Существование нормальных делителей у конечной группы

Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов-на Дону)

Памяти проф. К. Бузаши

§ 1. Введение

Пусть G — (всегда в этой статье конечная) группа; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G; c. d. $G=\{\chi(1)|\chi\in\in\mathrm{Irr}(G)\}$; $X(G)$ — таблица характеров группы G; $X_1(G)$ — первый столбец таблицы $X(G)$ (в этом столбце стоят стелени неприводиных характеров группы G с соответствующими кратностями). Известно несколько результатов о влиянии c. d. G на строение группы G. Приведем некоторые из них.

Лемма 1.1. (1) (теорема 6.15 из [1]) (1) *Если $n\in$c.* d. *G, то n делит $|G:A|$ для лыбой абелевой нормальной подгруппы A группы G.*

(2) *Группа G имеет инвариантное абелево p-дополнение гогда и только тогда, когда $\chi(1)$-сгепень p для любого нелинейного $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$.*

(3) *Если G разрешима и p не делит $\chi(1)$ для всех $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, то $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$ абелева и нормальна в G.*

Доказательства (2) и (3) см. в [1] (это теоремы 6.9 и 12.34 соответственно).

В этой статье изучается влияние c. d. G и $X_1(G)$ на строение G. Тройку групп (G, H, H_0) назовем W-тройкой, если $H_0\lhd H<G$ и $H\cap H^x\leqq H_0$ для всех $x\in G-H$.

Лемма 1.2. (первая теорема Виланда [2]). *Пусть (G, H, H_0) — W-тройка. Тогда $G_0=G-\big(\bigcup\limits_{x\in G}(H-H_0)^x\big)$ — нормальная нодгруппа в $G, HG_0=G$ и $H\cap\cap G_0=H_0$.*

Если $H_0=1$ в лемме 1.2, то $G=HG_0$ называется группой Фробениуса и обозначается $G=(H, G_0)$, H называется дополнительным множителем, а G_0-ядром группы Фробениуса G.

В § 2 доказывается обращение теоремы Виланда, а также несколько обращений теоремы Фробениуса. В теореме 2.2 даны короткие доказательства двух других теорем Виланда. Отметим теорему 2.6, из которой следует, что по первому столбцу таблицы характеров группы можно узнать, является ли она группой Фробениуса. В § 3 изучаются группы G_1, для которых $X_1(G_1)=X_1(G)$ и

G-минимальная ненильпотентная группа или содержит абелеву нормальную подгруппу простого индекса р. В § 4 обобщаются леммы 1.1 (2), (3). В § 5 приводится список нерешенных вопросов.

Введем дополнительные обозначения: $\mathrm{Lin}(G)$ — множество всех линейных (одномерных) характеров в $\mathrm{Irr}(G)$; $\mathrm{Irr}_1(G)$ — множество всех нелинейных характеров в $\mathrm{Irr}(G)$; если $H \leqq G$, то $\mathrm{Irr}(G, H) = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | H \not\leqq \ker \chi\}$. Из доказываемой ниже леммы 1.3 следует, что если G неабелева и $1 < H < G$, то $\mathrm{Irr}(G, H) \cap \mathrm{Irr}_1(G)$ непусто. Если N нормальна в G (пишем $N \trianglelefteq G$), то множества $\mathrm{Irr}(G/N)$ и $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | N \leqq \ker \chi\}$ всегда отождествляются. Если $N \trianglelefteq G$, то $N = \bigcap_{\mathrm{Irr}(G/N)} \ker \chi$. Этот результат уточняется ниже.

Лемма 1.3. *Пусть $N \lhd G$ и $G' \not\leqq N$. Тогда* $N = \bigcap_{\mathrm{Irr}_1(G/N)} \ker \chi$.

Доказательство. Переходя, если $N > 1$, к G/N, можем, не уменьшая общности считать, что $N = 1$.

Для $\lambda \in \mathrm{Lin}(G)$, $\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$ имеем $\lambda\chi \in \mathrm{Irr}_1(G)$. Поэтому отображение. $(\lambda, \chi) \to \lambda\chi$ из $\mathrm{Lin}(G) \times \mathrm{Irr}_1(G)$ в $\mathrm{Irr}_1(G)$ определяет действие $\mathrm{Lin}(G)$ на $\mathrm{Irr}_1(G)$ Пусть Ω — одна из орбит относительно этого действия, и положим $D = \bigcap_{\Omega} \ker \chi$. Допустим, что $D \not\leqq G'$. Тогда существуют $\lambda \in \mathrm{Lin}(G)$ и $x \in D - G'$ с $\lambda(x) \neq 1$. Но для этого x и $\chi \in \Omega$ имеем $\chi(x) = \chi(1) \neq 0$. Так как $\lambda\chi \in \Omega$, то $(\lambda\chi)(x) = (\lambda\chi)(1) = \lambda(1)\chi(1) = \chi(1)$. Но из

$$\chi(1) = (\lambda\chi)(x) = \lambda(x)\chi(x) = \lambda(x)\chi(1)$$

следует $(\lambda(x) - 1)\chi(1) = 0$, противоречие. Итак, $D \leqq G'$. Тогда $M = \bigcap_{\mathrm{Irr}_1(G)} \ker \chi \leqq G'$, и $M = M \cap G' = \bigcap_{\mathrm{Irr}(G)} \ker \chi = 1$. $\square$

Пусть G-минимальная ненильпотентная группа. Тогда $G = PQ$, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ нормальна в G. Если $Q \cap Z(G) = 1$, то Q элементарная. Если $Q \cap Z(G) > 1$, то $Q \cap Z(G) = Z(Q)$ и Q специальная (то есть ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают). Далее, $|G/Z(G)| = pq^b$, где b-порядок $q \pmod p$. Если $|Q \cap Z(G)| = q^c$, то G называется $S(p^a, q^b, q^c)$-группой. Отметим, что если b нечетно, то $c = 0$. Если же b четно, то $c \leqq \frac{1}{2} b$. Результаты этого абзаца принадлежат О. Ю. Шмидту, Ю. А. Гольфанду, Л. Редеи (эти же результаты без доказательства были сформулированы в известной статье Ф. Холла и Г. Хигмана о р-длине).

