E_1-планарные отображения пространств аффиной связности без кручения+

Ш. БАЧО (Дебрецен)—Л. ВЕРХОЦКИ (Будапешт)*

К восьмидесятилётнему юбилею профессора Бела Барна

1. Введение

Н. С. Синюков [1] определил и рассмотрел почти автопараллельние отображения пространств аффиной связности без кручения A_n, являющиеся обобщениями автопараллельных отображений вышеуказанных пространств. При исследовании их возникли так называемые специальные почти автопараллельные кривые, назвал их Синюковым F-кривымы и Φ-кривымы[1].

В настоящей работе мы введём понятие E_1-планарных кривых в A_n (имеющем поле направлений), являющихся обобщениями предыдущих Φ-крувых, и дадим уравнения E_1-планарных кривых. После определения E_1-планарных отображений между вышеуказанными пространствами получим необходимое и достаточное условые для существования E_1-планарных отображений. Докажем, что при E_1-планарных отображениях поле направлений сохраняется.

Наши рассуждения имеют общие характеры с исследованием F-кривых ([2]), [3]).

2. E_1-планарные кривые

Пусть задано n-мерное пространство аффиной связности без кручения A_n $(n>2)$ с обьектами связности Γ^h_{ij}[2], и в A_n поле одномерных подпространств касательных пространств, то есть поле направлений E_1. Так A_n назовём пространством, имеющим поле направлений, и обозначим его через $A_n(E_1)$. Возьмём в этом пространстве систему координат $(x^1, \dots, x^n)$ и контравариантое векторное поле $\varphi^h(x)$, определяющее поле направлений пространства. Предпологa-

+ Настоящая работа была финансирована фондом ОТКА, номер 1240, 1988.

* S. Bácsó (Debrecen)—L. Verhóczki (Budapest)

[1] см. [1] IV. Глава

[2] Латинские индексы принимают значения от 1 до n.

ется во всех рассуждениях, что все изучаемые функции являются достаточно гладкими.

Определение 1. Кривая пространства $A_n(E_1)$ называется *E_1-планарной*, если вектор, полученный при параллельном пересении любого касательного вектора кривой вдоль неё, в каждой точке кривой находится в площадке, образованной касательным вектором и вектором φ^h.

Пусть задана кривая $x^h = x^h(t)$, где t-параметр. $\lambda^h(t) := \dfrac{dx^h}{dt}$ является касательным вектором кривой $x^i(t)$. Из Определения 1. следует, что кривая $x^h(t)$ является E_1-планарной тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{D\lambda^h}{dt} = a(t)\lambda^h + b(t)\varphi^h(x(t)), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ произвольниые фукнции. Знак $\dfrac{D}{dt}$ обозначает абсолютную производную вдоль кривой по связности A_n.

Непосредственно следует, что при любой E_1-планарной кривой $x^h = x^h(t)$ можно выбрать новый параметр τ, по закону $t = f(\tau)$, для которого

$$\tilde{x}(\tau) := x^h(f(\tau)), \quad \tilde{\lambda}^h := \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau},$$

и на основании (1) получаем

$$\frac{D\tilde{\lambda}^h}{d\tau} = \tilde{b}(\tau)\varphi^h \tag{2}$$

при некоторой функции $\tilde{b}(\tau)$, то есть функция $\tilde{a}(\tau)$ обращается в нуль. Параметр τ E_1-планарной кривой является каноничеким.

Рассмотрим подробно уравнения (1), получаем

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{ab}(x(t))\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt} = a(t)\frac{dx^h}{dt} + b(t)\varphi^h(x(t)).$$

В этих уравнениях функции $a(t)$ и $b(t)$ произвольные, поэтому, учитывая [2], можно показать, что из любой точки пространства A_n (E_1) в каждом направлении, отличным от направления φ^h, исходит множество E_1-планарных кривых. Очевидно, что автопараллельные кривые при любом поле направлений пространства ябляются и E_1-планарными кривыми.

3. E_1-планарные отображения

Рассмотрим отоброжение L пространства $A_n(E_1)$ на другое пространство $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ в общей по отоброжению L системе координат $(x^1, \ldots, x)$, и обозначим его в дальнейшем с L: $A_n(E_1) \to \bar{A}_n(\bar{E}_1)$. При изучении дифференциала отображения L получаем что, для поля направлений первого пространства соответствует некоторое поле одномереых подпространств второго пространства.

Определение 2. Отображение L: $A_n(E_1) \to \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ назовём *сохраняющим поле направлвний,* если дифференциал отображения L, индуцированное им, переносит поле направлений первого пространства в поле направлений второго пространства.

