Eine spezielle Klasse von Abweichungsmitteln

Von PETER VOLKMANN (Karlsruhe)

Es bezeichne R den Bereich der reellen Zahlen, und es seien $a, b \in R$, $a < b$. Ist

$$f\colon [a, b] \times [a, b] \to R$$

eine bezüglich beider Veränderlichen streng wachsende Funktion, so wird dafür kurz $f(\uparrow, \uparrow)$ geschrieben. Entsprechend bedeutet $f(\uparrow, \downarrow)$ eine bezüglich der ersten Veränderlichen streng wachsende und bezüglich der zweiten Veränderlichen streng fallende Funktion.

Nun sei $E\colon [a, b] \times [a, b] \to R$ eine *Abweichung* im Sinne von Z. DARÓCZY [1], womit folgendes gemeint ist: Es gelte

$$E(x, x) = 0 \quad (a \leqq x \leqq b), \tag{1}$$

und für jedes x aus $[a, b]$ sei

$$E(x, \cdot)\colon [a, b] \to R$$

stetig und streng fallend. Nach [1] wird dann durch

$$E\big(x, M(x, y)\big) + E\big(y, M(x, y)\big) = 0 \quad (x, y \in [a, b]) \tag{2}$$

in eindeutiger Weise eine Funktion

$$M\colon [a, b] \times [a, b] \to R$$

definiert, und diese ist ein (symmetrisches) Mittel, d.h. sie besitzt die Eigenschaften

$$\min \{x, y\} \leqq M(x, y) \leqq \max \{x, y\} \quad (x, y \in [a, b])$$

und

$$M(x, y) = M(y, x) \quad (x, y \in [a, b]).$$

Ist noch $E\colon [a, b] \times [a, b] \to R$ stetig und setzt man

$$E(\cdot, y)\colon [a, b] \to R$$

für jedes y aus $[a, b]$ als streng wachsend voraus (es ist dann $E(\uparrow, \downarrow)$), so kann leicht gezeigt werden, daß M stetig ist und $M(\uparrow, \uparrow)$ gilt. Nachstehender Satz liefert eine Umkehrung dieser Tatsache.

Satz. *Es sei* $M(\uparrow,\uparrow)\colon [a, b]\times[a, b]\to R$ *ein stetiges, symmetrisches Mittel. Dann existiert eine stetige Funktion* $E(\uparrow,\downarrow)\colon [a, b]\times[a, b]\to R$ *mit* $E(x, x)\equiv 0$ *und*

$$E\big(x, M(x, y)\big)+E\big(y, M(x, y)\big) = 0 \quad (x, y\in[a, b]).$$

Beweis. Für $a\leqq y\leqq b$ ist

$$M(\cdot, y)\colon [a, b] \to [M(a, y), M(b, y)]$$

bijektiv. Damit wird durch

$$f\big(M(x, y), y\big) = x \quad (a \leqq x \leqq b) \tag{3}$$

auf eindeutige Weise

$$f(\cdot, y)\colon [M(a, y), M(b, y)] \to [a, b]$$

festgelegt, und es ist

$$f(y, y) = y \tag{4}$$

sowie $f\big(M(a, y), y\big)=a$, $f\big(M(b, y), y\big)=b$. Setzt man noch

$$f(x, y) = b+x-M(b, y) \quad \big(M(b, y) \leqq x \leqq b\big),$$

$$f(x, y) = a+x-M(a, y) \quad \big(a \leqq x \leqq M(a, y)\big),$$

so erhält man also $f\colon [a, b]\times[a, b]\to R$. Es ist leicht einzusehen, daß f stetig ist und

$$f(\uparrow,\downarrow) \tag{5}$$

gilt. Wegen (3) ist für $x, y\in[a, b]$

$$x-f\big(M(x, y), y\big) = 0 = f\big(M(x, y), x\big)-y,$$

also gilt

$$[x-f(M(x, y), x)]+[y-f(M(x, y), y)] = 0,$$

d. h. (2) ist erfüllt, wenn

$$E(x, y) = x-f(y, x) \quad (x, y\in[a, b])$$

gesetzt wird. Diese Funktion $E\colon [a, b]\times[a, b]\to R$ ist stetig, wegen (4) gilt (1), und wegen (5) gilt $E(\uparrow,\downarrow)$.

Bemerkung. Ist $E(\uparrow,\downarrow)\colon [a, b]\times[a, b]\to R$ eine stetige Abweichung, so läßt sich außer dem durch (2) gegebenen Mittel M noch ein weiteres Mittel $N\colon [a, b]\times[a, b]\to R$ durch die Forderung

$$E\big(N(x, y), x\big)+E\big(N(x, y), y\big) = 0 \quad (x, y\in[a, b])$$

definieren. Nimmt man statt $[a, b]\times[a, b]$ den Bereich $R^2_+ = (0, \infty)\times(0, \infty)$, so erzeugt beispielsweise die Abweichung

$$E(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} \quad (x, y > 0)$$

sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel:

$$E(x, M)+E(y, M) = 0 \quad \text{gilt für} \quad M = \frac{x+y}{2},$$
$$E(N, x)+E(N, y) = 0 \quad \text{gilt für} \quad N = \sqrt{xy}.$$

Literatur

[1] Z. DARÓCZY, Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. (Debrecen)* **19** (1972), 211—217.

MATHEMATISCHES INSTITUT I DER UNIVERSITÄT
POSTFACH 6980, 7500 KARLSRUHE 1, WESTDEUTSCHLAND

(Eingegangen am 3. Juli 1986)