{v}^i\bar{D}\underset{1}{v}^j = g_{ai}\underset{0}{v}^i\underset{1}{v}^j\bar{D}\delta^a_j - \underset{1}{\varkappa}. \tag{2.7}$$

Kontrahieren wir (2.5) mit $g_{ij}\underset{0}{v}^i$, so erhalten wir mit Rücksicht auf (2.7) das Resultat $\alpha=-\underset{1}{\varkappa}$. Aus (2.5) folgen

$$\underset{2}{v}^j = \underset{2}{\varkappa}^{-1}(\bar D\underset{1}{v}^j - \underset{1}{v}^r \bar D\delta^j_r + \gamma\underset{1}{v}^j + \underset{1}{\varkappa}\underset{0}{v}^j) \tag{2.8}$$

und

$$\underset{2}{\varkappa} = [g_{ij}(\bar D\underset{1}{v}^i - \underset{1}{v}^r \bar D\delta^i_r + \gamma\underset{1}{v}^i + \underset{1}{\varkappa}\underset{0}{v}^i)(\bar D\underset{1}{v}^j - \underset{1}{v}^q\bar D\delta^j_q + \gamma\underset{1}{v}^j + \underset{1}{\varkappa}\underset{0}{v}^j)]^{1/2}. \tag{2.9}$$

Nun wenden wir das Lemma auf $\underset{2}{v}$ an und setzen

$$\overset{*}{\underset{3}{v}}{}^j := \bar D\underset{2}{v}^j - \underset{2}{v}^a\bar D\delta^j_a + \gamma\underset{2}{v}^j.$$

Nimmt man an, daß der zu $\underset{2}{v}$ orthogonale Vektor $\overset{*}{\underset{3}{v}}$ nicht zu dem durch $\underset{0}{v}, \underset{1}{v}, \underset{2}{v}$ aufgespannten Unterraum gehört, dann gibt es in dem von $\underset{0}{v}, \underset{1}{v}$ und $\overset{*}{\underset{3}{v}}$ aufgespannten Unterraum ein $\tilde{\underset{3}{v}} := \underset{3}{v} + \underset{0}{\alpha}\underset{0}{v} + \underset{1}{\alpha}\underset{1}{v}$ mit geeigneten $\underset{0}{\alpha}, \underset{1}{\alpha} \in R$, das orthogonal zu $\underset{0}{v}$ und $\underset{1}{v}$ ist. Bezeichnet man die Länge des Vektors $\underset{3}{v}$ mit $\underset{3}{\varkappa}$ und den in dessen Richtung zeigenden Einheitsvektor mit $\underset{3}{v}$, so gilt

$$\underset{3}{\varkappa}\underset{3}{v}^i = \bar D\underset{2}{v}^i - \underset{2}{v}^r\bar D\delta^i_r + \gamma\underset{2}{v}^i + \underset{0}{\alpha}\underset{0}{v}^i + \underset{1}{\alpha}\underset{1}{v}^i. \tag{2.10}$$

Zwecks Bestimmung von $\underset{0}{\alpha}$, wenden wir den Operator $'\bar D$ auf die Identität $g_{ij}\underset{0}{v}^i\underset{2}{v}^j = 0$ an. Ähnlich wie bei der Bestimmung von α in der Formel (2.5) folgt in Anbetracht der dort verwendeten Orthogonalität sowie jener von $\underset{0}{v}, \underset{2}{v}$ und $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}$

$$g_{ij}\underset{0}{v}^i\bar D\underset{2}{v}^j = g_{ai}\underset{0}{v}^i\underset{2}{v}^j\bar D\delta^a_j, \tag{2.11}$$

denn die Kontraktion von (2.10) mit $g_{ij}\underset{0}{v}^i$ ergibt $\underset{0}{\alpha} = 0$. Aus der Identität $g_{ij}\underset{1}{v}^i\underset{2}{v}^j = 0$ bekommt man auf ähnlichem Wege das Resultat $\underset{1}{\alpha} = \underset{1}{\varkappa}$. Aus (2.10) ergibt sich

$$\underset{3}{v}^i = \underset{3}{\varkappa}^{-1}(\bar D\underset{2}{v}^i - \underset{2}{v}^r\bar D\delta^i_r + \gamma\underset{2}{v}^i + \underset{2}{\varkappa}\underset{1}{v}^i). \tag{2.12}$$