§ 2. Обращения теорем Виланда и Фробениуса

1°. Пусть $H < G$ и $H = H_1, H_2, \ldots, H_n$-класс всех сопряженных с H подгрупп группы G, $D_1 = H_1 \cap (H_2 \cup \ldots \cup H_n)$, $|G| = g$, $|H| = h$. Очевидно, $H_1 - D_1$- Т. І. подмножество в $G \cdot D_1$ не обязательно является подгруппой группы H_1 даже в ситуации, рассмотренной в лемме 1.2. Случай $D_1 = H_1$ для нас неинтересен; пусть $D_1 \subset H_1$, и пусть $D_1 \subseteqq H_0 < H$, $|H_0| = h_0$. Положим $G(H_0) =$

$=G-\left(\bigcup\limits_{x\in G}(H-H_0)^x\right)$, $|G(H_0)|=g_0$. Мы имеем $g_0=|G(H_0)|=g-n(h-h_0)$. По условию $n=g/hs$ с натуральным s. Вычислим

$$g_0-\frac{g}{h}h_0=g-\frac{g}{hs}(h-h_0)-\frac{g}{h}h_0=g\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{h_0}{h}\right)\geqq 0.$$

Поэтому $g_0\geqq\frac{g}{h}h_0$. Нас интересует случай, когда $G(H_0)$ содержит минимально возможное число элементов. Тогда $g_0=\frac{g}{h}h_0$. Это дает $s=1$, так что $N_G(H)=$ $=H$. Очевидно, $G(H_0)\cap H=H_0$; поэтому, если $G(H_0)<G$, то $H_0<H$ (читается: H_0-собственная подгруппа группы H). Если $G(H_0)\lhd G$, то $H_0\lhd H$. Лемма 1.2 утверждает обратное: если $H_0\lhd H$, то $G(H_0)\lhd G$. Мы видим, что между $H_0\lhd H$ и $G(H_0)\lhd G$ существует взаимно однозначное соответствие: $H_0\leftrightarrow G(H_0)$. Неизвестно, будет ли $G(H_0)$ подгруппой, если H_0-подгруппа в H.

2^0. Лемма 2.1. *Пусть* $(G, H, H_0)-W$*-тройка. Тогда для любого неглавного* $\varphi\in\mathrm{Irr}\,(H/H_0)$ *имеем* $((\varphi-\varphi(1)1_H)^G)_H=\varphi-\varphi(1)1_H$.

Доказательство. Положим $\mu=\mu(\varphi)=\varphi-\varphi(1)1_H$. Тогда для $x_0\in H_0$ имеем $\mu(x_0)=0$. Для $x\in H$ имеем

$$\mu^G(x)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot\mu(yxy^{-1}),$$

где $\dot\mu$ совпадает с μ на H и исчезает на $G-H$. Пусть $\dot\mu(yxy^{-1})\neq 0$. Тогда $yxy^{-1}\notin H_0$ и $yxy^{-1}\in H\cap yHy^{-1}$; поэтому $y\in H$ и $\dot\mu(yxy^{-1})=\mu(yxy^{-1})=\mu(x)$. Если $x\in H-H_0$, то $yxy^{-1}\notin H_0$ для всех $y\in G$. и мы идеем $\mu^G(x)=\mu(x)$. Если же $x\in H_0$, то $yxy^{-1}\in H_0$ или $yxy^{-1}\in G-H$ для $y\in G$, и тогда $\mu^G(x)=0=\mu(x)$. □

Теорема 2.2. *Пусть* $H_0\lhd H\leqq N=N_G(H)<G$.

(1) *Если для любого неглавного* $\varphi\in\mathrm{Irr}\,(H/H_0)$ *имеем* $((\varphi-\varphi(1)1_H)^G)_H=$ $=\varphi-\varphi(1)1_H$, *то* $(G, H, H_0)-W$*-тройка.*

(2) *(вторая теорема Виланда). Пусть* $H\cap H^x\leqq H_0$ *для всех* $x\in G-N$ *и* $N=N_0H$ *с* $N_0\lhd N$ *и* $N_0\cap H=H_0$. *Если* $(|N:H|, |H:H_0|)=1$, *то* $(G, N, N_0)-$ $-W$*-тройка.*

(3) *(третья теорема Виланда) Пусть* $H\cap H^x\leqq H_0$ *для всех* $x\in G-N$. *Положим* $|H:H_0|=j$, $|G|=mj$ *и пусть* $(m, j)=1$. *Если число решений уравнения* $x^m=1$ *в* G *равно* m, *то они составляют подгруппу в* G.

Доказательство. (1) Для любого неглавного $\varphi\in\mathrm{Irr}\,(H/H_0)$ положим, как и в доказательстве леммы 2.1, $\mu(\varphi)=\mu=\varphi-\varphi(1)1_H$. По предположению имеем

$\langle\mu^G, \mu^G\rangle=\langle\mu, (\mu^G)_H\rangle=\langle\mu, \mu\rangle=1+\varphi(1)^2$,

$\langle\mu^G, 1_G\rangle=\langle\mu, 1_H\rangle=-\varphi(1)$, так что $\mu^G=\varphi^0-\varphi(1)1_G$ с $\langle\varphi^0,\varphi^0\rangle=1$ и $\langle\varphi^0, 1_G\rangle=0$. Так как $\varphi^0(h)=\mu^G(h)+\varphi(1)=\mu(h)+\varphi(1)=\varphi(h)$, $h\in H$, и $\varphi^0(1)=\varphi(1)>0$, то $\varphi^0\in\mathrm{Irr}\,(G)$ и φ^0-продолжение φ на G. Положим $G_0=\cap\ \ker\varphi^0\lhd G$; здесь φ пробегает все неглавные характеры из $\mathrm{Irr}\,(H/H_0)$. Если $x\in G_0\cap H$, то $\varphi(x)=\varphi^0(x)=\varphi^0(1)=\varphi(1)$ и $x\in\ker\varphi$. Итак, $G_0\cap H\leqq H_0$. Так как $H_0\leqq\cap\ker\varphi^0=G_0$, то $G_0\cap H=H_0$. Положим $1_{H/H_0}\neq\varphi\in\mathrm{Irr}\,(H/H_0)$, $D=G-\big(\bigcup\limits_{x\in G}(H-H_0)^x\big)$. Так как $\mu^G(y)=\mu(y)=0$ для всех $y\in H_0$, то μ^G исчезает на D по определению μ^G. Поэтому для $z\in D$ имеем $\varphi^0(z)=\mu^G(z)+\varphi(1)=\varphi(1)=\varphi^0(1)$, так что $z\in\ker\varphi^0$, и ввиду произвола в выборе $z\in D$ имеем $D\leqq G_0$. Из рассмотрений п. 1^0 следует, что $|D|\geqq\frac{g}{h}\,h_0$. Но из $|G_0H|=\frac{|G_0|\cdot|H|}{|G_0\cap H|}\geqq\frac{|D|\cdot|H|}{|H_0|}\geqq\frac{gh_0h}{h_0h}=g$ следует $G_0H=G$, $|G_0|=\frac{g}{h}h_0\leqq\leqq|D|$. Вместе с доказанным выше это дает $D=G_0$, $|D|=\frac{g}{h}\,h_0$. Из 1^0 следует, что $N_G(H)=H$, $H\cap H^x\leqq H_0$, $x\notin H$, $H-H_0$ — Т. I. подмножество в G, так что $(G, H, H_0)-W$-тройка.

