Степени неприводимых характеров и нормальное строение конечных групп

Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов на Дону)

Пусть p-простой делитель порядка конечной группы G (в заметке рассматриваются только конечные группы). Дж. Томпсон [1, следствие 12.3] показал, что если степени всех нелинейных неприводимых характеров группы G (рассматриваются только комплексные характеры) делятся на p, то G — p-нильпотентная группа, т. е. имеет нормальное p-дополнение. Оказывается, эта теорема Томпсона является легким следствием такой теоремы Тейта [1, теорема 6.31]: Если $G=PN$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, N нормальна в G, то из $P\cap N\leqq \leqq \Phi(P)$ $\big(\Phi(P)$-подгруппа Фраттини группы $P\big)$ вытекает p-нильпотентность G. Эту теорему Тейта можно сформулировать на языке теории характеров так: Если $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ и любой характер из $\mathrm{Irr}(P)$ с ядром, содержащим $\Phi(P)$, допускает продолжение на G, то G имеет нормальное p-дополнение (обратное тоже верно). Мы сейчас покажем, что справедливо такое

Предложение 1. *Пусть $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, и для любого неглавного линейного характера $\lambda\in \mathrm{Irr}(P)$ с $\Phi(P)\leqq \ker\lambda$ степени всех нелинейных неприводимых компонент индуцированного характера λ^G делятся на p, то G — p-нильпотентная группа.*

Доказательство. Пусть λ-произвольный характер P, о котором идёт речь в условии. Так как $\lambda^G(1)=|G: P|\not\equiv 0 \pmod p$ и степени всех нелинейных неприводимых компонент характера λ^G делятся на p, то среди неприводимых компонент характера λ^G имеется линейная компонента λ^*, и λ^*-продолжение λ на G. Поэтому G p-нильпотентна по варианту теоремы Тейта.

Существует такое обобщение теоремы Тейта, принадлежащее Рокетту [2]: Пусть π-некоторое множество простых чисел, P — π-холловская подгруппа группы G, $G=PN$, где N нормальна в G. Если $P\cap N\leqq\Phi(P)$, то N — π-нильпотентна, т. е. имеет нормальное π-дополнение. Поэтому естественно применить теорему Рокетта для поиска аналога только что доказанной теоремы, дающего критерий π-нильпотентности группы на языке степеней её неприводимых характеров. Это — основная цель заметки.

Характер χ группы G назовём π-нильпотентным, если $G/\ker\chi$ — π-нильпотентная группа. Понятно, что линейный характер π-нильпотентен. Систему $X\subseteqq \mathrm{Irr}(G)$ назовём точной, если $\bigcap\limits_{\chi\in x}\ker\chi=I$. Если система X точна, то и $X^{\#}=X-\{1_G\}$, где I_G-главный характер группы G, тоже точна.

Пусть N нормальна в $H \leqq G$. Характер χ секции H/N мы рассматриваем, когда это необходимо, и как характер H. Через $\mathrm{Irr}(\chi)$ обозначается множество всех неприводимых компонент характера χ. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей $|G|$-порядка группы G.

Основная теорема. *Пусть N — π-холловская подгруппа в $H \leqq G$; q^{α_q}-наивысшая степень простого числа q, делящая индекс $|G: H|$; X-точная система характеров в $\mathrm{Irr}(N/\Phi(N))$. Предположим, что для любого $\lambda \in X^\#$ существует такое $p \in \pi \cap \pi(N)$, зависящее от λ, что из $\chi \in \mathrm{Irr}(\lambda^G)$ следует $\chi(1) \equiv 0$ $(p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1))$, если χ не является π-нильпотентным характером степени $\lambda(1)$. Тогда H — π-нильпотентная подгруппа. Если, к тому же, N — π-холловская подгруппа в G, то последняя π-нильпотентна.*

Доказательство. Можем считать, что $N > I$. Пусть $\lambda \in X^\#$. Тогда $\lambda^G(1) = |G: N|\lambda(1)$ не делится на $p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(N)$. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(\lambda^G)$. Если χ не является π-нильпотентным характером степени $\lambda(1)$, то по условию $\chi(1)$ делится на $p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1)$ (p зависит только от λ). Так как степени всех неприводимых компонент характера λ^G не меньше $\lambda(1)$, то в $\mathrm{Irr}(\lambda^G)$ имеется π-нильпотентный характер ψ степени $\lambda(1)$. По закону взаимности $\psi_N = \lambda$, откуда $\lambda = \psi_N = (\psi_H)_N$. Поэтому ψ — π-нильпотентное продолжение λ на G, а так как

$$H/\ker \psi_H = H/H \cap \ker \psi \cong H \ker \psi/\ker \psi \leqq G/\ker \psi,$$

