Слабая сходимость процессов, связанных с отношением правдоподобия дискретных наблюдений

А. Ф. ТАРАСКИН (Куйбышев)

Введение

С точки зрения теории статистических выводов, как известно, значительный интерес представляет асимптотическое (при неограниченним возрастании объема наблюдений) поведение некоторых процессов, связанных с отношением правдоподобия (о. п.). Специальные исследования в этом направлении начаты ЛеКамом [1] и продолжаются до настоящего времени. Монографии [2, 3] отражают результаты того этапа этих исследований, когда рассматривались только параметрические семейства мер и изучалось о. п., соответствующее двум сближающимся значениям параметра. При этом накладывались ограничения, приводящие, как правило, к гауссовскому предельному распределению логарифма о. п. В недавней работе [4] использован непараметрический подход к исследованию о. п. сближающихся некоторым образом мер. Однако и в этой работе предельными являются гауссовские процессы или смеси таких процессов. Негауссовские асимптотики в случае параметрических семейтв мер, отвечающих процессам с непрерывным временем, рассматривались в работах автора [5, 6], а в непараметрическом случае для независимых наблюдений в [7].

В настоящей работе для дискретных во времени наблюдений произвольной природы устанавливаются условия асимптотической безграничной делимости логарифма о. п. как при справедливости «гипотезы», так и при справедливости «альтернативы». Показывается также, что рассматриваемые «гипотеза» и «альтернатива» будут при этом контигуальными. Эта работа является развернутым изложением результатов, анонсированных в [8]. Она состоит из четырех параграфов. Необходимые обозначения и постановка задачи даются в § 1. В § 2 приводятся используемые в дальнейшем предположения и условия, а также формулируются основные результаты. Доказательствам полученных результатов посвящены параграфы 3 и 4.

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Пусть для каждого целого $n \geqq 1$ задано измеримое пространство $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$ с неубывающим семейством σ-алгебр $F^n = (\mathscr{F}_k^n)_{k \geqq 0}$, таких, что $\mathscr{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega^n\}$ и $\mathscr{F}^n = \bigvee_{k \geqq 0} \mathscr{F}_k^n$. Пусть P^n и $\tilde{P}^n$ — вероятностные меры на $\mathscr{F}^n$, а P_k^n и $\tilde{P}_k^n$ — сужения этих мер на σ-алгебру $\mathscr{F}_k^n$. Будем предполагать, что меры P^n и $\tilde{P}^n$ взаимно локально абсолютно непрерывны и пусть Z_k^n — производная Радона—Никодима меры $\tilde{P}_k^n$ по мере P_k^n:

$$Z_k^n(\omega^n) = d\tilde{P}_k^n / dP_k^n(\omega^n), \quad \omega^n \in \Omega^n. \tag{1}$$

Полагая $\alpha_0^n = Z_0^n = 1$ и для $k \geqq 1$

$$\alpha_k^n = Z_k^n / Z_{k-1}^n, \tag{2}$$

будем иметь равенство

$$Z_k^n = \prod_{l=0}^{k} \alpha_l^n, \tag{3}$$

справедливое почти наверное (п. н.) по каждой из мер P^n и $\tilde{P}^n$. Введем в рассмотрение процесс L^n полагая для $t \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty[$

$$L_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \ln \alpha_k^n, \tag{4}$$

где символом $[\,\cdot\,]$ обозначена целая часть числа. Процесс $L^n = (L_t^n)_{t \in \mathbf{R}_+}$ является адаптированным к семейству σ-алгебр $G^n = (\mathscr{G}_t^n)_{t \in \mathbf{R}_+}$, где $\mathscr{G}_t^n = \mathscr{F}_{[nt]}^n$. Пусть $(D, \mathscr{D})$ — измеримое пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева функций $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ с топологией Скорохода, а $(D_T, \mathscr{D}_T)$-такое же пространство функций, рассматриваемых на конечном промежутке $[0, T]$. Траектории процессов L^n, очевидно, принадлежат пространству D.

Целью этой работы является исследование слабой сходимости распределений, порождаемых на $(D, \mathscr{D})$ последовательностью процессов $\{L^n\}$ относительно мер P^n и $\tilde{P}^n$, к распределению некоротого процесса с независимыми приращениями.

Сделаем некоторые замечания об используемых обозначениях. Слабая сходимость процессов в пространстве $(D, \mathscr{D})$ относительно мер P^n и $\tilde{P}^n$ обозначается символами «$\xrightarrow{d(P^n)}$» и «$\xrightarrow{d(\tilde{P}^n)}$», соответственно, а слабая сходимость сужений этих процессов на $(D_T, \mathscr{D}_T)$-символами «$\xrightarrow{d_T(P^n)}$» и «$\xrightarrow{d_T(\tilde{P}^n)}$». Сходимость по вероятности P, как обычно, обозначается символом «$\xrightarrow{P}$». Символами M и $\tilde{M}$ обозначаются усреднения по мерам P^n и $\tilde{P}^n$, соответственно. Индикаторная функция множества A обозначается $I(A)$. Иногда без специальных оговорок мы будем записывать соотношения, если они выполняются лишь п. н. относительно рассматриваемых мер. Все предельные соотношения, если особо не оговорено, рассматриваются при $n \to \infty$.

