Самоинъективные скрещенные произведения групп и колец

С. В. МИХОВСКИ (Пловдив)

Напомним, что ассоциативное кольцо R самоинъективно, если R — инъективный R-модуль [2].

Самоинъективные групповые кольца изучались многими авторами. Коннел [5] доказал, что если ассоциативное кольцо K самоинъективно и группа G конечна, то и групповое кольцо KG самоинъективно. Ранее этот результат был получен в [6] при дополнительном предположении, что K — коммутативное кольцо. Конечность группы G, когда кольцо KG самоинъективно, доказана различными методами в работах [7], [8], [10] и [16].

Пассман [11, Лемма 4] доказал, что скрещенная групповая алгебра $(G, K, \varrho, 1)$ конечной группы G и поля K всегда самоинъективна. Следующий шаг в этом направлении сделал Рейд [14]. Он доказал, что если G принадлежит классу групп, в котором любая бесконечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу, то скрещенная групповая алгебра $(G, K, \varrho, 1)$ группы G и алгебраически замкнутого поля K самоинъективно тогда и только тогда, когда группа G конечна.

В настоящей работе результат Пассмана [11] обобщается для произвольных скрещенных произведений (G, K, ϱ, σ) и доказано, что самоинъективность скрещенного произведения $(G, K, 1, \sigma)$ при единичной системе факторов влечет конечность группы G. Кроме того, получены некоторые теоремы, которые расширяют результаты Рейда [14] и для скрещенных произведений, т. е. указаны некоторые условия, при которых самоинъективность кольца (G, K, ϱ, σ) влечет конечность группы G. Примеры показывают, что в общем случае это неверно даже для скрещенных групповых колец $(G, K, \varrho, 1)$.

Резюме основных результатов работы опубликовано в [3].

Пусть $W=(G, K, \varrho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение [1] группы G и кольца K с единицей 1 при системе факторов

$$\varrho = \{\varrho_{g,h} \in K^* | g, h \in G\}$$

и отображение $\sigma\colon G \to A(K)$ группы G в группу автоморфизмов $A(K)$ кольца K, где K^* — группа обратимых элементов кольца K. Если

$$T(G) = \{t_g \in W | g \in G\}$$

является базисом K-модуля W, то

$$t_g t_h = t_{gh} \varrho_{g,h}, \quad \alpha t_g = t_g \alpha^{g\sigma} \tag{1}$$

для всех $g, h \in G$ и $\alpha \in K$, где $\alpha^{g\sigma}$ — образ элемента α под действием автоморфизма $g\sigma \in A(K)$. Тогда каждый элемент $r \in W$ однозначно записывается в виде

$$r = \sum_{g \in G} t_g r(g), \quad r(g) \in K$$

и условия ассоциативности кольца W принимают следующий вид:

$$\varrho_{g_1, g_2 g_3} \varrho_{g_2, g_3} = \varrho_{g_1 g_2, g_3} \varrho_{g_1, g_2}^{g_3\sigma}, \tag{2}$$

$$\alpha^{(g_1 g_2)\sigma} = \varrho_{g_1, g_2} \alpha^{g_1\sigma \cdot g_2\sigma} \varrho_{g_1, g_2}^{-1} \tag{3}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g_1, g_2, g_3 \in G$. Если σ отображает группу G в единичний автоморфизм кольца K, то кольцо $W = (G, K, \varrho, 1)$ называется скрещенным групповым колцом. При предположении, что и система факторов ϱ единична, т. е. $\varrho_{g,h} = 1$ для всех $g, h \in G$, то W совпадает с групповым кольцом KG. Легко проверяется, что $t_1 \varrho_{1,1}^{-1}$ — единица кольца W [1]. Если заменим базисный элемент t_1 $(1 \in G)$ элементом $t_1 \varrho_{1,1}^{-1}$, то, не теряя общности, можем считать, что $\varrho_{1,1} = 1$. В таком случае система факторов ϱ называется нормализованной [12]. Тогда для всех $\alpha \in K$ и $g \in G$ выполняются равенства (см. [1]):

$$\varrho_{1,g} = \varrho_{g,1} = \varrho_{1,1} = 1, \quad \alpha^{1\sigma} = \alpha.$$

Кроме того, из (2) следует, что

$$\varrho_{g, g^{-1}}^{g\sigma} = \varrho_{g^{-1}, g} \quad (g \in G), \tag{4}$$

а из (3) получаем

$$\alpha^{g\sigma \cdot g^{-1}\sigma} = \varrho_{g, g^{-1}}^{-1} \alpha \varrho_{g, g^{-1}}, \tag{5}$$

$$\alpha^{(g\sigma)^{-1}} = \varrho_{g, g^{-1}} \alpha^{g^{-1}\sigma} \varrho_{g, g^{-1}}^{-1} \tag{6}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g \in G$.