то ψ_H — π-нильпотентное продолжение λ на H. Итак, любой $\lambda \in X^\#$ имеет π-нильпотентное продолжение λ^* на G (таких продолжений может быть несколько, но мы фиксируем лишь одно из них), и π-нильпотентное продолжение λ^*_H на H. Положим $M^* = \bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda^*$. Так как G/M^* изоморфна подгруппе прямого произведения π-нильпотентных групп $G/\ker \lambda^*$ $(\lambda \in X^\#)$, то G/M^* — π-нильпотентная группа. Пусть M/M^*-нормальное π-дополнение в G/M^*. Тогда

$$M \cap N = M^* \cap N = N \cap \Big(\bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda^* \Big) = \bigcap_{\lambda \in X^\#} (\ker \lambda^* \cap N) = \bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda = \Phi(N).$$

Если N — π-холловская подгруппа в G, то M имеет нормальное π-дополнение C (по теореме Рокетта), которое также является нормальным π-дополнением в G. В общем случае

$$N \cap (H \cap M) = (N \cap H) \cap M = N \cap M = \Phi(N),$$

так что снова по теореме Рокетта $H \cap M$ имеет нормальное π-дополнение C_0, являющееся нормальным π-дополнением в H. Теорема доказана.

Интересным моментом теоремы является то, что она даёт информацию о нормальном строении не обязательно нормальной подгруппы H.

Стоит отметить следствие, получающееся при $H = G$.

Следствие 1. *Пусть N-нильпотентная π-холловская подгруппа группы G. Предположим, что для любого $\lambda \in \mathrm{Irr}^\#(N/\Phi(N))$ существует $p \in \pi \cap \pi(N)$, зависящее от λ, и такое, что степени всех неприводимых нелинейных компонент характера λ^G делятся на p. Тогда G — π-нильпотентная группа.*

Томпсон [1, задача 12.1] показал, что если степени неприводимых характеров группы G линейно упорядочены по делимости, то G имеет упорядоченную силовскую башню. Его доказательство даёт больше: то же заключение имеет место, если множество $\{\pi(\chi(1))|\chi\in\mathrm{Irr}(G)\}$ линейно упорядочено по включению; здесь $\pi(m)$-множество всех простых делителей натурального числа m. Ниже мы усилим этот результат.

Пусть $\pi(G)=\pi_1\cup\ldots\cup\pi_{n+1}$ — разбиение. Группу G назовём $(*)$-группой относительно этого разбиения, если

(а) $\pi(\chi(1))\subseteq\pi_1\cup\ldots\cup\pi_n$ для всех $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$.

(б) G содержит нильпотентную π_i-холловскую подгруппу, $i\in\overline{I, n}$.

(в) Положим $M=\{\chi(1)|\chi\in\mathrm{Irr}(G), \chi(1)>1\}$. Все числа из M делятся на $p_1\in\pi_1$. Все числа из M, не являющиеся π_1-числами, делятся на $p_2\in\pi_2\ldots$. Все числа из M, не являющиеся $\pi_1\cup\ldots\cup\pi_{n-1}$-числами, делятся на $p_n\in\pi_n$.

Скажем, что G имеет упорядоченную холловскую башню типа $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}\}$, если $\pi(G)=\pi_1\cup\ldots\cup\pi_{n+1}$-разбиение и G имеет такой ряд $G=G_0>G_1>\ldots>G_n>G_{n+1}=I$ нормальных подгрупп, что $\pi(G_i/G_{i+1})=\pi_{i+1}$ для всех $i\in\overline{0, n}$.

Следствие 2. *Если G — $(*)$-группа относительно разбиения $\pi(G)=\pi_1\cup\ldots\cup\pi_{n+1}$, то она имеет упорядоченную холловскую башню типа $\{\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}\}$, при этом её π_{n+1}-холловская подгруппа абелева.*

Доказательство. Группа G имеет нормальное π_1-дополнение G_1 по следствию 1. Если $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ и $\chi_{G_1}=e(\varphi_1+\ldots+\varphi_t)$-клиффордово разложение, то из теории Клиффорда следует, что et делит $|G: G_1|$, так что $\varphi_1(1)-\pi_1'$-часть числа $\chi(1)$. Так как каждый $\varphi\in\mathrm{Irr}(G_1)$ появляется в клиффордовом разложении некоторого неприводимого характера группы G, то из условия следует, что G_1 — $(*)$-группа относительно разбиения $\pi(G_1)=\pi_2\cup\ldots\cup\pi_{n+1}$. Теперь утверждение о существовании холловской башни для G_1 следует по индукции, и, очевидно, первое утверждение следствия доказано. Утверждение о коммутативности π_{n+1}-холловской подгруппы группы G вытекает из того факта, что степени неприводимых характеров нормального делителя — делители подходящих степеней неприводимых характеров самой группы.