§ 2. Формулировка результатов

В дальнейшем изложении величины $M\ln^2\alpha_k^n$ и $\tilde{M}\ln^2\alpha_k^n$ предполагаются конечными для каждого $n\geqq 1$ и всех $k\geqq 0$. При этом будут существовать условные математические ожидания $M(\ln^2\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)$ и $\tilde{M}(\ln^2\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)$, $n\geqq 1$, $k\geqq 0$ (полагаем $\mathscr{F}_{-1}^n=\mathscr{F}_0^n$). Введем ряд условий, которые будут использоваться в последующем.

A. $$\sup_{k\geqq 0} M(\ln^2\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)\xrightarrow{p^n} 0.$$

$\tilde{A}$. $$\sup_{k\geqq 0} \tilde{M}(\ln^2\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)\xrightarrow{p^n} 0.$$

Рассмотрим неслучайную вещественную функцию $K=\{K(t,x),\, t\in\mathbf{R}_+,\, x\in\mathbf{R}\}$ неубывающую по каждому из аргументов и непрерывную слева по x, обладающую кроме того свойствами: 1) $K(t,-\infty)=0$, $t\in\mathbf{R}_+$; 2) $K(t,+\infty)=V(t)$ — непрерывная функция на $\mathbf{R}_+$; 3) для любых $x_1<x_2$ разность $K(t,x_2)-$ $-K(t,x_1)$ является неубывающей на $\mathbf{R}_+$ функцией. Такую функцию K по понятным из дальнейшего изложения соображениям будем называть функцией Колмогорова. По функции Колмогорова K для каждого $t\in\mathbf{R}_+$ определим комплекснозначную функцию $\varphi_t(z;K)$ полагая

$$\varphi_t(z;K)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{zx}-1-zx)x^{-2}\,dK(t,x) \tag{5}$$

для тех комплексных z, для которых интеграл в правой части (5) сходится.

B. Существует функция Колмогорова K такая, что для всех $t\in\mathbf{R}_+$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{\ln^2\alpha_k^n I(\ln\alpha_k^n<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}\xrightarrow{p^n} K(t,x)$$

для $x\in C_t$ (C_t-множество точек непрерывности $K(t,\cdot)$ с присоединенной к нему точкой $\{+\infty\}$).

$\tilde{B}$. Выполняется условие B с функцией Колмогорова K, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dK(t,x)<\infty \quad \text{для} \quad \forall\, t\in\mathbf{R}_+.$$

Заметим, что условие $\tilde{B}$ совпадает с B в случаях, когда функция Колмогорова $K(t,\cdot)$ имеет ограниченное множество точек роста для каждого $t\in\mathbf{R}_+$.

C. Для каждого $t\in\mathbf{R}_+$ при $N\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(\alpha_k^n-1-\ln\alpha_k^n)I(|\ln\alpha_k^n|>N)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}\xrightarrow{p^n} 0$$

равномерно по $n\geqq 1$.

$\tilde{C}$. Для каждого $t\in\mathbf{R}_+$ при $N\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{[(\alpha_k^n-1-\ln\alpha_k^n)I(\alpha_k^n<N^{-1})+\alpha_k^n\ln^2\alpha_k^n I(\alpha_k^n>N)]|\mathscr{F}_{k-1}^n\}\xrightarrow{P^n}0$$

равномерно по $n\geqq 1$.

Основные результаты работы заключены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Если выполняютсд условия A, B, C, то*

a. $L^n\xrightarrow{d(P^n)}L$, *где L — начинающийся из нуля процесс с независимыми приращенидми с характеристической функцией*

$$\psi_t(\lambda)=\exp\{-i\lambda\varphi_t(1;\ K)+\varphi_t(i\lambda;\ K)\};$$

b. последовательности мер $(P_{[nt]}^n)$ и $(\tilde{P}_{[nt]}^n)$ контигуальны для $\forall t\in\mathbf{R}_+$.

Теорема 2. *Если выполняются условия A, $\tilde{B}$ и C, то конечномерные распределения процессов L^n относительно мер $\tilde{P}^n$ слабо сходится к соответствующим распределениям исходящего из нуля процесса с независимыми приращениям $\tilde{L}$ с характеристической функцией вида*

$$\tilde{\psi}_t(\lambda)=\exp\{i\lambda\varphi_t(-1;\ \tilde{K})+\varphi_t(i\lambda;\ \tilde{K})\},$$

