О связностях, индуцированных обьектами Картана — Лаптева

А. С. ФЕРЗАЛИЕВ (Пенза)

Как известно [1]—[5] в многообразии линейных элементов со связностью $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ ковариантный дифференциал вектора $T^\alpha(x, p)$ задается формулой

$$\delta T^\alpha = dx^\alpha + L^\alpha_{\beta\gamma} T^\beta \, dx^\gamma + C^\alpha_{\beta\gamma} T^\beta \delta p^\gamma, \tag{1}$$

где $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ — объект аффинной связности нулевого измерения относительно p^α, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ — тензор минус первого измерения относительно p^α, p^α — произвольный опорный псевдовектор, δ, d — символы ковариантного и обычного дифференциалов соответственно, причем $C^\alpha_{\beta\gamma} p^\gamma = 0$.

Совокупность пар объектов $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ в метрических пространствах Финслера называется объектами евклидовой связности Э. Картана [4], [5], Общая теория связности $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ с кручением в связи с построением ковариантного дифференциала (ковариантного дифференцирования), теорию дифференциальных инвариантов и дифференцирования Ли в многообразиях линейных элементов была развита Б. Л. Лаптевым [1], [2], поэтому назовем $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ объектами связности Картана—Лаптева.

В 1946 г. Б. Л. Лаптев [3] ввел пространство опорных элементов, частными случаями которого являются пространство Финслера, пространство Картана, общая геометрия путей Бервальда, пространство k-протяжений Дугласа и др.

Различным аспектам развития теории пространств Финслера и их обобщениям посвящены весьма интересные исследования венгерских геометров: O. VARGA [15], A. MOÓR [16], A. RAPCSÁK [17], GY. SOÓS [18], L. TAMÁSSY [19], S. BÁCSÓ [19].

I. Исследования настоящей работы посвящены связностям, индуцированным объектами $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, т. е. с помощью $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ и требований геометрического характера, будем строить новые связности и объекты, необходимые при решении дифференциально-геометрических задач. В этой связи в многообразии линейных элементов с фундаментальными объектами $L^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ рассмотрим однопараметрическое семейство линейных элементов

$$\Gamma\colon\ x^\alpha = x^\alpha(t),\ p^\alpha = p^\alpha(t)$$

и двумерную площадку $E_2\{\dot{x}^\alpha, p^\alpha\}$, где t — произвольный параметр, $\dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}$, причем $\dot{x}^\alpha$ и p^α линейно независимы.

Определение 1. Однопараметрическое семейство Γ назовем χ путями (А. С. Ферзалиев [6], [7]), если геометрические приращения $\dot{x}^\alpha$, p^α, т. е. $\dfrac{\delta\dot{x}^\alpha}{dt}$, $\dfrac{\delta p^\alpha}{dt}$ принадлежат E_2.

Из этого определения следует, что

$$\chi\colon\ \frac{\delta\dot{x}^\alpha}{dt} = \mu\dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha,\ \frac{\delta p^\alpha}{dt} = F\dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha, \tag{2}$$

где μ, ν, F, η — скалярные функции, $\ddot{x}^\alpha = \dfrac{d^2x^\alpha}{dt^2}$, $\dot{p}^\alpha = \dfrac{dp^\alpha}{dt}$.

Применяя формулу (1) к условиям (2) находим

$$\begin{cases}\ddot{x}^\alpha + (L^\alpha_{\beta\gamma} + FC^\alpha_{\beta\gamma})\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \mu\dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha,\\ \dot{p}^\alpha + (L^\alpha_{\beta\gamma} + FC^\alpha_{\beta\gamma})p^\beta\dot{x}^\gamma = F\dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha.\end{cases} \tag{3}$$

Введем следующие объекты:

$$\Phi^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} + FC^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{4}$$

$$H^\alpha_\beta = F\delta^\alpha_\beta - \Phi^\alpha_{\tau\beta}p^\tau. \tag{5}$$

Как это следует из правой части (4) $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ — является объектом аффинной связности, а (5) $H^\alpha_\beta(x, p)$ — линейной дифференциально-геометрической связностью, индуцированной скалярной функцией $F(x, p)$ и аффинной связностью $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что $F(x, p)$ зависит от x^α, p^α, но не зависит от $\dot{x}^\alpha$, причем $F = \dfrac{1}{n}\,(H^\varrho_\varrho + \Phi^\varrho_{\tau\varrho}p^\tau)$.