Лемма 1. *Если g и h — произвольные элементы группы G, то элементы системы факторов кольца (G, K, ϱ, σ) удовлетворяют условие*

$$(\varrho_{gh^{-1}, hg^{-1}} \varrho_{h, g^{-1}})^{g\sigma} = \varrho_{gh^{-1}, h} \varrho_{g^{-1}, g}. \tag{7}$$

Доказательство. При $g_1 = gh^{-1}$, $g_2 = h$ и $g_3 = g^{-1}$ из (2) следует равенство

$$\varrho_{gh^{-1}, hg^{-1}} \varrho_{h, g^{-1}} = \varrho_{g, g^{-1}} \varrho_{gh^{-1}, h}^{g^{-1}\sigma}.$$

Если на это равенство подействуем автоморфизмом $g\sigma$ и применим формулы (4) и (5), то получим равенство (7). Лемма доказана.

Главную роль при доказательстве теоремы 4 играет следующая лемма. Соответсвующее утверждение для групповых колец доказано в [5, Предложение 7].

Лемма 2. *Если $W = (G, K, \varrho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение конечной группы G и кольца K, то для любого правого W-модуля W, абелевы группы $\overline{W} = \mathrm{Hom}_W(M, W)$ и $\overline{K} = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ изоморфны.*

Доказательство. Каждому элементу $a \in \overline{W}$ сопоставим такой элемент $\varphi(a)=\bar{a}$, что

$$\bar{a}(m) = a(m)(1) \quad (m \in M,\ 1 \in G),$$

где $a(m)$ — образ элемента $m \in M$ в W под действием гомоморфизма a, а $a(m)(1)$ — коэффициент базисного элемента t_1 в записи элемента $a(m) \in W$. Легко проверяется, что $\bar{a} \in \overline{K}$. Так как

$$\bar{a}(mt_g) = a(mt_g)(1) = [a(m)t_g](1),$$

то отсюда следует, что

$$\bar{a}(mt_g) = \varrho_{g^{-1},g}[a(m)(g^{-1})]^{g\sigma}.$$

Следовательно, элемент $a(m)(g^{-1})$ однозначно определяется элементом $\bar{a}(mt_g)$, а это показывает, что элемент a однозначно определяется элементом $\bar{a}$. Поэтому φ является отображением группы $\overline{W}$ в группу $\overline{K}$. Поскольку

$$(\overline{a_1 - a_2})(m) = \bar{a}_1(m) - \bar{a}_2(m),$$

то φ является мономорфизмом. Докажем, что φ отображает группу $\overline{W}$ на группу $\overline{K}$.

Действительно, если $\psi \in \overline{K}$, то определим отображение $a\colon M \to W$, где

$$a(m)(g) = \psi(mt_{g^{-1}})^{g\sigma} \varrho^{-1}_{g^{-1},g}.$$

Так как G — конечная группа, то $a(m) \in W$. Кроме того,

$$\bar{a}(m) = a(m)(1) = \psi(m)$$

для всех $m \in M$ и, следовательно, $\bar{a} = \psi$. Проверим, что $a \in \overline{W}$. В самом деле, равенство

$$a(m_1+m_2)(g) = a(m_1)(g) + a(m_2)(g), \quad g \in G$$

следует из определения коэффициента $a(m)(g)$, а отсюда вытекает, что

$$a(m_1+m_2) = a(m_1) + a(m_2) \quad (m_1, m_2 \in M).$$

Остается доказать, что

$$a(mr) = a(m)r \quad (m \in M,\ r \in W).$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $r = t_h\alpha$ $(h \in G,\ \alpha \in K)$. Тогда

$$a(mt_h\alpha) = \sum_{g \in G} t_g \psi(mt_h\alpha t_{g^{-1}})^{g\sigma} \varrho^{-1}_{g^{-1},g}.$$

Но поскольку

$$\psi(mt_h\alpha t_{g^{-1}}) = \psi(mt_{hg^{-1}}) \varrho_{h,g^{-1}} \alpha^{g^{-1}\sigma},$$

то применяя формулу (5), мы получим, что имеет место равенство

$$a(mt_h\alpha) = \sum_{g \in G} t_g \psi(mt_{hg^{-1}})^{g\sigma} \beta(g, h)\alpha$$

для всех $m \in M$, $h \in G$ и $\alpha \in K$, где

$$\beta(g, h) = \varrho^{g\sigma}_{h,g^{-1}} \varrho^{-1}_{g^{-1},g}.$$

Чтобы вычислить произведение $a(m)t_h\alpha$, элемент $a(m)$ представим в виде
$$a(m)=\sum_{k\in G}[a(m)(k)]^{(k\sigma)^{-1}}t_k.$$
Тогда, применяя формулы (6) и (4), мы получим
$$a(m)t_h\alpha=\sum_{k\in G}\psi(mt_{k^{-1}})\varrho_{k,k^{-1}}^{-1}t_{kh}\varrho_{k,h}\alpha.$$
Следовательно
$$a(m)t_h\alpha=\sum_{g\in G}\psi(mt_{hg^{-1}})^{g\sigma}\bar{\beta}(g,h)\alpha,$$
где $g=kh$ и
$$\bar{\beta}(g,h)=(\varrho_{gh^{-1},hg^{-1}}^{-1})^{g\sigma}\varrho_{gh^{-1},h}.$$
Но так как, в силу леммы 1, $\beta(g,h)=\bar{\beta}(g,h)$, то $a(mt_h\alpha)=a(m)t_h\alpha$ и лемма доказана.