где $d\tilde{K}(t,x)=e^x d\tilde{K}(t,x)$, $t\in\mathbf{R}_+$; если выполняются условия A, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$, то имеет место сходимость

$$L^n\xrightarrow{d(\tilde{P}^n)}\tilde{L}.$$

Выделим следующий частный случай, вытекающий из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия A, B и C, причем функция K в условии B имеет вид: $K(t,x)=0$ для $x\leqq 0$ и $K(t,x)=V(t)$ для $x>0$. Тогда последовательности мер $(P_{[nt]}^n)$ и $(\tilde{P}_{[nt]}^n)$ контигуальны для $\forall t\in\mathbf{R}_+$ и имеет место сходимость*

$$L^n\xrightarrow{d(P^n)}L,$$

где $L_t=\Delta_t-V(t)/2$, причем $\Delta=(\Delta_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ — начинающийся в нуле непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями с нулевым средним и дисперсией $V(t)$. Если дополнительно выполняются условия $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$, то имеет место сходимость

$$L^n\xrightarrow{d(\tilde{P}^n)}\tilde{L},$$

где $\tilde{L}=\Delta'+V(t)/2$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем утверждение *a*. В соответствии с результатами [9, 10] сходимость в *a* будет установлена, если будет доказана сходимость

$$L^n\xrightarrow{d_T(P^n)}L \tag{6}$$

для произвольного $T>0$. Теперь заметим, что в условиях теоремы для каждого $n \geqq 1$ существуют условные математические ожидания $M(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$, $k \geqq 0$, и, следовательно, процесс L^n можно представить в виде

(7) $$L_t^n = \Delta_t^n - \varphi_t^n,$$

где

(8) $$\varphi_t^n = -\sum_{k=0}^{[nt]} M(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$$

и

(9) $$\Delta_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \{\ln \alpha_k^n - M(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)\}.$$

Для выполнения (6) согласно теореме 4.4 из [11] и с учетом представления (7) достаточно установить для произвольного $T > 0$ следующие два соотношения: во-первых,

(10) $$\varphi^n \xrightarrow{P^n} \varphi(1;\ K),$$

означающее сходимость по вероятности случайных элементов φ^n со значениями в пространстве D_T с метрикой Скорохода; во-вторых,

(11) $$\Delta^n \xrightarrow{d_T(P^n)} \Delta,$$

где $\Delta = (\Delta_t)_{t \in [0, T]}$ — процесс с независимыми приращениями, начинающийся в нуле, с характеристической функцией $\exp\{\varphi_t(i\lambda;\ K)\}$. Приступим к доказательству (10). Для этого нам потребуется ряд лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *для любого* $t \in \mathbf{R}_+$ P^n-п. н.

(12) $$\varphi_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x) x^{-2}\, dK_n(t, x),$$

где

(13) $$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{\ln^2 \alpha_k^n I(\ln \alpha_k^n < x) | \mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Доказательство. Для фиксированного $n \geqq 1$ стохастическая последовательность $Z^n = (Z_k^n, \mathscr{F}_k^n)_{k \geqq 0}$, как известно, является мартингалом относительно меры P^n и, следовательно, P^n-п. н. $M(Z_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = Z_{k-1}^n$, $k \geqq 0$. С другой стороны, учитывая (3), получаем равенства $M(Z_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = Z_{k-1}^n M(\alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$, $k \geqq 0$. Из сравнения последних равенств имеем

(14) $$M(\alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = 1, \quad k \geqq 0.$$

Это позволяет равенству (8) придать вид:

(15) $$\varphi_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) | \mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Обозначим через $F_k^n(x) = F_k^n(\omega^n, x)$, $\omega^n \in \Omega^n$, $x \in \mathbf{R}$ — регулярную условную функцию распределения случайной величины $\ln \alpha_k^n$ относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_{k-1}^n$ и положим

$$H_t^n(x) = \sum_{k=0}^{[nt]} F_k^n(x). \tag{16}$$

Реализации $H_t^n(\omega^n, x)$ этой случайной функции P^n-п. н. являются неортицательными неубывающими непрерывными слева и ограниченными функциями аргумента $x \in R$. Выражая правые части (13) и (15) через H_t^n, имеем P^n-п. н.

$$K_n(t, x) = \int_{-\infty}^{x} y^2 \, dH_t^n(y) \tag{17}$$

и

$$\varphi_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x) \, dH_t^n(x), \tag{18}$$

где интегралы понимаются как обычные интегралы Стильтьеса по реализациям случайной функции H_t^n. Ясно, что реализации случайной функции $K_n(t, x)$ также будут P^n-п. н. неубывающими непрерывными слева и ограниченными функциями аргумента $x \in \mathbf{R}$. Переходя в (18) к интегрированию по $K_n(t, \cdot)$, получаем (12). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $K(t, x)$, $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}$ — *случайная функция, реализации которой п. н. являются функциями Колмогорова, а непрерываная случайная функция* $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *п. н. интегрируема по* $K(t, x)$ *для любого* $t \in \mathbf{R}_+$. *Тогда*

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dK(t, x) \tag{19}$$

является непрерывной случайной функцией.