(2) Пусть $x\in G-N$ и x нормализует N. Пусть π-множество всех простых делителей числа $|H{:}H_0|$, а N^π — подгруппа в N, порожденная всеми ее π-элементами. Тогда $N^\pi\leqq H$ (так как $H\trianglelefteq N$ и $|N{:}H|$ — π'-число), и поэтому $(N^\pi)^x=N^\pi$. Поэтому $N^\pi\leqq H\cap H^x\leqq H_0$, противоречие. Итак, N самонормализуема в G. Пусть $a=a_\pi\cdot a_{\pi'}=a_{\pi'}\cdot a_\pi\in N\cap N^x$ для некоторого $x\in G-N$ (здесь a_π, $a_{\pi'}$ — π — и π'-части a соответственно). Тогда $a_\pi\in N^\pi\leqq H$, $a_\pi\in(N^\pi)^x\leqq H^x$. Это дает $a_\pi\in H\cap H^x\leqq H_0\leqq N_0$. Из $a_\pi\cdot\in N$ следует $a_{\pi'}\in N^{\pi'}\leqq N_0$, и поэтому $a=a_\pi a_{\pi'}\in N_0$. Итак, $N\cap N^x\leqq N_0$ и (G, N, N_0) — W-тройка.

(3) Пусть π-множество всех простых делителей числа m, и пусть x — не π-элемент в G. Тогда $x=x_px_{p'}=x_{p'}x_p$ для $p\in\pi'$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_p\in H$ (по теореме Силова). Тогда $x_p\in H\cap H^x$ и $x_p\notin H_0$; поэтому $x\in N$. Тогда $G(N^\pi)=G-\big(\bigcup\limits_{x\in G}(N-N^\pi)^x\big)$ состоит сплошь из π-элементов. Из рассмотрений п. 1^0 следует $|G(N_0)|\geqq|G(N^\pi)|=|G{:}N|\cdot|N^\pi|\geqq|G{:}N|\cdot|N_0|=m$; здесь $N_0-\pi$-холловская подгруппа в N. Тогда $N_0\geqq H_0$. Поэтому по условию $G(N_0)=G(N^\pi)$ имеет порядок m. Отсюда выводим $N_0=N^\pi\lhd N$, и (3) теперь следует из (2). □

Замечание. 1. Пусть G_0 — построенная в теореме 2.2 (1) подгруппа. Тогда из $x\in G_0-H_0$ следует $C_G(x)\leqq G_0$. Это же верно и в ситуации, рассмотренной в п. 1^0 при $g_0=\frac{g}{h}\,h_0$.

2. Пусть снова (G, H, H_0) — W-тройка, а $G_0=G(H_0)$. Пусть F-наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H_0. Тогда $F=G_0$ или $G/F=(HF/F, G_0/F)$.

3. Теорему 2.2(1) можно, благодаря лемме 2.1, рассматривать как обращение леммы 1.2.

3^0. Пусть $m>1$ — собственный делитель $|G|$ — порядка группы G. Положим $\mathrm{Irr}\,(G, m)=\{\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)|m|\chi(1)\}$, $N^{[m]}=\cap\ \ker\chi$, где χ пробегает все множество $\mathrm{Irr}\,(G)-\mathrm{Irr}\,(G, m)$.

Теорема 2.3. *Пусть* $m>1$ *— собственный делитель* $|G|$.

(1) $|G:N^{[m]}|\geqq(m^2, |G|)$, *где* (a, b) *— наибольший общий делитель натуральных чисел* a *и* b.

(2) G *— группа Фробениуса с ядром индекса* m *тогда и только тогда, когда* $|G:N^{[m]}|=m$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Irr}\,(G, m)=\{\chi^1, \dots, \chi^s\}$, $\mathrm{Irr}\,(G)-\mathrm{Irr}\,(G, m)=\{\tau^1, \dots, \tau^r\}$. Тогда $a=\sum_{i=1}^{s}\chi^i(1)^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, m^2)$, так что $a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(m^2, |G|))$. Поэтому

$$b = \sum_{i=1}^{r}\tau^i(1)^2 = |G|-|a| \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,(m^2, |G|)).$$

Из $1_G\notin \mathrm{Irr}\,(G, m)$ следует $b\geqq(m^2, |G|)$. Так как $|G:N^{[m]}|\geqq b$, это доказывает (1).

Если G — группа Фробениуса с ядром индекса m, то $|G:N^{[m]}|=m$. (см. теорему 6.34 из [1]). Пусть теперь $|G:N^{(m)}|=m$. Тогда из (1) следует $(m^2, |G|)\leqq m$, откуда $(m^2, |G|)=m$, $(m, |G|/m)=1$ и $N=N^{[m]}$ — холловская подгруппа в G. Возьмем в $\mathrm{Irr}\,(N)$ неглавный характер φ, и пусть χ-неприводимая компонента индуцированного характера φ^G. По теореме Клиффорда (теорема 6.2 в [1]) $\varphi(1)$ делит $\chi(1)$. Так как $1_N\neq\varphi$ и φ-компонента χ_N, то $N\nleqq \ker\chi$, так что m делит $\chi(1)$ по условию. Из $(\varphi(1), m)\leqq(|N|, m)=1$ следует, что $m\varphi(1)=|G:N|\varphi|(1)=\varphi^G(1)$ делит $\chi(1)$. Поэтому $\varphi^G=\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ для любого неглавного $\varphi\in\mathrm{Irr}\,(N)$.