Лемма 3. *Если W — произвольное скрещенное произведение конечной группы G и кольца K, то* $\mathrm{Hom}_W(W,W)$ *и* $\mathrm{Hom}_K(W,K)$ *яляются изоморфными W-модулями.*

Доказательство. Для любых элементов $a\in\tilde{W}=\mathrm{Hom}_W(W,W)$ и $r\in W$ определим отображение ar: $W\to W$, где $ar(r')=a(rr')$ для всех $r'\in W$. Легко проведяется, что $ar\in\tilde{W}$ и, следовательно, $\tilde{W}$ является W-модулем. Аналогичным образом превращаем в W-модуль и группу $\tilde{K}=\mathrm{Hom}_K(W,K)$.

В силу леммы 2 (см. ее доказательство), существует такой изоморфизм φ: $\tilde{W}\to\tilde{K}$ абелевый групп $\tilde{W}$ и $\tilde{K}$, что
$$\varphi(a)(r)=a(r)(1)\quad(1\in G)$$
для всех $a\in\tilde{W}$ и $r\in W$. Тогда
$$\varphi(ar_1)(r)=[ar_1(r)](1)=a(r_1r)(1).$$
Кроме того,
$$[\varphi(a)r_1](r)=\varphi(a)(r_1r)=a(r_1r)(1).$$
Таким образом мы установили, что
$$[\varphi(a)r_1](r)=\varphi(ar_1)(r)$$
для всех $r\in W$ и поэтому
$$\varphi(a)r_1=\varphi(ar_1),$$
т. е. φ является W-модульным изоморфизмом. Лемма доказана.

Теорема 4. *Любое скрещенное произведение $W=(G,K,\varrho,\sigma)$ конечной группы G и самоинъективного кольца K является самоинъективным кольцом.*

Доказательство. Так как W-модули W и $\mathrm{Hom}_W(W,W)$ изоморфны, то ввиду леммы 3, при условий теоремы достаточно доказать, что $\tilde{K}=\mathrm{Hom}_K(W,K)$ является инъективным W-модулем.

Пусть N и L — произвольные правые W-модули и $N\subset L$. Покажем, что для любого $\varphi\in\mathrm{Hom}_W(N,\tilde{K})$ существует продолжение $\varphi'\in\mathrm{Hom}_W(L,\tilde{K})$.

Действительно, если $x \in N$, то $\varphi(x) \in \tilde{K}$ и определим отображение ψ: $N \to K$, где $\psi(x) = \varphi(x)(t_1)$ для всех $x \in N$. Тогда непосредствено проверяется, что $\psi \in \mathrm{Hom}_K(N, K)$. Так как K — самоинъективное кольцо, то ψ имеет продолжение $\psi' \in \mathrm{Hom}_K(L, K)$.

Для всех $y \in L$ положим

$$\varphi'(y)(r) = \psi'(yr) \quad (r \in W).$$

Очевидно, что $\varphi'(y) \in \tilde{K}$. Кроме того, $\varphi' \in \mathrm{Hom}_W(L, \tilde{K})$, так как

$$\varphi'(y_1 + y_2)(r) = \varphi'(y_1)(r) + \varphi'(y_2)(r)$$

и, следовательно,

$$\varphi'(y_1 + y_2) = \varphi'(y_1) + \varphi'(y_2).$$

А поскольку

$$\varphi'(yr)(r') = [\varphi'(y)r](r') \quad (r' \in W),$$

то выполняется и равенство

$$\varphi'(yr) = \varphi'(y)r \quad (r \in W).$$

В силу определения отображения ψ и ввиду того, что ψ' является продолжением отображения ψ, то для всех $x \in N \subset L$ следует, что

$$\varphi'(x)(r) = \psi'(xr) = \psi(xr) =$$

$$= \varphi(xr)(t_1) = \varphi(x)(rt_1) = \varphi(x)(r),$$

т. е. $\varphi'(x) = \varphi(x)$, когда $x \in N$. Следовательно, φ' является продолжением φ и теорема доказана.

Следующие две утверждения обобщают результаты Фаркаса [7] и доказываются его методом.

Лемма 5. *Если H — подгруппа группы G и $W = (G, K, \varrho, \sigma)$ — самоинъективное кольцо$_r$ то и кольцо $W_H = (H, K, \varrho, \sigma)$ самоинъективно.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \Pi(G/H)$ — полная система представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H. Согласно критерия Бэра [2], нужно доказать, что для любого правого идеала I кольца W_H каждый гоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_{W_H}(I, W_H)$ имеет продолжеине $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{W_H}(W_H, W_H)$.