Обозначим с $\varphi^h(x)$ поле направлений пространства $A_n(E_1)$, и с $\bar{\varphi}^h(x)$ поле направлений пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Отоброжение L является сохраняющим поле направлений тогда и только тогда, когда существует функция $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$, при которой выполняются следующие уравнения

$$\bar{\varphi}^h(x) = g(x)\varphi^h(x). \tag{3}$$

Определение 3. Отображение L: $A_n(E_1) \to \bar{A}_n(\bar{E}_1)$, при котором каждая E_1-планарная кривая пространства $A_n(E_1)$ переходит в E_1-планарную кривую пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$, назовём *E_1-планарным.*

Лемма 1. *В касательном пространстве некоторой точки пространства A_n векторы ξ^h, φ^h, η^h (η не нулевой вектор) являются линейно зависимыми тогда и только тогда, если удовлетворяются уравнения*

$$\xi^{[h}\eta^{i]}\varphi^{[l}\eta^{j]} - \xi^{[l}\eta^{j]}\varphi^{[h}\eta^{i]} = 0, \tag{4}$$

где квадратная скобка обозначает альтернацию.

Доказательство. Если векторы ξ^h, φ^h, η^h являются линейно зависимыми, тогда один вектор из них выражается из других, поэтому соотношение (4) тождественно удовлетворяется.

Нооборот, предположим, что (4) имеет место. Тогда используя следующее обозначение $p^{hl} := \xi^h\varphi^l - \xi^l\varphi^h$, из (4) даётся

$$p^{hl}\eta^i\eta^j + p^{li}\eta^j\eta^h + p^{ij}\eta^h\eta^l + p^{jh}\eta^l\eta^i = 0.$$

Из этих уравнений в специальном случае $i=j$ получаем

$$\eta^i(p^{hl}\eta^i + p^{li}\eta^h + p^{ih}\eta^l) = 0. \tag{5}$$

Так как η^h не нулевой вектор, всегда можно вводить преобразование координат в пространстве A_n, чтобы в новой системе координат все компоненты вектора η^h отличались от нуля. Поэтому на основании (5) следует, что

$$p^{hl}\eta^i + p^{li}\eta^h + p^{ih}\eta^l = 0. \tag{6}$$

Принимая во внимание выражение тензора p^{hl}, (6) имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} \xi^h & \varphi^h & \eta^h \\ \xi^1 & \varphi^1 & \eta^1 \\ \xi^i & \varphi^i & \eta^i \end{vmatrix} = 0,$$

из которого получается, что ξ^h, φ^h, η^h являются зависимыми.

Возьмём отоброжение L: $A_n(E_1) \to \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ в общей по отображению системе координат, и функции $\Gamma^h_{ij}(x)$, $\bar{\Gamma}^h_{ij}(x)$-обьекты аффиной связности пространств $A_n(E_1)$, $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Тензор $P^h_{ij}(x) := \bar{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x)$ является тензором деформации отоброжения L.

Теорема 1. *Отображение L: $A_n(E_1)\to\bar{A}_n(\bar{E}_1)$, сохраняющее поле направлений, является E_1-планарным тогда и только тогда, если существуют ковариантное векторное поле $\psi_i(x)$ и симметричное тензорное поле $S_{ij}(x)$, для которы выполняются следующие уравнения*

$$P^h_{ij}=\psi_i\delta^h_j+\psi_j\delta^h_i+S_{ij}\varphi^h. \tag{7}$$

Доказательство. 1. *Необходимость.* Рассмотрим в пространстве $A_n(E_1)$ E_1-планарную кривую, заданную функциями $x^h=x^h(t)$. Так как кривая $x^i(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ тоже является $\bar{E}_1$-планарной, получается

$$\frac{d\lambda^h}{dt}+\bar{\Gamma}^h_{ab}\lambda^a\lambda^b=\bar{a}(t)\lambda^h+\bar{b}(t)\bar{\varphi}^h, \tag{$\bar{1}$}$$

где $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ — некоторые функции. Из (1) и ($\bar{1}$) вследствие соотношения (3) получаем, что при некоторых функциях $\sigma(t)$ и $\varrho(t)$ справедливо

$$P^h_{pq}(x(t))\lambda^p\lambda^q=\sigma(t)\lambda^h+\varrho(t)\varphi^h. \tag{8}$$

Из любой точки пространства $A_n(E_1)$ в каждом направлении исходит по крайней мере одна E_1-планарная кривая, поэтому вследствие (8) существуют функции $\sigma(x,\lambda)$, $\varrho(x,\lambda)$, вместе которыми тензор деформации тождественно удвлетворяет условию

$$P^h_{pq}(x)\lambda^p\lambda^q=\sigma(x,\lambda)\lambda^h+\varrho(x,\lambda)\varphi^h \tag{9}$$

относительно переменных x^h, λ^h.