Возьмем $x\in N^{\#}$ и предположим, что $C_G(x)\nleqq N$. Тогда $x^y=x$ для некоторого $y\in C_G(x)-N$. Для $n\in N$ имеем $(x^n)^y=(x^y)^{y^{-1}ny}=x^{y^{-1}ny}$, а так как $y^{-1}ny\in N$, то x и x^{ny} сопряжены в N. Ввиду произвола в выборе $n\in N$ это означает, что y нормализует N-класс, содержащий $x\in N^{\#}$. Поэтому по лемме Брауэра (теорема 6.32 в [1]) в $\mathrm{Irr}\,(N)$ имеется неглавный характер φ с $\varphi^y=\varphi$, то есть группа инерции φ в G шире N. Поэтому по теореме 6.11 из [1] характер φ^G приводим. Так как это противоречит доказанному в предыдущем абзаце, $C_G(x)\leqq N$ для всех $x\in N^{\#}$, и G-группа Фробениуса с ядром $N=N^{[m]}$. □

Следствие 2.4. *Пусть* N*-подгруппа индекса* $m>1$ *в* G*. Тогда и только тогда* G*-группа Фробениуса с ядром* N*, когда* m *делит* $\chi(1)$ *для всех* $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G, N)$.

Доказательство. Если G-группа Фробениуса с ядром N индекса m, $\mathrm{Irr}\,(G, N)=\mathrm{Irr}\,(G, m)$ (это легко усмотреть из доказательства теоремы 2.3(2); см. также теорему 6.34 из [1]). Обратно, пусть m делит $\chi(1)$ для всех $\chi\in\mathrm{Irr}(G, N)$. Но $N\leqq\bigcap\ker\chi=D\lhd G$ (здесь χ пробегает все множество $\mathrm{Irr}\,(G)-\mathrm{Irr}\,(G, N)$). Так как $|G:D|\geqq m$ по теореме 2.3(1) ,это дает $D=N=N^{[m]}$, и результат следует из теоремы 2.3(2). □

Следствие 2.5. *Пусть* N*-подгруппа индекса* $m>1$ *в* G*. Тогда и только тогда* G*-группа Фробениуса с ядром* N*, когда* $\varphi^G\in\mathrm{Irr}\,(G)$ *для всех неглавных* $\varphi\in\mathrm{Irr}\,(N)$.

Доказательство. Если G-группа Фробениуса с ядром N, результат следует из теоремы 6.34 в [1]. Докажем обратное. Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G, N)$; тогда χ_N имеет неприводимую компоненту $\varphi\neq 1_N$. По условию $\varphi^G\in\mathrm{Irr}\,(G)$; поэтому

$\varphi^G=\chi$ и m делит $m\varphi(1)=\varphi^G(1)=\chi(1)$. Результат теперь следует из следствия 2.4. □

Теорема 2.6. (1) *Пусть* $m>1$ *— собственный делитель* $|G|$ *и* $m=\Sigma\chi(1)^2$, *где* χ *пробегает все множество* $\operatorname{Irr}(G)-\operatorname{Irr}(G, m)$. *Тогда* G *— группа Фробениуса с ядром индекса* m. *Обратное тоже верно.*

(2) *Пусть* $G=(H, N)$ *и* $X_1(G)=X_1(G_1)$. *Тогда* $G_1=(H_1, N_1)$, $X_1(H_1)=X_1(H)$, $X_1(N_1)=X_1(N)$.

Доказательство. (1) По теореме 2.3(1) имеем $m=\Sigma\chi(1)^2\geqq(m^2, |G|)$ (здесь χ пробегает все множество $\operatorname{Irr}(G)-\operatorname{Irr}(G, m)$); поэтому $(m^2, |G|)=m$ и $(m, |G|/m)=1$. Итак, m-холловский делитель $|G|$. Пусть π-множество всех простых делителей числа $|G|/m$. Для $p\in\pi$ пусть $P\in\operatorname{Syl}_p(G)$. Рассмотрим разложение

$$(1_P)^G = a_1\chi^1+\ldots+a_s\chi^s+b_1\tau^1+\ldots+b_k\tau^k,$$

попарно различные $\chi^i\in\operatorname{Irr}(G, m)$, $\tau^r\in\operatorname{Irr}(G)-\operatorname{Irr}(G, m)$. Положим $a=(a_1\chi^1+\ldots+a_s\chi^s)(1)$, $b=(b_1\tau^1+\ldots+b^k\tau^k)(1)$. Из $a\equiv 0 \pmod m$ и $|G:P|\equiv 0 \pmod m$ следует $b\equiv 0 \pmod m$ По закону взаимности $b_i\leqq\tau_i(1)$. Поэтому

$$b \leqq \tau^1(1)^2+\ldots+\tau^k(1)^2 \leqq m.$$

Из $1_G\in\{\tau^1, \ldots, \tau^k\}$ следует $b>0$. Поэтому $b=m$. Это дает $b_i=\tau^i(1)$ для всех $i\in\{1, \ldots, k\}$. Поэтому $\tau^i_P=b_i 1_P$ и $P\leqq\bigcap_{i=1}^{k}\ker\tau^i=D\lhd G$. Так как это верно для всех $p\in\pi$, то $|G:D|$ делит m. Из $\sum_{i=1}^{k}\tau^i(1)^2=m\leqq|G:D|$ следует $|G:D|=m$, $N=N^{[m]}=D$. Так как $\operatorname{Irr}(G/N)=\operatorname{Irr}(G)-\operatorname{Irr}(G, m)$, следствие 2.4 дает нужный результат. Обратное утверждение следует из теоремы 6.34 в [1].

(2) Пусть $X_1(G_1)=X_1(G)$, где $G=(H, N)$. Тогда

$$\Sigma\tau^i(1)^2 = \Sigma\chi^\tau(1)^2 = m,$$

где τ^i пробегает все множество $\operatorname{Irr}(G_1)-\operatorname{Irr}((G_1, m)$, а χ^τ пробегает все множество $\operatorname{Irr}(G)-\operatorname{Irr}(G, m)$. Поэтому G_1-группа Фробениуса по утверждению (1) этой теоремы. Остальные утверждения из (2) следуют из только что доказанного. □

Теорема 2.7. *Пусть* $1<N\trianglelefteq H<G$, *и пусть степени всех характеров из* $\operatorname{Irr}(H/N)$ *меньше степеней всех характеров из* $\operatorname{Irr}(H, N)$. *Если* $\varphi_1^G\in\operatorname{Irr}(G)$ *для всех* $\varphi_1\in\operatorname{Irr}(H, N)$, *то* $N\lhd G$.