Очевидно, что

$$J = \sum_{g_i \in \Pi} I t_{g_i} = \Big\{ \sum_{g_i \in \Pi} a_i t_{g_i} | a_i \in I \Big\}$$

является правым идеалом кольца W. Для любого элемента

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i t_{g_i} \quad (a_i \in I,\ g_i \in \Pi)$$

положим

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) t_{g_i}.$$

Если $g\in G$, то $g_i g=h_{ij}g_j$ $(h_{ij}\in H;\ g_i, g_j\in \Pi)$ и

$$xt_g\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i t_{h_{ij}} (\varrho_{h_{ij},g_j}^{-1}\varrho_{g_i,g}\alpha)^{(g_j\sigma)^{-1}} t_{g_j}.$$

Поскольку $\varphi\in \mathrm{Hom}_{W_H}(I, W_H)$, то

$$\psi(xt_g\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) t_{h_{ij}} (\varrho_{h_{ij},g_j}^{-1}\varrho_{g_i,g}\alpha)^{(g_j\sigma)^{-1}} t_{g_j}.$$

Точно так же вычисляем $\psi(x)t_g\alpha$ и установим, что

$$\psi(xt_g\alpha) = \psi(x)t_g\alpha \quad (g\in G,\ \alpha\in K).$$

Следовательно, $\psi\in \mathrm{Hom}_W(J, W)$. Но так как W — самоинъективное кольцо, то ψ имеет продолжение $\psi'\in \mathrm{Hom}_W(W, W)$. Пусть φ' является ограничением гомоморфизма ψ' на подкольцо W_H, т. е. $\varphi'\in \mathrm{Hom}_{W_H}(W_H, W_H)$, где $\varphi'(x)=\psi'(x)$ для всех $x\in W_H$. Если $x\in I$, то $x\in J\cap W_H$ и поэтому

$$\varphi'(x)=\psi'(x)=\psi(x)=\varphi(x).$$

Следовательно, φ' продолжает φ и лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $W=(G, K, 1, \sigma)$ *— скрещенное произведение с единичной системой факторов. Кольцо* W *самоинъективно тогда и только тогда, когда* K *— самоинъективное кольцо и группа* G *конечна.*

Доказательство. В силу теоремы 4 и леммы 5, достаточно доказать, что самоинъективность кольца $(G, K, 1, \sigma)$ влечет за собой конечность группы G.

Пусть $H=\langle h_1, h_2, \dots, h_k\rangle$ — подгруппа группы G, порожденная элементами $h_1, h_2, \dots, h_k$. Рассмотрим правый идеал I кольца W_H, порожденный элементами $t_{h_i}-t_1$ $(i=1, 2, \dots, k)$. Тогда

$$(t_{h_i}-t_1)\sum_{h\in H} t_h\alpha_h = \sum_{h\in H}(t_{h_ih}-t_h)\alpha_h =$$

$$=\sum_{h\in H}(t_{h_ih}-t_1)\alpha_h - \sum_{h\in H}(t_h-t_1)\alpha_h$$

и поэтому идеал I не содержит единицу t_1 кольца W_H. Следовательно, I является собственным конечно порожденным правым идеалом самоинъективного кольца W_H и его левый аннулятор отличен от нуля [9, Предложение 1]. Если $0\neq x\in W_H$ и $xI=\{0\}$, то

$$x=xt_{h_1}=xt_{h_2}=\dots=xt_{h_k}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $xt_h=x$ для всех $h\in H$. Так как в записи элемента x участвует конечное число элементов подгруппы H, а h — ее произвольный элемент, то последнее равенство показывает, что подгруппа H конечна. Таким образом мы доказали, что G — локально конечная группа.

Если G — бесконечная группа, то существует строго возрастающая бесконечная цепочка

$$H_0 < H_1 < \dots < H_n < \dots$$

конечных подгрупп группы G и пусть

$$H = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$$

является их объединением. Для любого $n \geqq 1$ положим

$$d_n = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1 + \ldots + \tilde{H}_{n-1},$$

где $\tilde{H}_i$ — сумма элементов $\{t_h | h \in H_i\}$. Если $h \in H_i \setminus H_{i-1}$, то положим $|h| = i$ и $d(h) = d_{|h|}$. Очевидно, что

$$d_n(t_h - t_1) = d(h)(t_h - t_1) = d_{|h|}(t_h - t_1)$$

для всех $n \geqq |h|$, поскольку $h \in H_i$ влечет $\tilde{H}_i(t_h - t_1) = 0$.