Непосредственно следует из (9), что

$$T^{hilj}_{pqrs}\lambda^p\lambda^q\lambda^r\lambda^s=0, \tag{10}$$

где тензор T^{hilj}_{pqrs} имеет вид

$$T^{hilj}_{pqrs}:=P^{[h}_{pq}\delta^{i]}_r\varphi^{[l}\delta^{j]}_s-P^{[l}_{pq}\delta^{j]}_r\varphi^{[h}\delta^{i]}_s.$$

Уравнения (10) выпольняются при любом векторном поле $\lambda^h(x)$, поэтому имеет место

$$T^{hilj}_{(pqrs)}=0, \tag{11}$$

где знак «( )» обозначает симметризацию.

Рассмотрим векторное поле $\eta^h(x)$, чтобы векторы φ^h, η^h в каждом точке являлись независимыми. В дальнейшем вводим следующие обозначения: $P^h:=P^h_{pq}\eta^p\eta^q$, $P^h_p:=P^h_{pq}\eta^q$. Принимая во внимание (9) и линейную независимость векторов φ^h, η^h, получается, что однозначно существуют функции $a(x)$, $b(x)$, при которых выполняется

$$P^h=2a\eta^h+2b\varphi^h. \tag{12}$$

После свёртывания уравнений (11) с векторами η^q, η^r, η^s, используя (12) в полученных уравнениях, находим

$$\hat{P}^{[h}_p\eta^{i]}\varphi^{[l}\eta^{j]}-\hat{P}^{[l}_p\eta^{j]}\varphi^{[h}\eta^{i]}=0, \tag{13}$$

где $\hat{P}^h_q:=P^h_q-a\delta^h_p$. Учитывая Лемму 1. и соотношение (13), получаем, что однозначно существуют такие ковариантные векторные поля $a_p(x)$, $b_p(x)$, для которых справедливы следующие уравнения

$$P^h_p - a\delta^h_p = a_p\eta^h + b_p\varphi^h. \tag{14}$$

Свёртывая (11) с векторами η^r, η^s и принимая во внимание соотношения (12), (14), даётся

$$\hat{P}^{[h}_{pq}\eta^{i]}\varphi^{[l}\eta^{j]} - \hat{P}^{[l}_{pq}\eta^{j]}\varphi^{[h}\eta^{i]} = 0, \tag{15}$$

где $\hat{P}^h_{pq} := P^h_{pq} - \mathrm{a}_p\delta^h_q - a_q\delta^h_p$. Из (15) вследствие Леммы 1. следует, что однозначно существуют такие симметричные тензорные поля $a_{pq}(x)$ и $b_{pq}(x)$, при которых выполняется

$$P^h_{pq} = a_p\delta^h_q + a_q\delta^h_p + a_{pq}\eta^h + b_{pq}\varphi^h. \tag{16}$$

Покажем, что вышеуказанный тензор a_{pq} равен нулю. Свёртывая (14) с η^p, и сравинивая полученный результат с соотношением (12), находим что $a = a_p\eta^q$.

Если свёртываем (16) с η^q, и используваем предидущее соотношение, тогда, принимая во внимание (14), даётся $a_{pq}\eta^q = 0$.

Выражение тензора P^h_{qq} с помощью уравнений (16) подставляя в (11), а потом полученные уравнениы свёртывая с η^s, находим

$$U^{hilj}_{(pqr)} = 0, \tag{17}$$

где $U^{hilj}_{pqr} := a_{pq}(\eta^{[h}\delta^{i]}_r\varphi^{[l}\eta^{j]} - \eta^{[l}\delta^{j]}_r\varphi^{[h}\eta^{i]})$. Возьмём векторное поле $\xi^h(x)$, для которого в каждой точке векторы φ^h, η^h, ξ^h являются линейно независимыми. Из Леммы 1. следует следующее соотношение

$$\eta^{[h}\xi^{i]}\varphi^{[l}\eta^{j]} - \eta^{[l}\xi^{j]}\varphi^{[h}\eta^{i]} \neq 0.$$

Свернём (17) с начала с $\xi^p\xi^q\xi^r$, а потом с $\xi^q\xi^r$, а каконец с ξ^r, и используем предыдущее неравенство. Тогда получаем равенство $a_{pq}\xi^p\xi^q = 0$, после этого $a_{pq}\xi^q = 0$, а наконец равенство $a_{pq} = 0$. Поэтому из (16) следует, что условие (7) удовлетворяется.