Общая теория линейной дифференциально-геометрической связности дана в исследованиях Б. И. Близникаса [9].

Фундаментальные объекты $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $H^\alpha_\beta(x, p)$ в неявном виде впервые встречаются в более ранних работах А. С. Ферзалиев [6], [13], [14].

Определение 2. Аффинную связность $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, определенную структурой (4) назовем объектом *присоединенной связности.*

Определение 3. Пространство линейных элементов с фундаментальными объектами $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, (4) и $H^\alpha_\beta(x, p)$ (5) назовем пространством присоединенной связности и обозначим через $\Gamma_{n,p}$, а если $p^\alpha = \dot{x}^\alpha$, то через $\Gamma_{n,\dot{x}}$.

Геометрия пространства $\Gamma_{n,p}$ является геометрией инвариантов объектов $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$, $H^\alpha_\beta(x, p)$.

Нетрудно заметить, что пути χ (3) через присоединенную связность $\Phi^\alpha_{\beta\gamma}(x, p)$ можно записать так

$$\chi\colon \begin{cases}\ddot{x}^\alpha + \Phi^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \mu\dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha,\\ \dot{p}^\alpha + \Phi^\alpha_{\beta\gamma}p^\beta\dot{x}^\gamma = F\dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha,\end{cases} \tag{6}$$

а через $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ и $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$ в следующем виде

$$\chi\colon \begin{cases} \ddot{x}^{\alpha}+\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = \mu\dot{x}^{\alpha}+\nu p^{\alpha}, \\ \dot{p}^{\alpha}-H^{\alpha}_{\beta}\dot{x}^{\beta} = \eta p^{\alpha}. \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, запись дифференциальных уравнений путей χ (обобщенных геодезических) через $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$, $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$ является одним из приложений присоединенной связности $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ и объекта $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$.

Если в уравнениях (6) $F=0$, $\nu=0$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ и $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}=L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ без кручения, то получим дифференциальные уравнения аффинных путей Дугласа [10].

При переходе к опорному касательному псевдовектору, т. е. $p^{\alpha}=\dot{x}^{\alpha}$, из (6) (или (5), (7)) получим аффинные пути

$$\ddot{x}^{\alpha}+\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = \omega\dot{x}^{\alpha}, \tag{8}$$

отнесенные присоединенной связности $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ без кручения

$$\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x}) = L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})+F(x, \dot{x})\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x}). \tag{9}$$

Если учесть, что $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=C^{\alpha}_{\gamma\beta}$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma}=0$, то

$$\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma} = L^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma}.$$

Тогда получим известные дифференциальные уравнения геодезических

$$\ddot{x}^{\alpha}+L^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = \omega\dot{x}^{\alpha}, \tag{10}$$

отнесенные сязности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ (без кручения) Э. Картана.

Следовательно, форма дифференциальных уравнений геодезических (10) не меняется при замене аффинной связности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ на присоединенную связность $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$. Инвариантность формы дифференциальных уравнений геодезических относительно присоединенной связности расширяет границу возможности применения объектов связности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ Э. Картана, Б. Л. Лаптева.

Форма дифференциальных уравнений путей (10) также инвариантна относительно следующей связности без кручения

$$\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\beta\gamma}+FC^{\alpha}_{\beta\gamma}+Q^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

где $Q^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ — тензор нулевого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$ и удовлетворяет условию

$$Q^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0.$$

В случае общей геометрии путей происхождение присоединенной связности можно объяснить так. Как известно, наиболее простая связность, возникшая первоначально в пространствах Финслера является следующая связность, введенная Бервальдом

$$\overset{*}{G}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = H^{\alpha}_{.\beta\cdot\gamma} = \frac{\partial^2 H^{\alpha}(x, \dot{x})}{\partial\dot{x}^{\beta}\partial\dot{x}^{\gamma}} \tag{11}$$