Пусть J — правый идеал кольца W_H, порожденный элементами $\{t_h - t_1 | h \in H\}$, и определим отображение $\varphi\colon J \to W_H$, где

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H} d(h)(t_h - t_1)\alpha_h$$

для произвольного элемента

$$x = \sum_{h \in H} (t_h - t_1)\alpha_h \quad (\alpha_h \in K)$$

идеала J. Очевидно, что $\varphi(x\alpha) = \varphi(x)\alpha$ для всех $\alpha \in K$. Кроме того, если $g \in H$, то

$$\varphi[(t_h - t_1)t_g] = \varphi(t_n - t_1)t_g.$$

Действительно, так как

$$F = \varphi[(t_h - t_1)t_g] - \varphi(t_h - t_1)t_g =$$
$$= [d(hg) - d(h)](t_{hg} - t_1) - [d(g) - d(h)](t_g - t_1),$$

то рассмотрим три случая.

а) Если $|h| > |g|$, то $d(hg) = d(h)$ и

$$F = (\tilde{H}_{|g|} + \ldots + \tilde{H}_{|h|})(t_g - t_1) = 0.$$

б) Если $|h| < |g|$, то $d(hg) = d(g)$ и

$$F = (\tilde{H}_{|h|} + \ldots + \tilde{H}_{|g|})(t_h - t_1)t_g = 0.$$

в) Если $|h| = |g|$, то $d(h) = d(g)$ и

$$F = d(hg)(t_{hg} - t_1) - d(h)(t_{gh} - t_1).$$

Ввиду того, что $|hg| \leqq |h|$, то

$$d(h)(t_{hg} - t_1) = d_{|hg|}(t_{hg} - t_1) = d(hg)(t_{hg} - t_1)$$

и снова $F = 0$.

Следовательно, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{W_H}(J, W_H)$. Ввиду леммы 5, φ имеет продолжение $\Phi \in \mathrm{Hom}_{W_H}(W_H, W_H)$. Поэтому существует такой элемент $p \in W_H$, что

$$\Phi(r) = pr, \quad p = \Phi(t_1)$$

для всех $r \in W_H$. В частности, если $h \in H$, то

$$\Phi(t_h - t_1) = \varphi(t_h - t_1) = d(h)(t_h - t_1) = p(t_h - t_1).$$

Если $p \in W_{H_n}$, то для элемента $h \in H_{n+1} \setminus H_n$ имеет место равенство

$$p - d(h) = [p - d(h)]\, t_h,$$

где опорная подгруппа элемента левой части равенства принадлежит подгруппе H_n, а опорная подгруппа элемента правой части принадлежит смежному классу $H_n h \neq H_n$, а это невозможно. Полученное противоречие показывает, что группа G конечна и теорема доказана.

Следствие 7. *Если $W = (G, K, \varrho, \sigma)$ — самоинъективное кольцо, то кольцо K самоинъективно и группа G периодическая.*

Действительно, самоинъективность кольца K следует из леммы при $H = \{1\}$. Предположим, что G содержит элемент g бесконечного порядка. Тогда в кольце $W_{\langle g \rangle}$ базисные элементы $\{t_{g^k}\}$ заменим элементами $\{t_g^k\}$ и получим самоинъективное скрещенное произведение кольца K и бесконечной циклической группы $\langle g \rangle$ при единичной системе факторов, а это противоречит теореме 5.

Другое доказательство периодичности группы G можем получить, используя тот факт, что если g — элемент бесконечного порядка, то элемент $t_g - t_1$ порождает собственный правый идеал кольца W, а согласно [9, Предложение 1], его левый анулятор отличен от нуля, что невозможно.

Пусть $A(K)$ — группа автоморфизмов, а $B(K)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов кольца K. Ядром $\ker \sigma$ отображения σ называется [1] ядро сквозьного отображения

$$G \xrightarrow{\sigma} A(K) \xrightarrow{\eta} A(K)/B(K),$$

где η — естественный гомоморфизм, т.е.

$$\ker \sigma = \{g \in G \mid g\sigma \in B(K)\}.$$

Через IA обозначим класс всех групп, в котором любая бесконечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу. Известно (см. [14]), что все локально разрешимые группы, локально конечные группы, FC-группы, а так же и все непериодические группы входят в классе IA.

Теорема 8. *Пусть $W = (G, K, \varrho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение группы G класса IA и алгебраически замкнутого поля K. Если ядро отображения σ имеет конечный индекс в G, то кольцо самоинъективно тогда и только тогда, когда группа G конечна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если W — самоинъективное кольцо, то ядро H отображения σ является конечной группой. В самом деле, H — нормальная подгруппа группы φ [1] и, ввиду леммы 5, кольцо W_H самоинъективно. Но так как K — поле, то W_H является скрещенным групповым кольцом и конечность группы H следует из [14, Теорема 2.6].

Как показывают примеры (см. [13, Предложение 4.2 и Предложение 4.3]), существуют скрещенные групповые алгебры полей и бесконечных абелевых групп, которые являются полями, а следовательно и самоинъективными кольцами. Поэтому в общем случае самоинъективность кольца (G, K, ϱ, σ) не влечет конечность группы G. Все же интересно, при каких условиях группа G конечна?