Dieses Verfahren kann man fortsetzen, wenn die folgende Bedingung gilt:

Bedingung (B). $\overset{*}{\underset{l}{v}}{}^i := \bar D\underset{l+1}{v}^i - \underset{l-1}{v}^r\bar D\delta^i_r + \gamma\underset{l-1}{v}^i$, $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ *liegt nicht in dem von den Vektoren* $\underset{0}{v}, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{l-1}{v}$ *aufgespannten Unterraum.*

Für jedes $l \in \{2, \ldots, n-1\}$ hat der Vektor $\underset{l}{v}$ die Koordinaten

$$\underset{l}{v}^i = \underset{l}{\varkappa}^{-1}(\bar D\underset{l-1}{v}^i - \underset{l-1}{v}^r\bar D\delta^i_r + \gamma\underset{l-1}{v}^i + \underset{l-1}{\varkappa}\underset{l-2}{v}^i). \tag{2.13}$$

Der Wert des Krümmungsskalars, der die Länge des Vektors in Klammern ausdrückt, ist

$$\underset{l}{\varkappa} = [g_{ij}(\bar D\underset{l-1}{v}^i - \underset{l-1}{v}^r\bar D\delta^r_i + \gamma\underset{l-1}{v}^i + \underset{l-1}{\varkappa}\underset{l-2}{v}^i)(\bar D\underset{l-1}{v}^j - \underset{l-1}{v}^q\bar D\delta^j_q + \gamma\underset{l-1}{v}^j + \underset{l-1}{\varkappa}\underset{l-2}{v}^j)]^{1/2}. \tag{2.14}$$

Wird $\underset{0}{\varkappa} = 0$ definiert, dann ist die Formel (2.13) auch für $\underset{1}{v}$ gültig. Für den Vektor $\overset{*}{\underset{n}{v}}{}^i := \bar D\delta\,\underset{n-1}{v}^i - \underset{n-1}{v}^r\bar D\delta^i_r + \gamma\underset{n-1}{v}^i$, der durch Anwendung des Lemmes auf $\underset{n-1}{v}$ folgt, gibt es eine Darstellung

$$\overline{D}\underset{n-1}{v^i} - \underset{n-1}{v^r}\,\overline{D}\delta^i_r + \gamma\underset{n-1}{v^i} + \sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k\underset{k}{v^i} = 0. \tag{2.15}$$

Für die hier auftretenden, auf obige Weise bestimmten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ bekommt man die Werte $\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_{n-3}=0$ und $\alpha_{n-2}=\underset{n-1}{\varkappa}$. Also ist

$$\overline{D}\underset{n-1}{v^i} - \underset{n-1}{v^r}\,\overline{D}\delta^i_r + \gamma\underset{n-1}{v^i} + \underset{n-1}{\varkappa}\,\underset{n-2}{v^i} = 0. \tag{2.16}$$

Man definiert $\underset{n}{\varkappa}(s)$ als Null. Für die aus (2.4), (2.13) und (2.16) ausgedrückten $\overline{D}\underset{k}{v^i}$ $(k=0, \ldots, n-1)$ bekommt man das folgende Resultat

Satz 1. *Im* W—O$_n$ *Raum gibt es längs der die Bedingung* (B) *befriedigenden Kurve* $x^i=x^i(s)$ *das orthonormierte n-Bein* $\underset{0}{v}, \underset{1}{v}, \ldots, \underset{n-1}{v}$ $\left(\underset{0}{v}:=\dfrac{dx^i}{ds}\right)$, *für welches die folgenden Ableitungs gleichungen gelten*

$$\overline{D}\underset{k}{v^i} = -\underset{k}{\varkappa}\,\underset{k-1}{v^i} + \underset{k+1}{\varkappa}\,\underset{k+1}{v^i} + \underset{k}{v^r}\,\overline{D}\delta^i_r - \gamma\underset{k}{v^i} \quad (k = 0, \ldots, n-1). \tag{2.17}$$