через величины $H^{\alpha}(x, \dot{x})$, входящие в дифференциальные уравнения [11]

$$\ddot{x}^{\alpha}+2H^{\alpha}(x, \dot{x}) = 0.$$

Тогда, используя связность $G^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$, эти уравнения можно записать в форме геодезических [11]

$$\ddot{x}^{\alpha}+\overset{*}{G}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}=0.$$

Нетрудно заметить, что следующая присоединенная связность без кручения

$$\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}=H^{\alpha}_{\cdot\beta\cdot\gamma}+FC^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad C^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=0, \tag{12}$$

согласно условия $C^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\gamma}=0$ Э. Картана и теоремы Эйлера об однородных функциях не меняет форму геодезических Бервальда, причем сверка $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ с $\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}$ дает $H^{\alpha}(x, \dot{x})$, т. е.

$$\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}=H^{\alpha}.$$

Если в (12) тензор $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, то получим обычную сязность Бервальда. Следовательно, (12) является одним из обобщений классической связности Бервальда (11).

2. Рассмотрим некоторые применения присоединенной связности $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ и объекта $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$ в задачах дифференциальной геометрии. Здесь требованием выполнения некоторых условий на производные Ли от $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$, $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$. вводятся три класса автоморфизмов в пространствах $\Gamma_{n,p}$.

А. Совокупность бесконечно малых преобразований

$$\bar{x}^{\alpha}=x^{\alpha}+V^{\alpha}(x)\,d_{\tau},$$

определяемых требованием сохранения объекта присоединенной связности $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е. ($\underset{L}{D}\,p^{\alpha}\equiv 0$) [7]

$$\underset{L}{D}\,\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}=0, \tag{13}$$

назовем *автоморфизмом первого класса*, где $\underset{L}{D}$ — символ дифференцирования Ли вдоль поля вектора $V^{\alpha}(x)$.

Из (5) на основании (13), получим условие

$$\underset{L}{D}\,H^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\underset{L}{D}\,F, \tag{14}$$

которое является следствием (5) и (13).

Условие (13) через объекты $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ Э. Картана, Б. Л. Лаптева и скалярной функции $F(x, p)$ иначе можно записать так ($n\underset{L}{D}\,F=\underset{L}{D}\,H^{\tau}_{\tau}$)

$$\underset{L}{D}\,L^{\alpha}_{\beta\gamma}+F\underset{L}{D}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma}+C^{\alpha}_{\beta\gamma}\underset{L}{D}\,F=0.$$

Б. *Автоморфизмы второго класса* будем определять требованием сохранения объекта $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е.

$$\underset{L}{D}\,H^{\alpha}_{\beta}=0 \tag{15}$$

или (см. (5))

$$p^{\tau}\underset{L}{D}\,\Phi^{\alpha}_{\tau\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\underset{L}{D}\,F. \tag{16}$$

В. *Автоморфизмы третьего класса* будем определять требованием сохранения объектов $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$, $H^{\alpha}_{\beta}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е.

(17) $$\underset{L}{D}\,\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \quad \underset{L}{D}\,H^{\alpha}_{\beta} = 0.$$

Следующее условие

(18) $$\underset{L}{D}\,F = 0$$

является следствием (17).

Требования (17), согласно (4), (5), (18), иначе через $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, p)$ можно записать так

(19) $$\underset{L}{D}\,L^{\alpha}_{\beta\gamma} + F\underset{L}{D}\,C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0.$$

Из рассмотренных здесь уравнений автоморфизмов при переходе к специальной усеченной связности (11) как частный случай следует уравнение автоморфизмов (коллинеаций) Кнебельмана [12] в связности общей геометрии путей Бервальда [11].

3. Инвариантность формы дифференциальных уравнений геодезических (10) пространства Финслера относительно присоединенной связности $\Phi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ позволяет построить шире определенные геодезические отображения пространства Финслера на пространства Римана. Действительно, следующая связность без кручения

(20) $$\Phi_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha}a_{\beta\gamma} + M^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

или (А. С. Ферзалиев [8])

(21) $$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = -FC^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha}a_{\beta\gamma} + M^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

отображает геодезические (10) пространства Финслера в геодезические

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = \lambda\dot{x}^{\alpha}$$

пространства Римана, где $\psi_{\alpha}(x, \dot{x})$, $M^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ — тензоры нулевого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, $a_{\alpha\beta}(x, \dot{x})$-произвольный симметрический тензор минус первого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, $L^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ и $C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ — объекты связности Картана, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ — связность риманова пространства, $F(x, \dot{x})$ — скалярная функция плюс первого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, причем

$$M^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} = 0.$$

Если в некоторой аффинной системе координат $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{*}{=} 0$, то получим связность

(22) $$L^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{*}{=} -FC^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha}a_{\beta\gamma} + M^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

являющуюся одним из аналогов проективно-евклидовой связности.