Доказательство. В соответствии с условиями леммы интеграл в правой части (19) является п. н. обычным интегралом Стильтьеса от реализации $f(x)$ по реализации случайной функции $K(t, x)$. Поэтому достаточно доказать непрерывность получающейся таким образом реализации случайной функции $g(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$. Для фиксированного $t \in \mathbf{R}_+$ возьмем Δ такое, что $t + \Delta \in \mathbf{R}_+$. Положим $K_\Delta(t, x) = |K(t+\Delta, x) - K(t, x)|$. Для любого $N > 0$ имеем, очевидно, неравенство

$$|g(t+\Delta) - g(t)| \leqq \int_{|x| \leqq N} |f(x)| \, dK_\Delta(t, x) + \int_{|x| > N} |f(x)| \, dK_\Delta(t, x). \tag{20}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зададим некоторое $\delta > 0$ и выберем $N_{\varepsilon, \delta} > 0$ такое, что

$$\int_{|x| > N_{\varepsilon, \delta}} |f(x)| \, dK(t+\delta, x) < \varepsilon/2. \tag{21}$$

Теперь выберем Δ так, чтобы $|\Delta| < \delta$ и

$$\max_{|x| \leqq N_{\varepsilon, \delta}} |f(x)| \cdot \big(V(t+|\Delta|) - V(t)\big) < \varepsilon/2, \tag{22}$$

где $V(t)=K(t, +\infty)$. Полагая в (20) $N=N_{\varepsilon,\delta}$ и учитывая неравенства (21) и (22), получаем неравенство $|g(t+\Delta)-g(t)|<\varepsilon$, из которого следует утверждение доказываемой леммы.

Лемма 3. *Пусть* $g_n(t)$, $n=1, 2, \ldots$, *и* $g(t)$ *— случайные элементы со значениями в* D *такие, что* $g_n(t)$ *— п. н. неубывающие, а* $g(t)$ *— п. н. непрерывна и для каждого* $t\in\mathbf{R}_+$

$$g_n(t)\xrightarrow{P} g(t).$$

Тогда

$$\sup_t |g_n(t)-g(t)|\xrightarrow{P} 0,$$

где супремум берется по любому компактному подмножеству полупрямой $\mathbf{R}_+$.

Доказательство этой леммы имеется в [12].

Далее нам потребуется одно обобщение известного в теории интеграла Стильтьеса результата о предельном переходе под знаком интеграла. Пусть для каждого $n=1, 2, \ldots$, на некотором вероятностном пространстве задана такая неубывающая случайная функция $K_n(x)$, $x\in R$, что $K_n(-\infty)=0$ и $K_n(+\infty)<\infty$ п. н. Будем говорить, что функция $h(x)$, $x\in\mathbf{R}$, стохастически равномерно интегрируема по K_n, $n\geqq 1$, если для любых $\varepsilon>0$, $\delta\in]0, 1[$, существует такое $N_{\varepsilon,\delta}$, что для $N>N_{\varepsilon,\delta}$

$$P\Big\{\int_{|x|>N}|h(x)|\,dK_n(x)>\varepsilon\Big\}\leqq\delta,\quad n\geqq 1.$$

Лемма 4. *Пусть* $h(x)$ *— непрерывная на* $\mathbf{R}$ *стохастически равномерно интегрируемая по* K_n, $n\geqq 1$, *функция и при* $n\to\infty$ $K_n(x)\xrightarrow{P}K_0(x)$ *для* $x\in C$, *где* C *— некоторое всюду плотное в* $\mathbf{R}$ *множество с присоединенной к нему точкой* $\{+\infty\}$. *Тогда* h *интегрируема по* K_0 *п. н. и при* $n\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dK_n(x)\xrightarrow{P}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dK_0(x).$$

Доказательство этой леммы может быть проведено путем необходимых изменений доказательства соответствующего «неслучайного» аналога (см. [13], стр. 196) и здесь опускается.

Теперь мы в состоянии доказать соотношение (10). Проверим применимость леммы 4 к последовательности интегралов, определяемых правой частью (12). Для фиксированного $t\in\mathbf{R}_+$ случайные функции $K_n(t, x)$, определенные равенством (13), неубывают по $x\in\mathbf{R}$ и таковы, что $K_n(t, -\infty)=0$ и $K_n(t, +\infty)<\infty$ P^n-п. н. Учитывая равенство

$$\int_{|x|>N}(e^x-1-x)x^{-2}\,dK_n(t, x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(\alpha_k^n-1-\ln\alpha_k^n)I(|\ln\alpha_k^n|>N)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}$$

и условие C теоремы, видим, что функция $h(x)=(e^x-1-x)x^{-2}$ при $x\neq 0$ и $h(0)=1/2$ стохастически равномерно интегрируема по функциям $K_n(t,\cdot)$, $n\geqq 1$. Кроме того, по условию B теоремы имеем

$$K_n(t,x)\xrightarrow{P^n} K(t,x) \quad \text{для} \quad x\in C_t.$$

Итак, условия леммы 4 выполняются, а значит для каждого $t\in\mathbf{R}_+$

$$\varphi_t^n \xrightarrow{P^n} \varphi_t(1;\ K). \tag{23}$$

Считая подинтегральную функцию в интеграле (5) доопределенной в точке $x=0$ по непрерывности, на основании леммы 2 заключаем, что функция $\varphi_t(1;K)$, $t\in\mathbf{R}_+$, является непрерывной. Учитывая равенство (14) и используя неравенство Иенсена, имеем P^n-п. н.

$$M(\ln\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)\leqq \ln M(\alpha_k^n|\mathscr{F}_{k-1}^n)=0.$$

Тогда из равенства (8), определяющего процесс φ_t^n, $t\in\mathbf{R}_+$, видно, что реализации этого процесса P^n-п. н. неотрицательные и неубывающие функции. Теперь на основании леммы 3 заключаем, что из (23) следует

$$\sup_{0\leqq t\leqq T}|\varphi_t^n-\varphi_t(1;\ K)|\xrightarrow{P^n} 0$$

для любого $T>0$. Последнее означает сходимость по P^n-вероятности последовательности $\{\varphi^n\}$ к $\varphi(1;K)$ в пространстве D_T с равномерной метрикой. Так как равномерная топология сильнее топологии Скорохода, то будет выполняться и соотношение (10).