Пусть S — непустое подмножество группы G, а $C_G(S)$ — централизатор S в группе G. Положим

$$C_G^t(S) = \{g \in G \mid t_g t_h = t_h t_g \text{ для всех } h \in S\}.$$

Очевидно, что $\{1\} \subseteq C_G^t(S) \subseteq G_G(S)$ и, если система факторов ϱ принадлежит подкольцу

$$K^G = \{\alpha \in K \mid \alpha^{g\sigma} = \alpha \text{ для всех } g \in G\},$$

то $C_G^t(S)$ — подгруппа группы G.

Применяя рассуждения Рейда [15, Лемма 2.3 и Лемма 2.5], мы докажем следующую лемму.

Лемма 9. *Если центр кольца K^G является конечной прямой суммой областей целостности и содержит систему факторов ϱ скрещенного произведения (G, K, ϱ, σ), то*

1) *$C_G^t(S)$ — нормальная подгруппа группы $C_G(S)$ для любого непустого подмножества S группы G.*

2) *Если S — конечное подмножество периодических элементов группы G, то факторгруппа $C_G(S)/C_G^t(S)$ конечна.*

Доказательство. Для произвольного элемента $h \in S$ рассмотрим отображение

$$\theta_h \colon C_G(S) \to (K^G)^*, \quad \theta_h(g) = \varrho_{h,g}^{-1} \varrho_{g,h}.$$

Покажем, что θ_h является гомоморфизмом группы $C_G(S)$ в мультипликативную группу $(K^G)^*$ кольца K^G. В самом деле, равенство

$$\theta_h(g_1 g_2) = \theta(g_1)\theta(g_2), \quad g_1, g_2 \in C_G(S)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\varrho_{h, g_1 g_2}^{-1} \varrho_{g_1 g_2, h} = \varrho_{h, g_1}^{-1} \varrho_{g_1, h} \varrho_{h, g_2}^{-1} \varrho_{g_2, h},$$

а это равносильно условию

$$\varrho_{g_1 g_2, h} \varrho_{h, g_1} \varrho_{h, g_2} = \varrho_{h, g_1 g_2} \varrho_{g_1, h} \varrho_{g_2, h}. \tag{8}$$

Но так как, в силу (2),

$$\varrho_{g_1 g_2, h} = \varrho_{g_1, g_2}^{-1} \varrho_{g_1, g_2 h} \varrho_{g_2, h},$$

а

$$\varrho_{h, g_1 g_2} = \varrho_{g_1, g_2}^{-1} \varrho_{h g_1, g_2} \varrho_{h, g_1} \quad \text{и} \quad g_i h = h g_i \quad (i = 1, 2),$$

то равенство (8) равносильно условию

$$\varrho_{g_1, h g_2} \varrho_{h, g_2} = \varrho_{g_1 h, g_2} \varrho_{g_1, h},$$

которое следует из условий ассоциативности (2).

Очевидно, что

$$\ker \theta_h = \{g \in C_G(S) \mid \varrho_{g,h} = \varrho_{h,g}\}.$$

Тогда
$$C_G^t(S) = \bigcap_{h\in S} \ker\theta_h$$
и $C_G^t(S)$ является нормальной подгруппой группы $C_G(S)$.

Далее, пусть S — конечное подмножество периодических элементов группы G и $h^n=1$ для всех $h\in S$. Если $g\in C_G(S)$ и $h\in S$, то
$$(t_h t_g)^n = t_g^n\alpha, \quad \alpha\in(K^G)^*.$$
Тогда
$$(t_g t_h)^n = [t_g(t_h t_g)t_g^{-1}]^n = t_g(t_h t_g)^n t_g^{-1} =$$
$$= t_g(t_g^n\alpha)t_g^{-1} = t_g^n\alpha = (t_n t_g)^n.$$
Но так как
$$t_g t_h = t_h t_g \varrho_{h,g}^{-1}\varrho_{g,h},$$
то отсюда следует, что
$$(\varrho_{h,g}^{-1}\varrho_{g,h})^n = 1.$$
Поскольку центр кольца K^G содержит лишь конечное число корней n-ой степени из единицы, то фактор группа $C_G(S)/\ker\theta_h$ конечна. Но тогда и факторгруппа
$$C_G(S)/C_G^t(S) = C_G(S)/\bigcap_{h\in S}\ker\theta_h$$
будет конечной [12, Лемма 4.1.3]. Лемма доказана.

Пусть $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядков периодических элементов группы G. Как обычно, подгруппа D мультипликативной группы K^* кольца K назовем $\pi(G)$-делимой, если для любого элемента $\alpha\in D$ уравнение $x^p=\alpha$ имеет решение в D для всех $p\in\pi(G)$. Методом Рейда [14, Предложение 1.2 и Теорема 1.5] докажем следующую лемму.