Если в (21):

$$\psi_{\alpha} = \psi_{\cdot\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}^{\alpha}}, \quad a_{\beta\gamma} = \psi_{\cdot\beta\cdot\gamma} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{x}^{\beta}\partial\dot{x}^{\gamma}}, \quad M^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0,$$

т. е. следующая связность без кручения (см. также (11))

$$\overset{*}{G}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} \overset{*}{=\!=} -FC^{\alpha}_{\beta\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{.\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{.\beta}+\dot{x}^{\alpha}\psi_{.\beta.\gamma}, \tag{23}$$

отображает геодезические общей геометрии путей в геодезические риманова пространства, где $\psi(x, \dot{x})$ — скаляр.

Из (23) при $C^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ и $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\overset{*}{=\!=}0$ как частный случай следует проективно-плоская связность Кнебельмана [12].

Литература

[1] Б. Л. Лаптев, Производная Ли дыя объектов, являющихся функциями точки и направления. — *Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те,* 1938, сер. 3, **т. 10, с. 3** — 38.

[2] Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов. — *Уч. зап. Казан. ун-та,* 1958, т. **118, кн. 4,** 75—147.

[3] Б. Л. Лаптев, Производная Ли в обобщенных пространствах. (Резюме докладов 9. IV и 23. IV 1946). *Тр. Семин. по векторн. и тензорн. анализу, МГV,* 1949, **7,** 10.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler. — Actualite's 79, *Paris,* 1934.

[5] E. Cartan, Les espaces de Finsler. *Тр. Семин. по векторн. и тензорн. анализу, МГV,* 1937, **4,** 90—94.

[6] А. С. Ферзалиев, Проективное отображение пространства линейных элементов общей связности. — *Материалы IV Прибалтийск. геометрич. конф. Тарту,* 1973, с. 131—132.

[7] А. С. Ферзалиев, Геодезические отображения и коллинеация пространств линейных элементов, гиперплоскостных элементов. — Пенза, 1938. — 32 с. — *Рукопись представлена Пензен.* инж.-строит. ин-том. Деп. в ВИНИТИ 21 дек. 1983, № 6899—83.

[8] А. С. Ферзалиев, Геодезические отображения пространств линейных элементов общей связности. — «*Изв. вузов. Мат.*», 1984, **№2,** с. 76—78 (рус.)

[9] В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. Liet. matem. rinkinys, *Лит. матем. сб.,* 1966, **6, №2,** 141—208.

[10] J. Douglas, The general geometry of paths. — *Ann. Math.,* 1928, V. **29, №2,** p. 143—168.

[11] L. Berwald, Üntersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. — *Math. Z.,* 1926, **25,** 40—73.

[12] M. S. Knebelman, Collineations and motions in generalized spaces. — *Amer J. Math.* 1929, V. **51,** p. 527—564.

[13] А. С. Фрезалиев, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов общей связности, П. — «*Изв. вузов. Мат.*», 1976, **№ 2,** с. 114—118.

[14] А. С. Ферзалиев, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов общей связности , I. — «*Изв. вузов. Мат.*», 1975, **№ 2,** с. 87—91.

[15] O. Varga, Normalkoordinaten in allgemeinen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus de I Congrès des Math. Hongrois,* **1950,** 147—162.

[16] A. Moór, Übertrgungstheoric bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen,* **13**, 263—287.

[17] A. Rapcsák, Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen,* **7**, 382—393.

[18] Gy. Soós, Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von linienelementen, *Publ. Math. Debrecen,* **4,** 294—302.

[19] L. Tamássy—S. Bácsó, On quasi — autoparallel curves in tensorially connected spaces, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* **31** (Differential Geometry), 1979, 725—737.

(Поступило 11, XI. 1986 г.)