II. *Достаточность*. Предположим, что (7) выполняется, и рассмотрим в пространствое $A_n(E_1)$ E_1-планарную кривую, заданную функциями $x^h = x^h(t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1). Свернём (7) с $\lambda^i\lambda^j \left(\lambda^i := \dfrac{dx^i}{dt}\right)$, потом сложим полученное соотнешение и (1). Таким образом, используя (3), получаем ($\bar{1}$), где

$$\bar{a}(t) = a(t) + 2\psi_p\lambda^p, \quad \bar{b}(t) = \frac{1}{g}(b(t) + S_{pq}\lambda^p\lambda^q).$$

Итак кривая $x^h(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ является $\bar{E}_1$-планарной.
Теорема 1. доказана.

Отметим, что векторное поле $\psi_i(x)$ и тензорное поле $S_{ij}(x)$ однозначно существуют.

Теорема 2. *Если отображение L: $A_n(E_1) \to \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ явлдется E_1-планарным, тогда при отображении L поле направлений по необходимости сохраняется.*

Доказательство. Препологается, что отображение L является E_1-планарным, но не сохраняет поле направлений. При E_1-планарном отображении L каждая автопараллельная кривая пространства $A_n(E_1)$ переходит в $\bar{E}_1$-планарную кривую пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Из любой точки пространства $A_n(E_1)$ в каждом направлении исходит единственная автопараллельная кривая, поэтому на основании доказательства Теоремы 1. существуют такие функции $\mu(x, \lambda)$, $\chi(x, \lambda)$, при которых уравнения

$$P^h_{pq}(x)\lambda^p\lambda^q = \mu(x, \lambda)\lambda^h + \chi(x, \lambda)\varphi^h \tag{$\bar{9}$}$$

тождественно выполняется относительно переменных x^h, λ^h. Равным образом, как в доказательстве Теоремы 1., можно показать, что вследствие ($\bar{9}$) существуют векторное поле $\bar{\psi}_i(x)$ и тензорное поле $\bar{S}_{ij}(x)$ при которых справедливы уравнения

$$P^h_{ij} = \bar{\psi}_i\delta^h_j + \bar{\psi}_j\delta^h_i + \bar{S}_{ij}\bar{\varphi}^h. \tag{$\bar{7}$}$$

По предложению отображенние L не сохраняет поле направлений E_1, поэтому существует одна такая точка $\underset{0}{x}$, в которой векторы $\varphi^h(\underset{0}{x})$, $\bar{\varphi}^h(\underset{0}{x})$ являются линейно независимыми. Рассмотрим в пространстве $A_n(E_1)$ E_1-планарную кривую, заданную функциями $x^k = x^h(t)$, котороя отлична от автопараллельной кривой , и проходит через точку $\underset{0}{x}$ $(x^h(t_0) = \underset{0}{x})$. Потребуем, чтобы касательный вектор кривой $x^h(t)$ в точке $\underset{0}{x}$ и векторы $\varphi^h(\underset{0}{x})$, $\bar{\varphi}^h(\underset{0}{x})$ являлись линейно независимыми, далее значение функции $b(t)$ при параметре t_0 отличалось от нуля. Тогда из (1), используя ($\bar{7}$), в точке $\underset{0}{x}$ получаем следующее соотношение:

$$\frac{\bar{D}\lambda^h}{dt}t_0 = \bar{a}_0\lambda^h(t_0) + \bar{b}_0\bar{\varphi}^h(\underset{0}{x}) + b_0\varphi^h(\underset{0}{x}),$$

в котором $\bar{a}_0 = a(t_0) + 2\bar{\psi}_p\lambda^p$, $\bar{b}_0 = \bar{S}_{pq}\lambda^p\lambda^q$, $b_0 = b(t_0)$. $\left(\frac{\bar{D}}{dt}\right.$ обозначает абсолютную производную вдоль кривой $x^h(t)$ по обьектам связностю $\bar{A}_n$.) Вследствие линейно независимости векторов $\varphi^h(\underset{0}{x})$, $\bar{\varphi}^h(\underset{0}{x})$, $\lambda^h(t_0)$ вектор $b_0\varphi^h(\underset{0}{x})$ не выражается из векторов $\bar{\varphi}^h(\underset{0}{x})$, $\lambda^h(t_0)$, и так уравнения ($\bar{1}$) не удовлетворяются. То кривая $x^h(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ не является E_1-планарной. Итак если отображение L не сохраняет поле направлений, гогда L не является E_1-планарным. *Теорема 2. доказана.*

Литература

[1] Н. С. Синюков, Геодезические отображения римановых пространства. *Москва,* Наука, 1979.

[2] Й. Микеш—Н. С. Синюков, О квазипланарных отображениях пространств аффиной связности. *Известия ВУЗ,* **248** (1983), 55—61.

[3] T. Otsuki—Y. Tashiro, On curves in Kählerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.* 3, (1954), 57—78.

(Поступило 20, I. 1987)