Перейдем к рассмотрению соотношения (11). Оно, как известно, будет доказано, если удастся установить два факта: во-первых, сходимость конечномерных распределений процессов Δ^n к соответствующим распределениям предельного процесса Δ; во-вторых, плотность семейства мер, отвечающих процессам Δ^n, $n\geqq 1$, в пространстве $(D_T,\mathscr{D}_T)$. Начнем с установления сходимости конечномерных распределений процессов Δ^n, $n\geqq 1$. Так как предельный процесс Δ в (11) имеет независимые приращения, то для этого, очевидно, достаточно показать, что совместное распределение приращений $Y_k^n=\Delta_{t_k}^n-\Delta_{t_{k-1}}^n$, $k=1,\dots,m$, для любых $0=t_0\leqq t_1<\dots<t_m\leqq T$, и $m\geqq 1$, сходится к распределению соответствующих приращений $Y_k=\Delta_{t_k}-\Delta_{t_{k-1}}$, $k=1,\dots,m$, процесса Δ. Чтобы установить слабую сходимость распределений векторов $(Y_1^n,\dots,Y_m^n)$ к распределению вектора $(Y_1,\dots,Y_m)$, воспользуемся приемом Крамера—Уолда (см. [11], стр. 75). Сначала для краткости обозначим

$$X_{nk}=\ln\alpha_k^n,\quad \bar X_{nk}=M(X_{nk}|\mathscr{F}_{k-1}^n),\quad X_{nk}^0=X_{nk}-\bar X_{nk}$$

и заметим, что для каждого $n\geqq 1$ случайные величины X_{nk}^0, $k\geqq 0$, образуют последовательность мартингальных разностей относительно (F^n,P^n): они $\mathscr{F}_k^n$-измеримы и $M(X_{nk}^0|\mathscr{F}_{k-1}^n)=0$ P^n-п. н. При этом процесс Δ^n имеет вид

$$\Delta_t^n=\sum_{k=0}^{[nt]}X_{nk}^0,\quad t\in\mathbf{R}_+. \tag{24}$$

Теперь для произвольного вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$ рассмотрим поведение распределения суммы

$$S_n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Y_j^n = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{k>[nt_{j-1}]}^{[nt_j]} X_{nk}^0$$

и покажем, что оно сходится к распределению величны

$$S = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Y_j.$$

Обозначим $\tilde{X}_{nk} = \lambda_j X_{nk}^0$ для $[nt_{j-1}] < k \leqq [nt_j]$, $j=1, \dots, m$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{[nt_m]} \tilde{X}_{nk}$$

представляет собой сумму мартингальных разностей $\tilde{X}_{nk}$, $k=1, 2, \dots, [nt_m]$, относительно (F^n, P^n). Сходимость распределений этой суммы может быть установлена с помощью результата из [14]: если выполняются условия

A'. $$\max_{k \leqq [nt_m]} M(\tilde{X}_{nk}^2 | \mathscr{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{P^n} 0,$$

B'. существует неубывающая ограниченная функция $K(\cdot)$ на R, для которой

$$\sum_{k=0}^{[nt_m]} M\{\tilde{X}_{nk}^2 I(\tilde{X}_{nk} < x) | \mathscr{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(x)$$

в точках непрерывности $K(\cdot)$ и в точке $x = +\infty$, то распределение S_n сходится к безгранично делимому закону с характеристической функцией

$$\exp\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) x^{-2}\, dK(x)\Big\}. \tag{25}$$

Условие A' обеспечивается, очевидно, условием A. Выполнение B' будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 5. *При выполнении условий A и B выполняется соотношение*

B^0. $$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{X_{nk}^0\}^2 I(X_{nk}^0 < x) | \mathscr{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(t, x)$$

для любого $x \in C_t$ *и* $t \in \mathbf{R}_+$.

Доказательство. Сначала убедимся, что будет справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(X_{nk} < x) | \mathscr{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(t, x). \tag{26}$$

Для этого рассмотрим равенство

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{X_{nk}^2 I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} -$$

$$2\sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk} M\{X_{nk} I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} + \sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk}^2 M\{I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Первая сумма в правой части этого равенства сходится по P^n-вероятности к $K(t, x)$ в силу условия B. Покажем, что остальные две суммы стремятся к нулю по P^n-вероятности. Для последней суммы имеем очевидное неравенство

$$\sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk}^2 M\{I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} \leqq \sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk}^2 \leqq \varphi_t^n \cdot \max_{k\leqq[nt]} |\overline{X}_{nk}|,$$