Diese Formeln drücken die invarianten Ableitungen der Vektoren des n-Beins durch die Vektoren desselben Repers aus, und man kann sie als die Frenetformeln der fundamentalen invarianten Ableitung $\overline{D}$ der kontravarianten Vektoren ansehen. $\underset{1}{\varkappa}, \underset{2}{\varkappa}, \ldots, \underset{n-1}{\varkappa}$ sind die Krümmungen der Kurve.

Im Riemann—Otsukischen Raum ist $\gamma=0$ und so verschwindet das letzte Glied der rechten Seite in (2.17). Im Riemannschen Raum ist $\overline{D}\delta^i_j=0$, und demnach bekommen wir erneut die bekannten Frenetformeln ([6], (100, 16)). Das heißt, die Formel (2.17) ist die Verallgemeinerung der klassischen Frenetformeln. Berücksichtigt man, daß im W—O$_n$ Raum nach (1.5) die Gleichungen $Dv^i=P^i_a\overline{D}v^a$ und $P^i_a P^b_j\overline{D}\delta^a_b=D\delta^i_j$ gelten, so folgt aus (2.17)

$$D\underset{k}{v^i} = P^i_a(-\underset{k}{\varkappa}\,\underset{k-1}{v^a} + \underset{k+1}{\varkappa}\,\underset{k+1}{v^a} - \gamma\underset{k}{v^a}) + \underset{k}{v^r}\,D\delta^i_a Q^a_r. \tag{2.18}$$

Dies kann man als die *Frenetformeln der kontravarianten Vektoren* des W—O$_n$ Raumes ansehen.

2.2. Frenetformel mit bezug auf $''D$

§ 1. zeigt, daß es im W—O$_n$ Raum verschiedene Ableitungsoperatoren gibt. Demnach wird man auch verschiedene Frenetformeln erwarten.

Im folgenden wenden wir die in der Formel (1.6) definierte Derivation wieder auf die kontravarianten Vektoren an, das heißt auf die Identität $g_{ij}\underset{0}{v^i}\,\underset{0}{v^j}=1$. Nun ist die Leibnitz-Formel gültig und es ist $''\overline{D}g_{ij}=2\gamma g_{ij}$. Daraus folgt

$$g_{ij}\underset{0}{v^i}(''\overline{D}\underset{0}{v^j} + \gamma\underset{0}{v^j}) = 0. \tag{2.19}$$

Das bedeutet, daß der Vektor $\underset{0}{v}$ orthogonal zu dem Vektor $\underset{1}{\overset{*}{v}}:={}''\overline{D}\underset{0}{v}+\gamma\underset{0}{v}$ ist. Hier tritt die invariante Ableitung des Kronecker-δ nicht auf. Bezeichnet man die Länge von $\overset{*}{\underset{1}{\bar{v}}}$ mit $\overset{*}{\underset{1}{\varkappa}}$, dann lauten die Komponenten des Einheitsvektors $\underset{1}{\bar{v}}$, der in die Richtung von $\overset{*}{\underset{1}{\bar{v}}}$ zeigt

$$\underset{1}{\bar{v}^i} := \overset{*}{\underset{1}{\varkappa}}{}^{-1}({}''\bar{D}\underset{0}{v^i} + \gamma \underset{0}{v^i}). \tag{2.20}$$

Die folgenden Berechnungen unterscheiden sich nicht von jenen, die beim Ausrechnen der Frenetformeln des Weylschen Raumes ([2], (§ 5)) auftreten.