Доказательство. Из леммы 1.3 следует, что $\operatorname{Irr}(H, N)$ непусто. Пусть $\varphi_1\in\operatorname{Irr}(H, N)$, $\varphi_1^G=\chi\in\operatorname{Irr}(G)$ и

$$\chi_H = a_1\varphi_1+\ldots+a_k\varphi_k \tag{1}$$

где все $a_i>0$, попарно различные $\varphi_i\in\operatorname{Irr}(H)$. По закону вза имности $a_1=1$.

Пусть $i>1$. Тогда $|G:H|\varphi_i(1)=\varphi_i^G(1)\geqq a_i\chi(1)=a_i|G:H|\varphi_1(1)$, так что $\varphi_i(1)\geqq a_i\varphi_1(1)$ и $\varphi_i\in\operatorname{Irr}(H, N)$ по условию. Но тогда $\varphi_i^G\in\operatorname{Irr}(G)$, так что

$a_i=1$, $\varphi_i^G=\chi$ для всех $i\in\{1, \dots, k\}$. Поэтому разложение (1) принимает вид

$$\chi_H = \varphi_1+\dots+\varphi_{|G:H|} \tag{2}$$

где попарно различные $\varphi_i\in \mathrm{Irr}\,(H, N)$.

Если $\psi\in\mathrm{Irr}\,(H, N)-\{\varphi_1, \dots, \varphi_{|G:H|}\}$, то $\psi^G\in\mathrm{Irr}\,(G)$, а из (2) следует $\psi^G\neq\chi$. Поэтому $\mathrm{Irr}\,(H, N)=X_1\cup\dots X_s$ — разбиение, при этом $X_i=\{\varphi_i^\alpha|1\leqq\alpha\leqq|G:H|\}$, $(\varphi_i^\alpha)^G=(\varphi_i^\beta)^G=\chi^i\in\mathrm{Irr}\,(G)$, $1\leqq i\leqq s$, $1\leqq i\leqq\alpha$, $\beta\leqq|G:H|$, характеры $\chi^1, \dots, \chi^s$
неп$(\varphi_i^\alpha)^G=(\varphi_i^\beta)^G=\chi^i\in\mathrm{Irr}\,(G)$, $1\leqq i\leqq s$, $1\leqq i\leqq\alpha$, $\beta\leqq|G:H|$, характеры $\chi^1, \dots, \chi^s$
неприводимы и попарно различны. Мы имеем

$$|H|-|H:N| = \Sigma_{i,\alpha}\varphi_i^\alpha(1)^2 = |G:H|\big(\varphi_1^1(1)^2+\dots+\varphi_s^1(1)^2\big) \tag{3}$$

$$\chi^1(1)^2+\dots+\chi^s(1)^2 = |G:H|\big(\varphi_1^1(1)^2+\dots+\varphi_s^1(1)^2\big) = |G|-|G:N|. \tag{4}$$

Положим $I=\mathrm{Irr}\,(G)-\{\chi^1, \dots, \chi^s\}$, и пусть $\tau\in I$. По закону взаимности и условию, а также из уже доказанного получается, что в разложении τ_H нет характеров из $\mathrm{Irr}\,(H, N)$, и поэтому $N\leqq\ker\tau$ для всех $\tau\in I$. Так как по (4) имеем $\sum_I \tau(1)^2=|G:N|$, то $N=\bigcap_I \ker\tau\lhd G$. □

Так как ядро группы Фробениуса нильпотентно по теореме Томпсона, то в теорема 2.7 всегда $N\neq H$.

Следствие 2.8. *Пусть $m>1$ — собственный делитель $|G|$, а $\mathrm{Irr}\,(G)=\mathrm{Lin}\,(G)\cup\mathrm{Irr}\,(G, m)$. Тогда $|G:G'|\geqq(m^2, |G|)$. Если же $|G:G'|=m$, то G-группа Фробениуса с ядром G'.*

§ 3. Решение уравнения $X_1(G)=X_1(G_1)$ для некоторых данных G_1 с несложным строением

1^0. Предварительно докажем такой вспомогательный результат.

Лемма 3.1. *Пусть G — $S(p^a, q^b, q^c)$ — группа. Тогда $\mathrm{Irr}\,(G)=M_G(1)\cup\cup M_G(p)\cup M_G(q^{b/2})$, где $M_G(k)$ — множество всех тех $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$, для которых $\chi(1)=k$. Более того, $|M_G(1)|=p^a$, $|M_G(p)|=p^{a-2}(q^b-1)$. Если $c=0$, то $M_G(q^{b/2})$ пусто. Если $c>0$, то $|M_G(q^{b/2})|=p^a(q^c-1)$.*

Доказательство. Пусть обозначения приняты такие же, как и в опрелении $S(p^a, q^b, q^c)$-группы. Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$. Если $Q\cap Z(G)\leqq\ker\chi$, то $\chi(1)=p$ по лемме 1.1(1). Пусть $Q\cap Z(G)\not\leqq\ker b$. Не уменьшая общности можем положить $\ker\chi=1$. Тогда $Z(Q)$ циклический. Поэтому и подгруппа $Q\cap Z(G)=Z(Q)$ тоже циклическая. Так как $Z(Q)$ элементарная абелеea, то $|Z(Q)|=q$ и Q экстраспециальная. Тогда, как хорошо известно, c. d. $Q=\{1, q^{b/2}\}$. Далее, χ_Q не содержит линейных компонент; поэтому $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$ по теореме Клиффорда. Но $\chi(1)^2\leqq|G/Z(G)|=pq^b$, и поэтому $\chi(1)=q^{b/2}$. Остальное очевидно. □

Теорема 3.2. *Пусть $G_1=S(p^a, q^b, q^c)$ и $X_1(G)=X_1(G_1)$. Тогда $G=S(p^d, q^b, q^c)*A$-центральное произведение. Здесь A-абелева p-группа.*