где совокупность величин φ_t^n, $n \geqq 1$, в силу (23) ограничена по вероятности, а

$$\max_{k\leqq[nt]} |\overline{X}_{nk}| \xrightarrow{P^n} 0, \tag{27}$$

что следует из условия A. Таким образом, последняя сумма стремится к нулю по P^n-вероятности. Применяя неравенство Коши—Буняковского к средней сумме, получаем

$$\Big|\sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk} M\{X_{nk} I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}\Big|^2 \leqq \sum_{k=0}^{[nt]} \overline{X}_{nk}^2 \cdot \sum_{k=0}^{[nt]} M\{X_{nk}^2|\mathscr{F}_{k-1}^n\},$$

причем первый множитель в правой части, как показано выше, стремится к нулю по P^n-вероятности, а второй ограничен по вероятности в силу условия B. Это означает, что средняя сумма также сходится к нулю по P^n-вероятности. Следовательно, справедливо (26). А теперь покажем, что выполняется B^0. Сначала заметим, что при $x=+\infty$ B^0 совпадает с (26). Поэтому предположим, что $x<\infty$ — произвольная точка непрерывности $K(t, \cdot)$. Из соотношения (27) следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, для достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}<x-\delta)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} \leqq \sum_{k=0}^{[nt]} M\{X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}^0<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} \leqq \tag{28}$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}<x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

для любого $\delta>0$. Выбирая δ так, что $x-\delta\in C_t$, на основании (26) имеем, что левая сторона в (28) сходится к $K(t, x-\delta)$, а правая — к $K(t, x)$ по P^n-вероятности. В силу произвольности δ отсюда следует соотношение B^0. Тем самым лемма доказана.

Теперь преобразуем сумму в условии B':

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{\tilde{X}_{nk}^2 I(\tilde{X}_{nk} < x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 \sum_{k>[nt_{j-1}]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(\lambda_j X_{nk}^0 < x)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} =$$

$$= \sum_{\{j:\lambda_j>0\}} \lambda_j^2 \sum_{k>[nt_{j-1}]}^{[nt_j]} M\{X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}^0 < x/\lambda_j)|\mathscr{F}_{k-1}^n\} +$$

$$+ \sum_{\{j:\lambda_j<0\}} \lambda_j^2 \sum_{k>[nt_{j-1}]}^{[nt_j]} M\{X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}^0 > x/\lambda_j)|\mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

На основании леммы 5 отсюда следует, что условие B' выполняется с предельной функцией

$$K(x) = \sum_{\{j:\lambda_j<0\}} \lambda_j^2[V(t_j) - V(t_{j-1}) + K(t_{j-1}, x/\lambda_j) - K(t_j, x/\lambda_j)] + \tag{29}$$

$$+ \sum_{\{j:\lambda_j>0\}} \lambda_j^2[K(t_j, x/\lambda_j) - K(t_{j-1}, x/\lambda_j)],$$

которая, как легко проверить, является неубывающей и ограниченной на $\mathbf{R}$. Следовательно, предельное распределение суммы S_n имеет характеристическую функцию вида (25), в которой $K(x)$ определяется формулой (29). Подставляя (29) в (25), после элементарных преобразований получаем следующее выражение для характеристической функции предельного закона:

$$\exp\Big\{\sum_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda\lambda_j x} - 1 - i\lambda\lambda_j x)x^{-2}\, d[K(t_j, x) - K(t_{j-1}, x)]\Big\}.$$

Нетрудно убедиться, что такую же характеристическую функцию имеет случайная величина S. Таким образом, установлена сходимость конечномерных распределений процессов Δ^n, $n \geqq 1$, к соответствующим распределениям процесса Δ.

Осталось убедиться в том, что семейство мер, порождаемых процессами Δ^n, $n \geqq 1$, в пространстве $(D_T, \mathscr{D}_T)$, плотно. Из структуры процесса Δ^n (см. равенство (24)) и предполагаемой конечности MX_{nk}^2, $k \geqq 0$, следует, что он является квадратично интегрируемым мартингалом относительно (G^n, P^n), а его квадратическая характеристика имеет вид

$$\langle \Delta^n \rangle_t = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2|\mathscr{F}_{k-1}^n\}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

По лемме 5

$$\langle \Delta^n \rangle_t \xrightarrow{P^n} K(t, +\infty) = V(t), \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

где V, по предположению, непрерывная функция. Таким образом, семейство процессов $(\Delta_t^n, \mathscr{G}_t^n, P^n)_{t\in R_+}$, $n \geqq 1$, удовлетворяет условиям леммы 6 из [15] и на ее основании является плотным. Итак, установлено соотношение (11). Оно вместе с (10) обеспечивает (6), что и завершает доказательство утверждения *a* теоремы.

Для доказательства утверждения b в соответствии с характеризацией контигуальности (см. [2], стр. 20) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x \, d\mathscr{L}_t(x) = 1, \tag{30}$$

где $\mathscr{L}_t(x)$ — функция распределения значения предельного процесса L_t. Равенство (30) может быть в данном случае установлено теми же рассуждениями, которые использованы в доказательстве теоремы 1 из работы [7]. Доказательство теоремы 1, тем самым, завершено.