Die Frenetformeln von ${}''\bar{D}$ bezüglich der kontravarianten Vektoren lauten unter der Bedingung, daß $\underset{0}{\bar{v}} = \underset{0}{v}$, $\overset{*}{\underset{0}{\varkappa}} = 0$ und $\overset{*}{\underset{n}{\varkappa}} = 0$ gelten,

$$''\bar{D}\underset{l}{\bar{v}^i} = -\overset{*}{\underset{l}{\varkappa}}\underset{l-1}{\bar{v}^i} + \overset{*}{\underset{l+1}{\varkappa}}\underset{l+1}{\bar{v}^i} - \gamma \underset{l}{\bar{v}^i} \quad l = 0, \ldots, n-1. \tag{2.21}$$

Für die Krümmungsskalare gelten die Formeln

$$\overset{*}{\underset{l+1}{\varkappa}} = [g_{ij}({}''\bar{D}\underset{l}{\bar{v}^j} + \overset{*}{\underset{l}{\varkappa}}\underset{l-1}{\bar{v}^j} + \gamma \underset{l}{\bar{v}^j})({}''\bar{D}\underset{l}{\bar{v}^i} + \overset{*}{\underset{l}{\varkappa}}\underset{l-1}{\bar{v}^i} + \gamma \underset{l}{\bar{v}^i})]^{1/2}. \tag{2.22}$$

Wir werden beweisen, daß die Analogie zwischen den Frenetformeln bezüglich ${}'\bar{D}$ und bzgl. ${}''\bar{D}$ nicht nur in der Bauart der Formeln besteht.

Satz 2. *Die Frenetformeln* (2.17) *bezüglich der fundamentalen invarianten Ableitung* $\bar{D}$, *beziehungsweise die Frenetformeln* (2.21) *bezüglich der Ableitung* ${}''D$ *werden durch dieselbe Vektoren und Krümmungsskalare befriedigt, das heißt*

$$\underset{l}{v} = \underset{l}{\bar{v}} \quad und \quad \underset{l}{\varkappa} = \overset{*}{\underset{l}{\varkappa}} \quad für \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Wir werden die folgende Rekursion anwenden. Nach unserer Voraussetzung ist $\underset{0}{\bar{v}^i} = \underset{0}{v^i}\left(=\dfrac{dx^i}{ds}\right)$. Gemäß (1.7a) erfüllen die auf den beliebigen Vektor v angewandten Ableitungen ${}'\bar{D}$ und ${}''\bar{D}$ nach (1.5), (1.6) die Gleichung

$$''\bar{D}v^i = \bar{D}v^i - v^q\,\bar{D}\delta^i_q. \tag{2.23}$$

Beachtet man, daß $\underset{1}{\bar{v}}$ ein Einheitsvektor ist, und substituiert man das aus (2.23) ausdrückte ${}''\bar{D}\underset{0}{v^i}$ in (2.22) für $l=1$, dann folgt

$$\overset{*}{\underset{1}{\varkappa}} = [g_{ij}(\bar{D}\underset{0}{v^i} - \underset{0}{v^q}\bar{D}\delta^i_q + \gamma\underset{0}{v^i})(\bar{D}\underset{0}{v^j} - \underset{0}{v^r}\bar{D}\delta^j_r + \gamma\underset{0}{v^j})]^{1/2}.$$

Dieses ist nach (2.21) gleich dem $\underset{1}{\varkappa}$. Aus (2.22), (2.20) und (2.23) folgt ferner $\underset{1}{\bar{v}} = \underset{1}{v}$. Nehmen wir jetzt an, daß $\underset{l}{\bar{v}} = \underset{l}{v}$ und $\overset{*}{\underset{l}{\varkappa}} = \underset{l}{\varkappa}$ für alle $l \leqq p-1$ gilt. Dann kann man aus dem Ausdruck (2.14) für $\underset{p}{\varkappa}$, sowie aus (2.22) und (2.23) erkennen daß $\overset{*}{\underset{p}{\varkappa}} = \underset{p}{\varkappa}$ ist. Aus (2.21) folgt

$$\underset{p}{\bar{v}^i} = \overset{*}{\underset{p}{\varkappa}}{}^{-1}({}''\bar{D}\,\underset{p-1}{\bar{v}^i} + \overset{*}{\underset{p-1}{\varkappa}}\,\underset{p-1}{\bar{v}^i} + \gamma\,\underset{p-1}{\bar{v}^i}). \tag{2.24}$$