Доказательство. Из $|G_1|=X_1(G_1)\cdot X_1(G_1)=X_1(G)\cdot X_1(G)=|G|$ следует $|G|=|G_1|=p^aq^{b+c}$. Из $|M_{G_1}(1)|=|G_1:G_1'|=|M_G(1)|=|G:G'|$ следует $|G:G'|=p^a$. Пусть $G=PQ$, $P\in\mathrm{Syl}_p\,(G)$, $Q\in\mathrm{Syl}_q\,(G)$, $Q=G'$. Пусть Q_0-наибольшая нормальная подгруппа группы G, собствеено содержащаяся в Q. Мы знаем, что $c\leqq\frac{1}{2}b$ и b-порядок $q \pmod p$. Так как $G'=Q$, это дает $|Q_0|=q^c$ и $PQ_0=P\times Q_0$ по теореме Силова. Из $G'=Q$ следует, что $\langle P^x | x\in G\rangle=G$; поэтому $Q_0\leqq Z(G)$, и даже $Q_0=Q\cap Z(G)$. По лемме 1.1(1) и условию имеем c. d. $G/Q_0=\{1,p\}$. Из результата Айзекса—Пасмана (см. гл. 12 в [1] или [3]) следует, что G/Q_0 содержит абелеву подгруппу A/Q_0 индекса р. Тогда подгруппа A нильпотентная. Отсюда следует, что $|P\colon P\cap Z(G)|=p$. Пусть H-минимальная ненильпотентная подгруппа в G. Мы покажем, что $H_1=H(P\cap Z(G))=G$. Очевидно, $H(P\cap Z(G))Q=G$. Предположим, что $H_1=H(P\cap Z(G))<G$. Тогда $Q_0>1$ и H_1Q_0/Q_0 имеет силовскую q-подгруппу порядка q^b. Поэтому $p^a \| |H_1|$, $q^{b+c} \| |H_1Q_0|$, откуда $H_1Q_0=G$, $G'<H_1$, что противоречит равенству $G'=Q$. Итак, $G=H_1=H(P\cap Z(Q))$. □

2⁰. В этом пункте G_1-неабелева группа с абелевой нормальной подгруппой индекса p, $X_1(G)=X_1(G_1)$. Тогда c. d. G=c. d. $G_1=\{1,p\}$ по лемме 1.1(1). Поэтому по [3] (см. также гл. 12 в [1]) группа G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p или $G|Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p.

Отметим, что если неабелева группа H содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p, то $|H|=p|H'|\cdot|Z(H)|$.

Предположим вначале, что G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p. Тогда из $|G|=p|G'||Z(G)|=|G_1|=p|G \,|\cdot|Z(G_1)|$ следует $|Z(G)|=|Z(G_1)|$. Обратно, если G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p и $|Z(G)|=|Z(G_1)|$, то $X_1(G)=X_1(G_1)$.

Пусть теперь G не содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p. Тогда $G/Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p. Положим $|G|=g$, $|G'|=g'$, $|Z(G)|=z$, $|Z(G_1)|=z_1$. Мы имеем $|\mathrm{Irr}\,(G_1)|=\frac{g}{g'}+\frac{g-g/g'}{p^2}=pz_1+\frac{g-pz_1}{p^2}$, $|\mathrm{Irr}(G)|=z+\frac{g-z}{p^2}$. Из $|\mathrm{Irr}\,(G)|=|\mathrm{Irr}\,(G_1)|$ выводим $z=pz_1$, то есть $|G{:}Z(G)|=p^3<p^4=|G_1{:}Z(G_1)|$.

Пусть G_1 ненильпотентная, а G нильпотентная. Тогда по доказанному выше G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p. Это означает, что все силовские q-подгруппы из G при $q\neq p$ абелевы. Но тогда $|G{:}Z(G)|$-степень p. Так как $|G_1{:}Z(G_1)|=|G{:}Z(G)|$, то G_1 нильпотентна вопреки предположению. Итак, G должна быть в этом случае ненильпотентной. Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть неабелева группа G_1 содержит абелеву нормальную подгруппу индекса р. Тогда справедливы такие утверждения* $(X_1(G)=X_1(G_1))$:

(1) *Если G не содержит абелеву подгруппу индекса p, то G и G_1 нильпотентны,* $|Z(G)|=p|Z(G_1)|=|G|/p^3$.

(2) *Тогда и только тогда G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p, когда* $|Z(G)|=|Z(G_1)|$.

(3) *Если G_1 ненильпотентная, то и G ненильпотентнад.*

§ 4. Условие, необходимое и достаточное для существования инвариантного абелева π-дополнения у обобщенно разрещимой группы

Пусть π-некоторое множество простых чисел. Предположим, что $\chi(1)$ является π-числом для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Группу, обладающую этим свойством, назовем I_π-группой. Очевидно, свойство I_π переносится на факторгруппы и нормальные делители. До сих пор не найдено примера I_π-группы, содержащей подгруппу, не являющуюся I_π-группой. Интересно было бы рассмотреть эту ситуацию, не используя классификацию простых групп. В этом параграфе мы укажем обширный класс I_π-групп, у которых все подгруппы являются I_π-группами.

Следующие определения принадлежат С. А. Чунихину. Группа G называется π-разрешимой, если ее композиционные индексы равны простым числам из π или π'-числам. Группа G называется π-отделимой, если π-часть любого ее композиционнаго индекса равна 1 или степени простого числа.

Lemma 4.1. *Пусть $H < G$. Если для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ограничение $\chi_H \in \mathrm{Irr}(H)$, то любой H-класс является G-классом. В частности, любая нормальная в H* подгруппа нормальна также и в G.

Доказательство. По условию и закону взаимности

$$(1_H)^G = \lambda^1 + \ldots + \lambda^{|G:H|}, \quad \lambda^1 = 1_G,$$

попарно различные $\lambda^i \in \mathrm{Lin}(G)$. Так как $\lambda^i_H = 1_H$, то $H \leqq \bigcap_{i=1}^{|G:H|} \ker \lambda^i = D \lhd G$. Так как λ^i-попарно различные характеры в $\mathrm{Lin}(G/D)$, то $|G/D| \geqq |G:H|$, и теперь ясно, что $H = D \lhd G$)попутно мы установили, что G/H абелева). По условию и закону взаимности все G-орбиты в $\mathrm{Irr}(H)$ одноэлементны. Поэтому по лемме Брауэра (теорема 6.32 в [1]) группа G нормализует все H-классы, что и требовалось доказать.