§ 4. Доказательство теоремы 2

По теореме 1 последовательности мер $(P^n_{[nt]})$ и $(\tilde{P}^n_{[nt]})$ являются взаимно контигуальными. Тогда по следствию 2.1 из [1] предельное распределение величины L^n_t при справедливости «альтернативы», соответствующей мере $\tilde{P}^n$, имеет характеристическую функцию

$$\tilde{\psi}_t(\lambda) = \psi_t(\lambda - i) = \exp\left\{-i(\lambda - i)\varphi_t(1;\, K) + \varphi_t\big(i(\lambda - i);\, K\big)\right\}.$$

Учитывая условие $\tilde{B}$, правую часть этого равенства можно преобразовать к виду

$$\tilde{\psi}_t(\lambda) = \exp\{i\lambda\varphi_t(-1;\, \tilde{K}) + \varphi_t(i\lambda;\, \tilde{K})\}$$

с $d\tilde{K}(t, x) = e^x dK(t, x)$, откуда ясно, что одномерные распределения процессов L^n слабо сходятся к соответствующим распределениям предельного процесса с независимыми приращениями $\tilde{L}$. Тем же способом нетрудно убедиться в том, что распределения приращений $L^n_t - L^n_s$ для любых $0 \leqq s < t$ слабо сходятся к распределениям приращений $\tilde{L}_t - \tilde{L}_s$. Учитывая, что $L^n_0 = \tilde{L}_0 = 0$, отсюда заключаем, что любые конечномерные распределения процессов L^n слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса L. Первое утверждение теоремы установлено.

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что относительно мер $\tilde{P}^n$ семейство распределений процессов L^n_t; $t \in \mathbf{R}_+$, в $(D, \mathscr{D})$ является плотным. Представим L^n_t в виде:

$$L^n_t = \tilde{\Delta}^n_t + \tilde{\varphi}^n_t, \tag{31}$$

где

$$\tilde{\varphi}^n_t = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln \alpha^n_k | \mathscr{F}^n_{k-1}), \tag{32}$$

$$\tilde{\Delta}^n_t = \sum_{k=0}^{[nt]} \{\ln \alpha^n_k - \tilde{M}(\ln \alpha^n_k | \mathscr{F}^n_{k-1})\}. \tag{33}$$

Покажем сначала, что

$$\tilde{\varphi}^n \xrightarrow{\tilde{P}^n} \varphi(-1;\, \tilde{K}), \tag{34}$$

где символ «$\xrightarrow{\tilde{P}^n}$» означает сходимость случайных элементов в $(D, \mathscr{D})$ по $\tilde{P}^n$-вероятности.

Лемма 6. *Величина* $\tilde{\varphi}_t^n$, $t \in \mathbf{R}_+$, *подускает представление*

$$\tilde{\varphi}_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x}-1+x)x^{-2}e^x \, dK_n(t, x) \quad \tilde{P}^n\text{-п. н.,} \tag{35}$$

где функция $K_n(t, x)$ *задается равенством* (13).

Доказательство. По следствию 1 из леммы 3 в [16] имеем равенство $\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = M(\alpha_k^n \ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$. Учитывая равенство (14), его можно записать в виде

$$\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = M\{\alpha_k^n(\ln \alpha_k^n - 1 + 1/\alpha_k^n) | \mathscr{F}_{k-1}^n\},$$

и, следовательно, (32) примет вид

$$\tilde{\varphi}_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{\alpha_k^n(\ln \alpha_k^n - 1 + 1/\alpha_k^n) | \mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Сумма в правой части этого равенства преобразуется в интеграл вида (35) рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве леммы 1. Таким образом установлено представление (35).

Теперь заметим, что

$$\int_{|x|>N} (e^{-x}-1+x)x^{-2}e^x \, dK_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(1-\alpha_k^n + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathscr{F}_{k-7}^n\}$$

для любого $N > 0$. Учитывая элементарные неравенства $1-x+x\ln x < x-1-\ln x$ для $x \in]0, 1[$ и $1-x+x\ln x < x\ln^2 x$ для $x > 1$, для правой части последнего равенства имеем оценку

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M\{(1-\alpha_k^n + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathscr{F}_{k-1}^n\} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[nt]} M\{[(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(\alpha_k^n < e^{-N}) + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n I(\alpha_k^n > e^N)] | \mathscr{F}_{k-1}^n\},$$

из которой следует в силу условия $\tilde{C}$ равномерная интегрируемость непрерывной функции

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} (e^{-x}-1+x)x^{-2}e^x, & x \neq 0 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$$

по случайным функциям $K_n(t, x)$. Применяя последовательно леммы 2 и 3, получаем для любого $T > 0$ соотношение

$$\sup_{0 \leqq t \leqq T} |\tilde{\varphi}_t^n - \varphi_t(-1; \tilde{K})| \xrightarrow{P^n} 0,$$

в котором, в силу $(\tilde{P}_{[nt]}^n) \lhd \rhd (P_{[nt]}^n)$, сходимость по P^n-вероятности можно заменить сходимостью по $\tilde{P}^n$-вероятности. Это будет означать сходимость (34).