Лемма 10. *Пусть в скрещенном произведении $W=(G,K,\varrho,\sigma)$ группа G бесконечна и абелева, а центр кольца K^G — прямая сумма областей целостности. Если система факторов ϱ принадлежит некоторой $\pi(G)$-делимой подгруппе мультипликативной группы центра кольца K^G, то G содержит такую бесконечную подгруппу H, что $W_H\cong(H,K,1,\sigma)$.*

Доказательство. Если G содержит бесконечную циклическую подгруппу $H=\langle g\rangle$, то в кольце W_H базисные элементы $\{t_{g^k}|g^k\in H\}$ заменяем элементами бесконечной циклической группы $\langle t_g\rangle$ и, очевидно, что в новом базисе система факторов кольца W_H единична. Предположим, что G содержит квазициклическую подгруппу
$$H = C(p^\infty) = \{g_n|g_1^p=1,\, g_{n+1}^p = g_n,\ n\in N\},$$
где N — множество натуральных чисел. Тогда в W_H выполняются равенства
$$t_{g_1}^p = t_1\alpha_1, \quad t_{g_{n+1}}^p = t_{g_n}\alpha_n,$$
где элементы α_n $(n\in N)$ принадлежат некоторой $\pi(G)$-делимой подгруппе D группы $(K^G)^*$. Тогда существуют такие элементы β_n $(n\in N)$, что выполняются равенства
$$(t_{g_1}\beta_1)^p = t_1, \quad (t_{g_{n+1}}\beta_{n+1})^p = t_{g_n}\beta_n.$$

Для этой цели достаточно выбрать элементы $\beta_n \in D$ $(n \in N)$ так, чтобы выполнялись условия

$$\beta_1^p = \alpha_1^{-1}, \; \beta_{n+1}^p = \alpha_{n+1}^{-1} \beta_n \quad (n \in N).$$

Если в кольце W_H заменим K-базис элементами квазициклической группы

$$\overline{H} = \langle t_{g_n} \beta_n | n \in N \rangle,$$

то система факторов в W_H будет единичной.

Предположим, что G — периодическая абелева группа, котороя не содержит подгруппу типа $C(p^\infty)$. Пусть $g_1 \in G \setminus \{1\}$ и $H_1 = \langle g_1 \rangle$. Тогда $G = C_G(H_1)$ и, ввиду леммы 9, $\overline{G}_1 = C_G^t(H_1)$ — бесконечная группа. Поскольку $\overline{G}_1$ тоже не содержит квазициклическую подгруппу, то $\overline{G}_1$ не является существенным расширением конечной группы H_1 [4, Теорема 25.1]. Следовательно существует такой элемент $g_2 \in \overline{G}_1 \setminus \{1\}$, что $H_1 \cap \langle g_2 \rangle = \{1\}$. Положим $H_2 = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle$. Теперь снова $\overline{G}_2 = C_G^t(H_2)$ — бесконечная группа и $\overline{G}_2$ не является существенным ресширением подгруппы H_2. Поэтому существует такой элемент $g_3 \in \overline{G}_2 \setminus \{1\}$, что $H_2 \cap \langle g_3 \rangle = \{1\}$ и пусть $H_3 = H_2 \times \langle g_3 \rangle$. Продолжая таким образом, мы получим бесконечную подгруппу $H = \bigcup_{n \in N} H_n$, где

$$H_n = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \ldots \times \langle g_n \rangle,$$

а $g_{n+1} \in C_G^t(H_n) \setminus \{?\}$ и $H_n \cap \langle g_{n+1} \rangle = \{1\}$. Далее, для любого элемента g_n $(n \in N)$ выбираем такое $\alpha_n \in D$, чтобы выполнялось равенство

$$(t_{g_n} \alpha_n)^{k_n} = t_1,$$

где k_n — порядок элемента g_n. Так как, согласно выбора элементов $\{g_n | n \in N\}$, элементы $\{t_{g_n} \alpha_n | n \in N\}$ коммутируют между собой, то элементы подгруппы

$$\overline{H} = \prod_{n \in N} \langle t_{g_n} \alpha_n \rangle$$

кольца W_H образуют K-базис с единичной системой факторов. Лемма доказана.

Теорема 11. *Пусть $W = (G, K, \varrho, \sigma)$ — произвольное скрещенное произведение группы G класса IA, а центр кольца K является прямой суммой областей целостности. Если ядро H отображения σ имеет конечный индекс в G и мультипликативная группа центра кольца K является $\pi(H)$-делимой, то W — самоинъективное кольцо тогда и только тогда, когда кольцо K самоинъективно и группа G конечна.*

Доказательство. Достаточно показать, что если W — самоинъективное кольцо, то H — конечная группа. В самом деле, ввиду леммы 5, кольцо W_H самоинъективно и так как

$$H = \{h \in G | h\sigma \in B(K)\},$$

то для любого элемента $h \in H$ существует такой элемент $\alpha_h \in K^*$, что $\alpha^{h\sigma} = \alpha_h \alpha_h^{-1}$ для всех $\alpha \in K$. Тогда базисные элементы $\{t_h | h \in H\}$ кольца W_H заменяем элементами $\{\bar{t}_h = t_h \alpha_h | h \in H\}$. Очевидно, что $\alpha \bar{t}_h = \bar{t}_h \alpha$ для всех $\alpha \in K$ и, следовательно $W_H \cong (H, K, \bar{\varrho}, 1)$. Кроме того, из условий ассоциативности (3) следует, что новая система факторов $\bar{\varrho}$ принадлежит центру кольца K. Если H — бесконечная группа, то на основании леммы 10 заключаем, что H содержит такую бесконечную абелеву подгруппу $\overline{H}$, что $(\overline{H}, K, \bar{\varrho}, 1) \cong K\overline{H}$. Теперь снова применяем лемму 5 и получаем, что групповое кольцо $K\overline{H}$ самоинъективно, а это противоречит теоремы 6. Полученное противоречие показывает, что группа H конечна и теорема доказана.