Замечания. 1. При условии леммы 4.1 в [7] доказано, что $G' = H'$.

2. Если $H \leqq G$, то все H-классы в H являются G-классами тогда и только тогда, когда $C_G(x)H = G$ для всех $x \in H$. Если к тому же H-холловская подгруппа в G, то H выделяется в G прямым множителем.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. По теореме Шура—Цассенхауза $G = HD$ с $H \cap G = 1$, и все подгруппы порядка $|D|$ сопряжены в G. По первому утверждению этого замечания D централизует по крайней мере один элемент каждого H-класса из H. Пусть $x_1, \ldots, x_k$-представители H-классов, централизуемые подгруппой D. Положим $F = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Так как подгруппы, сопряженные с F в H, покрывают H, то $F = H$ (это легко следует из рассмотрений п. 2.1^0). Так как D централизует $F = H$, все доказано. □

Теорема 4.2. *Пусть π-некоторое множество простых чисел, группа G π-отделима или π'-разрешима. Если $\chi(1) - \pi$-число для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, то G содержит нормальное абелево π-дополнение. Обратное тоже верно.*

Доказательство. Обратное утверждение верно благодаря лемме 1.1(1). Предположим, что теорема уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$.

(*i*) *Если* $H \lhd G$ *и* $|G:H|-\pi$*-число, то теорема верна.*

Доказательство. Так как $H-\mathrm{I}_\pi$-группа, она по индукции содержит инвариантную абелеву π'-холловскую подгруппу D. Но $D \lhd G$ и $D-\pi'$-холловская подгруппа в G. □

(*ii*) *Если* $1 \neq H \lhd G$, *при этом* $H-\pi'$*-подгруппа, то теорема верна.*

Даказательство. Так как G/H — I_π-группа, она по индукции содержит нормальную π'-холловскую подгруппу D/H. По теореме Клиффорда степени неприводимых характеров группы D делят степени неприводимых характеров группы G. Поэтому степени всех неприводимых характеров группы D равны 1 по лемме 1.1(1), так что D абелева. □

Ввиду (*i*)—(*ii*) далее считаем, что $O^\pi(G)=G$, $O_{\pi'}(G)=1$.

(*iii*) *Если группа G простая. теорема верна.*

Доказательство. Если G π'-разрешима, то $|G|=p\in\pi'$ или же G является π-группой. В этом случае все доказано. Пусть $G-\pi$-отделимая группа. Тогда $\pi\cap\pi(G)=\{p\}$ (здесь $\pi(G)$-множество всех простых делителей $|G|$), G имеет инвариантное абелево p-дополнение по лемме 1.1(1), и снова $|G|=p$. □

Далее считаем, что группа G непростая.

Пусть M — максимальная нормальная подгруппа в G. Так как M — I_π-подгруппа, применение индукции и (*ii*) показывает, что M — π-подгруппа. Так как G/M простая и G — не π-группа (в противном случае нечего доказывать), то по (*i*) и (*iii*) группа G/M является π'-группой. Для $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ имеем по теореме Клиффорда

$$\chi_M = e(\theta_1+\ldots+\theta_t),$$

где попарно р«зличные $\theta_i\in\mathrm{Irr}(M)$ сопряжены относительно G. Так как $\chi(1)= =\mathrm{et}\,\theta_1(1)$ — π-число по условию и $t=|G:\mathrm{I}_G(\theta_1)|$ — π'-число (так как делит $|G|M|$), то $t=1$. Из теории проективных представлений следует, что π-число e делит π'-число $|\mathrm{I}_G(\theta_1):M|$; поэтому $e=1$ и $\chi_M\in\mathrm{Irr}(M)$. По лемме 4.1 группа G/M абелева, так что $|G/M|=p\in\pi'$, $G=PM$, где $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$ порядка p. Из леммы 4.1 и замечания 2, следующего после доказательства леммы 4.1, получаем $G=P\times M$. □

Следствие 4.3. *Пусть H-собственная подгруппа разрешимой группы G. Если простое число p делит* $\varphi(1)$ *для некоторого* $\varphi\in\mathrm{Irr}(H)$, *то p делит* $\chi(1)$ *для некоторого* $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$.

Доказательство. Предположим, что такого χ не существует. Тогда по теореме 4.2 с $\pi'=p$ в G имеется абелева инвариантная силовская p-подгруппа P. Но $P\cap H\in\mathrm{Syl}_p(H)$ и $P\cap H\lhd H$. По лемме 1.1(1) для любого $\varphi\in\mathrm{Irr}(H)$ число $\varphi(1)$ делит p'-число $|H:P\cap H|$, что противоречит условию. □

Конечно, в следствии 4.3 разрешимость группы G можно заменить p-разрешимостью. Для доказательства этого следствия без предположения о строении G следует привлечь классификацию простых групп.

§ 5. Список нерешенных вопросов

5.1. Пусть M-некоторое множество натуральных чисел, содержащее 1. Известно, что не для всякого M существует группа G с c. d. $G=M$ (так, если $M-\{1\}$ состоит из простых чисел и c. d. $G=M$, то из [4] следует, что $|M|\leqq 3$). Указать необходимые и (отдельно) достаточные условия для существования группы G с c. d. $G=M$.

5.2. Пусть $X_1(G_1)=X_1(G_2)$, и G_1 обладает одим из свойств: разрешимость, p-разрешимость, p-нильпотентность, p-замкнутость, простота. Будет ли и G_2 обладать соответствующим свойством? Если в одном из этих случаев ответ отрицательный, то представляет интерес изучение строения G_2, не обладающего соответствующим свойством.

5.3. Пусть $H<G$. Изучить расположение H в G, если для любого $\chi\in\mathrm{Irr}\,G)$ имеем $\chi_H=e(\theta_1+\ldots+\theta_k)$, где $\theta_i\in\mathrm{Irr}\,(H)$ имеют одну и ту же степень. Нетрудно построить пример пары $H<G$ с неинвариантной H.

5.4. Пусть G-прямое произведение минимальных ненильпотентных групп попарно взаимно простых порядков, $X_1(G)=X_1(G_1)$. Изучить строение G_1.

5.5. Пусть группа G обладает следующими свойствами:

(а) Если $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$ и $\chi(1)=p_1^{a_1}\ldots p_k^{a_k}$ (каноническое разложение), то $\chi=\chi_1\cdots\chi_k$ с $\chi_i\in\mathrm{Irr}\,(G)$ и $\chi_i(1)=p_i^{a_i}$ $1\leqq i\leqq k$.