Покажем теперь, что семейство процессов $\tilde{\Delta}^n$, $n \geqq 1$, относительно распределений $\tilde{P}^n$ плотно в $(D, \mathscr{D})$. Из исходных предположений следует, что для каждого $n \geqq 1$ процесс $\tilde{\Delta}_t^n$, $t \in \mathbf{R}_+$, является квадратично интегрируемым мартингалом с характеристикой

$$\langle \tilde{\Delta}^n \rangle_t = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M} \{[\ln \alpha_k^n - \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)]^2 | \mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Полагая

$$Q_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$$

и

$$S_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} [\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)]^2,$$

можно записать равенство $\langle \tilde{\Delta}^n \rangle_t = Q_t^n - S_t^n$. При этом

$$S_t^n \leqq \max_{k \leqq [nt]} \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) \cdot \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) \leqq$$

$$\leqq \tilde{\varphi}_t^n \cdot \left[\sup_{k \geqq 0} \tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)\right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P^n} 0$$

в силу условия $\tilde{A}$ и стохастической ограниченности последовательности $\tilde{\varphi}_t^n$, $n \geqq 1$. Для Q_t^n имеем представление:

$$Q_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M(\alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \, dK_n(t, x),$$

где $K_n(t, x)$ определяется равенством (13). Так как для любого $N > 0$

$$\int_{|x|>N} e^x \, dK_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} M[\alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n I(|\ln \alpha_k^n| > N | \mathscr{F}_{k-1}^n] \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{[nt]} M\{[(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(\alpha_k^n < e^{-N}) + \alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n I(\alpha_k^n > e^N)] | \mathscr{F}_{k-1}^n\},$$

то в силу условия $\tilde{C}$ функция e^x стохастически равномерно интегрируема по функциям K_n и по лемме 4

$$Q_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \, dK_n(t, x) \xrightarrow{P^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^x \, dK(t, x) = \tilde{V}(t).$$

При этом функция $\tilde{V}(t)$ согласно лемме 2 будет непрерывной на $\mathbf{R}_+$. Таким образом получаем соотношение

$$\langle \tilde{\Delta}^n \rangle_t \xrightarrow{P^n} \tilde{V}(t),$$

в котором (в силу контигуальности) сходимость по P^n-вероятности можно заменить на сходимость по $\tilde{P}^n$-вероятности. Тогда по лемме 6 из [15] семейство. распределений процессов $\tilde{\Lambda}^n$ относительно мер $\tilde{P}^n$ в $(D, \mathscr{D})$ будет плотным Учитывая равенство (31), заключаем, что этот факт вместе с соотношением (34) означает плотность семейства распределений процессов L^n, $n \geqq 1$, относительно мер $\tilde{P}^n$ в пространстве $(D, \mathscr{D})$. *Теорема* 2 *доказана.*

Литература

[1] L. LECAM, Locally asymptotically normal families of distributions, — *Univ. California Publ. Statist.*, **3** (1960), pp. 37—98.

[2] Дж. Русас, Контигуальность вероятностных мер. *М.: Мир*, 1975, 254с.

[3] И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Асимптотическая теория оценивания. М.: *Наука*, 1979, 527 с.

[4] P. E. GREENWOOD, A. N. SHIRYAYEV, Contiguity and the statistical invariance principle. Gordon and Breach, *London*, 1985.

[5] А. Ф. Тараскин, Локальная асимптотическая безграничная делимость семейств марковских процессов. — В сб.: Теория случайных процессов. Вып. 13, *Киев: Наукова думка*, 1985, с. 80—90.

[6] А. Ф. Тараскин, О поведении отношения правдоподобия семимартингалов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1984, т. **XXIX**, вып. **3**, с. 440—451.

[7] А. Ф. Тараскин, Асимптотические свойства отношения правдоподобия независимых наблюдений. — В сб.: Теория случайных процессов. Вып. 14, *Киев: Наукова думка*, 1986, с. 76—83.

[8] А. Ф. Тараскин, О слабой сходимости процессов, связанных с отношением правдоподобия. — В сб.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Т. 3. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики *АН ЛитССР*, 1985, с. 170—171.

[9] CH. STONE, Weak convergence of stochistic processes defined on semi-infinite time intervals. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, v. **14**, pp. 694—696.

[10] D. L. McLEISH, Invariance principles for dependent variables. — *ZW verw. Gebiete*, 1975, t. **32**, pp. 165—178.

[11] П. Билингсли, Сходимость вероятностных мер. *М.: Наука*, 1977, 352 с.

[12] D. L. McLEISH, An extended martingale invariance principle. — *Ann. Probability*, 1978, v. **6**, **N1**, pp. 144—150.

[13] М. Лоэв, Теория вероятностей. *М.: ИЛ*, 1962, 719 с.

[14] B. M. BROWN, G. K. EAGLESON, Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variances. — Transactions of the *Amer. Math. Soc.*, 1971, v. **162**, pp. 449—453.

[15] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов. — *Терия вероятн. и ее примен.*, 1980, т. **XXV**, вып. **4**, с. 683—703.

[16] Р. Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А. Н. Ширяев, О необходимых и достаточных условиях контигуальности и полной асимптотической разделимости вероятностных мер. — *Успехи математ. наук*, 1982, т. **37**, вып. **6** (228), с. 97—124.

КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

(Поступило 10, IX. 1986 г.)