Следствие 12 [14]. *Если группа G принадлежит классу IA и K — алгебраичеки замкнутое поле, то скрещенние групповое кольцо $(G, K, \varrho, 1)$ самоинъективно тогда и только тогда, когда группа конечна.*

Теорема 13. *Пусть в скрещенном произведении $W=(G, K, \varrho, \sigma)$ группа G принадлежит классу IA, а центор кольца K^G является прямой суммой областей целостности. Если система факторов ϱ принадлежит некоторой $\pi(G)$-делимой подгруппе центра кольца K^G, то кольцо W самоинъективно тогда и только тогда, когда кольцо K самоинъективно и группа G конечна.*

Теорема непосредствено следует из леммы 10 и теоремы 6.

Следствие 14. *Пусть в скрещенном произведении $W=(G, K, \varrho, \sigma)$ кольцо K содержит простое поле характеристики $p>0$, которому принадлежит система факторов ϱ кольца W. Если G — p-группа класса IA, то кольцо W самоинъективно тогда и только тогда, когда K — самоинъективное кольцо и группа G конечна.*

Действительно, в этом случае система факторов принадлежит $\pi(G)$-делимой подгруппе кольца K^G.

Отметим и один метод построения самоинъективных скрещенных произведений бесконечных групп.

Пусть G — конечное расширение квазициклической p-группы $H=\langle g_n | g_1^p=1, g_{n+1}^p=g_n, n\in N\rangle$ и K — несовершенное поле характеристики p. Пусть $W=(G, K, \varrho, \sigma)$ — такое скрещенное произведение группы G и поля K, что ядро отображения σ содержит подгруппу H и

$$t_{g_1}^p = a, \ t_{g_{n+1}}^p = t_{g_n} \quad (n\in N),$$

где $a\in K$, но K не содержит корень p-ой степени из a. Тогда кольцо W самоинъективно.

Действительно, подкольцо W_H является полем (см. [13], Предложение 4.2]), а кольцо W можем рассматривать как скрещенное произведение конечной группы G/H и поля W_H, т. е.

$$W = (G, K, \varrho, \sigma) = (G/H, W_H, \bar{\varrho}, \bar{\sigma}).$$

Тогда самоинъективность кольца W следует из теоремы 4.

Литература

[1] А. А. Бовди, Скрещенные произведения полугруппы и кольца, *Сиб. матем. ж. 4*, **№ 3** (1963), 481—499.
[2] Ф. Каш, Модули и кольца, «Мир», *Москва*, 1981.
[3] С. В. Миховски, Самоинъективные скрещенные произведения групп и колец, *Доклады БАН*, **40**, № 3 (1987), 13—16.
[4] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы, т. 1, «Мир», *Москва*, 1974.
[5] I. G. Connel, On the group ring, *Canad. J. Math.* **15** (1963), 650—685.
[6] S. Eilenberg, T. Nakayama, On the dimension of modules and algebras II, *Magoya Math. J.*, **9** (1951), 1—16.
[7] D. R. Farkas, Sef-injective group algebras, *J. Algebra*, **25** (1973), 313—315.
[8] E. R. Gentile, A note on injective group rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 431—432.
[9] T. Kato, Characterizations of self-injective rings, *Proc. Japan Acad.*, **44** (1968), 294—297.
[10] M. Malliavin, Sur les anneaux de groupes FP self-injectifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **273** (1971), 88—91.
[11] D. S. Passman, On the rign of quotients of a group ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33** (1972), 221—225.
[12] D. S. Passman, The algebraic structure of group rings, Wiely — Interscience, *New-York*, 1977.
[13] D. S. Passman, Radicals of twisted group rings II, *Proc. London Math. Soc.*, **22** (1971), 633—651.
[14] A. Reid, Twisted group rings which are Artinian, perfect or selfinjective, *Bull. London Math. Soc.*, **7** (1975), 166—170.
[15] A. Reid, Twisted group rings which are semiprime Goldie rings, *Glasgow Math. J.*, **16** (1975), 1—11.
[16] G. Renault, Sur les anneaux de groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **273** (1971), 84—87.

С. В. МИХОВСКИ
ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. «ПАИСИЯ ХИЛЕНДАРСКОГО»
ПЛОВДИВ 4000, БОЛГАРИЯ

(Поступило 25. III. 1987.)