(б) Если $\chi,\tau\in\mathrm{Irr}\,(G)$ с $(\chi(1),\tau(1))=1$, то $\chi\tau\in\mathrm{Irr}\,(G)$.

(в) Если $P_1,\ldots,P_t$-представители классов силовских подгрупп группы G, то $|\mathrm{Irr}\,(G)|=\prod_{i=1}^{t}|\mathrm{Irr}\,(P_i)|$.

Всегда ли такая группа G нильпотентна?

5.6. Пусть $P_1,\ldots,P_t$ такие же, как и в 5.5(в). Всегда ли $|\mathrm{Irr}\,(G)|\leqq\prod_{i=1}^{t}|\mathrm{Irr}\,(P_i)|$? Верно ли, что G, удовлетворяющая 5.5(в), нильпотентная?

5.7. Пусть $X_1(G)=X_1(S_n)$. Верно ли, что $G\cong S_n$? Это так, если $n\leqq 6$ (это вытекает из полученной автором классификации всех G с $|\mathrm{Irr}\,(G)|\leqq 12$).

5.8. Пусть $X_1(G)=X_1(A_n)$. Верно ли, что $G\cong A_n$? Это так при $n\leqq 7$. Аналогичные вопросы можно ставить и для других интересных серий групп. Можно ли решать такие вопросы, не апеллируя к классификации простых групп?

Отметим, что положительное решение предыдущих двух вопросов дало бы существенное усиление результатов Нагао [5] и Оямы [6] об определяемости S_n и A_n их таблицами характеров.

5.9. Существуют ли какие-либо тесные свизи между $\exp G_1$ и $\exp G_2$, если $X(G_1)=X(G_2)$? Таких связей наверняка нет в случае $X_1(G_1)=X_1(G_2)$ (кроме того, что вытекает из равенства порядков групп G_1 и G_2).

Отметим, что проф. С. Д. Берман построил две группы G_1 и G_2 с $X_1(G_1)=X_1(G_2)$, у которых различные наборы длин классов сопряженных элементов (устное сообщение). Кроме того, Г. Хигман показал, что таблица характеров определяет состав простых делителей порядков элементов группы, но не их порядки, разумеется (независимо и несколько ранее этот результат появился в неопубликованной кандидатской диссертации А. И. Саксонова (Минск 1967).

5.10. Изучить детальнее строение подгрупп, участвующих в формулировке первой теоремы Виланда.

5.11. Можно ли в теореме 2.7 удалить предположение о степенях характеров из $\mathrm{Irr}\,(H)$?

5.12. Пусть G — p-группа максимального класса, $X_1(G_1)=X_1(G)$. Верно ли, что и G_1 тоже максимального класса? Ответ положителен при $p=2$

5.13. Несет ли $X_1(G)$ какую-либо информацию о порядке $Z(G)$?

5.14. Пусть M-некоторое множество натуральных чисел, $a, b \in M$. Скажем, что a, b связаны в M, если существует такая последовательность $a_0=a,\ a_1,\dots,\dots, a_n=b$ чисел из M, что $(a_i, a_{i+1})>1$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Отношение связанности является отношением эквивалентности, и относительно него M разбивается на $\sigma(M)$ компонент сявзности. Нетрудно показать, что для разрешимой группы G имеем $\sigma(\mathrm{c.\,d.}\ G) \leqq 3$. Существует ли такое натуральное число, c, что $\sigma(\mathrm{c.\,d.}\ G) \leqq c$ для любой конечной группы G? Вероятно, чаще всего $\sigma(\mathrm{c.\,d.}\ G)=2$ или 3. Вычислить $\sigma(\mathrm{c.\,d.}\ G)$ для $G=A_n, S_n, GL_n$ и т. д. По-видимому, если G разрешима и $\sigma(\mathrm{c.\,d.}\ G)=3$, то нильпотентная длина G невелика.

5.15. Пусть обозначения такие же, как и в п. 2.1. Верно ли, что всегда $G(H_0)H=G$?

5.16. Пусть A — абелева группа, B — регулярная группа перестановок. Найти c. d. $(A\mathrm{wr}\, B)$.

Вопрос 5.16 возник из таких рассмотрений. Пусть χ — точный неприводимый характер p-группы $G, \chi(1)=p^n$. Тогда $\chi=\lambda^G$, где λ — линейный характер подгруппы H индекса p^n в G. Так как G — мономиальная группа, то $G \leqq A\mathrm{wr}\,\Sigma_n$, где $\Sigma_n \in \mathrm{Syl}_p\,(S_p n)$, A абелева, так что $\max\,\{\varphi(1) | \varphi \in \mathrm{Irr}\,(G)\} \leqq \leqq \max\,\{\tau(1) | \tau \in \mathrm{Irr}\,(A\mathrm{wr}\,\Sigma_n)\}$. Имеется гипотеза, что $\max\limits_G\,\{\varphi(1) | \varphi \in \mathrm{Irr}(G)\tau = |\Sigma_n|$. Эта гипотеза опровергается, если $\max\,\{\tau(1) | \tau \in \mathrm{Irr}\ (A\mathrm{wr}\,\Sigma_n)\} < |\Sigma_n|$ для абелевой A.

Цитированная литература

[1] I. M. Isaacs, Character theory of finite groups, *Academic Press. New York*. 1976.
[2] H. Wielandt, Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen, *Math. Nachr.* **18** (1958), 274—280.
[3] I. M. Isaacs, D. S. Passman, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters, *Pacific J, Math.* **15** (1965), 877—903.
[4] I. M. Isaacs, D. S. Passman, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters II, *Pacific J. Math*, **24** (1968), 467—510.
[5] H. Nagao, On the groups with the same table of characters as symmetric groups, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A*. **8** (1957), 1—8.
[6] T. Oyama, On the groups with the same table of characters as alternating groups, *Osaka J. Math.* **1** (1964), 91—101.
[7] Я. Г. БЕРКОВИЧ, Соотношения между числами классов группы и подгруппы, в сб. »Вопросы теории групп и гомологической алгебры«, *Ярославль*, 1985.

Я. Г. БЕРКОВИЧ
СССР, 344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111, КВ. 18

(Поступило 11, IV. 1986 г.)