Da nach unserer Annahme $\underset{p-2}{\bar{v}} = \underset{p-2}{v}$, $\underset{p-1}{\bar{v}} = \underset{p-1}{v}$, $\overset{*}{\underset{p-1}{\varkappa}} = \underset{p-1}{\varkappa}$ gelten, zeigt die Relation

(2.23), daß die rechte Seite von (2.24) wegen (2.13) gleich $\underset{p}{v}^i$ ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Im folgenden wird der Stern über dem Krümmungsskalar bedeuten, daß die Ableitung $''\bar{D}$ angewendet wird. So folgt aus (2.24)

$$\underset{l}{v}^i = \overset{*}{\underset{l}{\varkappa}}{}^{-1}\,({}''\bar{D}\underset{l-1}{v}^i + \overset{*}{\underset{l-1}{\varkappa}}\underset{l-2}{v}^i + \gamma \underset{l-1}{v}^i) \quad l = 1, \ldots, n-1 \tag{2.25}$$

wobei $\underset{l}{v}^i$ die mit Hilfe der Ableitung $''\bar{D}$ ausgerechneten Koordinaten des Vektors $\underset{l}{v}$ sind (vgl. mit (2.13)).

Aus (2.21) bekommt man aufgrund des Satzes 2 unter Benützung von $''Dv^i = P^i_a{}''\bar{D}v^a$ die *Frenetformeln der auf die kontravarianten Vektoren angewandten invarianten Ableitung* $''D$ in der Form

$$''D\underset{l}{v}^i = P^i_a(-\overset{*}{\underset{l}{\varkappa}}\underset{l-1}{v}^a + \overset{*}{\underset{l+1}{\varkappa}}\underset{l+1}{v}^a - \gamma \underset{l}{v}^a);\ l = 0, \ldots, n-1;\ \overset{*}{\underset{0}{\varkappa}} = 0;\ \overset{*}{\underset{n}{\varkappa}} = 0. \tag{2.26}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von den bekannten Frenetformeln des Riemannschen Raumes in der Multiplikation mit dem Tensor P^i_j und in dem aus der Rekurrenz des metrischen Grundtensors folgenden Glied $\gamma\underset{l}{v}^a$.

3. §. Der kovariante Fall

Im W—O$_n$ Raum unterscheiden sich die invarianten Ableitungen der kovarianten und kontravarianten Vektoren voneinander. Geht man statt $\underset{0}{v}^i := \dfrac{dx^i}{ds}$ von dem kovarianten Vektorfeld $\underset{0}{v}_j := g_{ij}\underset{0}{v}^i$ aus, so bekommt man den Verschiedenen invarianten Ableitungen entsprechend neue und von den bisherigen etwas verschiedne Frenetformeln. Wir gründen unsere weiteren Berechnungen auf die Tatsache, daß das im vorigen Paragraphen mit den kontravarianten Vektoren konstruierte n-Bein identisch ist mit dem auf äquivalente Weise für die kovarianten Vektoren bestimmten n-Bein; der Beweis ist dem in [4] angegebenen ähnlich. Äquivalenz bedeutet hier, daß die entsprechenden Vektoren der zwei n-Bein durch (3.1) verbunden sind. Ausserdem befriedigen die verwendeten Vektoren wieder die Bedingung (B) des vorigen Paragraphs.

Die Untersuchung beginnt wieder mit der Anwendung der invarianten Ableitung $'\bar{D}$. Die oben beschriebenen Berechnungen werden wir nicht nochmals wiederholen. Geht man von (2.17) aus und wendet man die Identität

$$\underset{l}{v}^i = g^{ij}\underset{l}{v}_j \tag{3.1}$$

an, sowie die aufgrund (1.7a) geltende Leibnitz-Formel, die Relation (1.9) und eine Kontraktion mit g_{jt}, so bekommt man

$$'\bar{D}\underset{k}{v}_t = \underset{k}{\varkappa}\underset{k-1}{v}_t + \underset{k+1}{\varkappa}\underset{k+1}{v}_t - \underset{k}{v}_j\bar{D}\delta^j_t + \gamma\underset{k}{v}_t \tag{3.2}$$

(wo γ in (2.1) definiert ist), das heißt

$$(3.3)\qquad 'D\underset{k}{v_i} = P_i^t(-\underset{k}{\varkappa}\underset{k-1}{v_t} + \underset{k+1}{\varkappa}\underset{k+1}{v_t} + \gamma\underset{k}{v_t}) - \underset{k}{v_t}Q_r^t D\delta_i^r.$$

Dies ist die *Frenetformel des* W—O$_n$ *Raumes bezüglich der absoluten Ableitung 'D der kovarianten Vektoren.*

Wir könnten, die durch die Formel (3.2) bestimmten Krümmungsskalare mit $\overset{**}{\underset{k}{\varkappa}}$ bezeichnen. Die zwei Sterne bedeuten, daß sie mit Hilfe der fundamentalen invarianten Ableitung $'\bar{D}$ der kovarianten Vektoren bestimmt sind.

Letztens wenden wir die fundamentale invariante Ableitung $''\bar{D}$ an. Aus der Formel (2.21), aufgrund des Satzes 2 und nach Einsetzen der rechten Seite von (3.1), bekommt man

$$(3.4)\qquad D\underset{k}{v_i} = P_i^t(-\underset{k}{\varkappa}\underset{k-1}{v_t} + \underset{k+1}{\varkappa}\underset{k+1}{v_t} + \gamma\underset{k}{v_t})$$

wobei ähnlich wie oben, die Gleichungen $''\bar{D}g^{ij} = -2\gamma g^{ij}$ und (1.7b) verwendet wurden. Diese Formel wird man die *Frenetformel von kovarianten Vektoren des* W—O$_n$ *Raumes* nennen.

Aufgrund des oben angeführten können die in der Formel (3.4) auftretenden Krümmungsskalare mit $\overset{***}{\underset{k}{\varkappa}}$ bezeichnet werden.

Bemerkungen. 1. Im Falle $P_j^i = \delta_j^i$ unterscheidet sich weder die Formel (3.4) noch der kovariante Teil der Übertragung des W—O$_n$ Raumes (siehe (1.1), (1.5), bzw. (1.6)) von der Übertragung des Weylschen Raumes.

2. Wir erhalten erneut die Frenetformel des Riemannschen Raumes, falls in (3.4), (2.18), (2.26), (3.3) $P_j^i = \delta_j^i$ ist und $\gamma = 0$ gilt, also ein Riemannscher Raum vorliegt.

3. Es ist möglich, aus jeder der Formeln (2.18), (2.26), (3.3), (3.4) die anderen-herzuleiten, wenn man den Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Vektoren und auch die Beziehung zwischen den invarianten Ableitungen $'D$ und $''D$ herleitet und verwendet.

Schriftenverzeichnis

[1] A. Moór, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Masstensor, *Acta Sci. Math. Szeged* **40** (1978), 129—143.

[2] A. Moór, Über die durch Kurven bestimmten Sektionalkrümmungen der Finslerschen und Weylschen Räume, *Publ. Math. Debrecen* **26** (1979), 205—214.

[3] Dj. F. Nadj, On subspaces of Riemann—Otsuki space, *Publ. de l'Inst. Math. Beograd* **30** (44) (1981), 53—58.

[4] Dj. F. Nadj, The Frenet formulae of the Riemann—Otsuki Space, *Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad* MS, **16**, 1 (1986) 95—106.

[5] T. Otsuki, On general connections I, *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1959—60), 99—154.

[6] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорний анализ. *Изд. Наука, Москва*, **1953**.

[7] L. Tamássy, Frenetschen Formeln für Kurven in affinzusammenhängenden Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1969), 147—159.

(Eingegangen am 31. August, 1987)