Предложение 2. *Пусть $N\trianglelefteq G$, p-простой делитель $|G|$. Если p делит степени всех тех неприводимых характеров группы G, чьи ядра не содержат N, то N — p-нильпотентная подгруппа.*

Доказательство. Заменяя, если нужно, N её нормальной оболочкой, можем, не уменьшая общности, предположить, что N нормальна в G. Пусть $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. Предположим, что N не p-нильпотентна. Тогда по теореме Тейта $P\cap N\not\trianglelefteq\Phi(P)$. Пусть λ-такой линейный характер P, что $P\cap N\not\trianglelefteq\ker\lambda$ (так как $P'\trianglelefteq\Phi(P)$, такой λ существует). Если $\chi\in\mathrm{Irr}(\lambda^G)$, то $\lambda\in\mathrm{Irr}(\chi_p)$ по закону взаимности. Так как $I_p\neq\lambda$, то $P\cap N\not\trianglelefteq\ker\chi$. Тем более $N\not\trianglelefteq\ker\chi$, и поэтому p делит $\chi(1)$ по условию. Но $\lambda^G(1)=|G: P|\not\equiv 0 \pmod p$, что невозможно, так как по доказанному степени всех неприводимых компонент характера λ^G делятся на p. Полученное противоречие доказывает предложение.

Следствие 3. *Пусть N-пересечение ядер всех тех неприводимых характеров группы G, чьи степени не делятся на p. Тогда N — p-нильпотентная подгруппа.*

Завершим заметку указанием нового подхода к доказательству теоремы Рокетта. Мы для этой цели будем использовать следующую теорему Томпсона о нормальном p-дополнении (см. теорему 22.7 в [3]): Пусть p-нечётное простое число, делящее порядок группы G и $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Если для каждой неединичной характеристической подгруппы P_1 в P её нормализатор в G имеет нормальное p-дополнение, то и G имеет нормальное p-дополнение.

Теорема А. *Пусть H, $M \leqq G$, M нормальная в G; силовская p-подгруппа P из $M \cap H$ лежит в $\Phi(H)$ и является силовской p-подгруппой в M. Если $p>2$, то M имеет нормальное p-дополнение.*

Доказательство. Если $P \leqq \bar{P} \in \mathrm{Syl}_p(\Phi(H))$, то $P = \bar{P} \cap (M \cap H)$ нормальна в $M \cap H$ как пересечение двух H-допустимых подгрупп. Пусть T-существующее по теореме Шура—Цассенхауза дополнение к P в $M \cap H$; по этой же теореме все такие дополнения сопряжены в $M \cap H$. Поэтому по рассуждению Фраттини

$$H = N_H(T)\cdot(M \cap H) = N_H(T)TP = N_H(T)P \leqq N_H(T)\Phi(H),$$

откуда $N_H(T)=H$ и T нормальна в H, а тем более в $M \cap H$. Следовательно, $M \cap H = P \times T$. Мы можем, не уменьшая общности, положить $G=MH$.

Предположим, что M не имеет нормального p-дополнения. Тогда по только что цитированной теореме Томпсона в P имеется неединичная характеристическая подгруппа P_0 такая, что $N_M(P_0)$ не имеет нормального p-дополнения. Так как P нормальна в H, то и P_0 нормальна в H. Следовательно, $H \leqq N_G(P_0)$, и по модулярному закону

$$N_G(P_0) = H\cdot\big(M \cap N_G(P_0)\big) = H\cdot N_M(P_0).$$

Так как пересечения $H \cap N_M(P_0)$ и $H \cap M$ совпадают, мы можем, не уменьшая общности, предположить, что $H\cdot N_M(P_0)=G$. Тогда P_0 нормальна в G. Допустим, что $P_0 \not\leqq \Phi(G)$. Тогда G содержит такую максимальную подгруппу L, что $LP_0=G$, и поэтому по модулярному закону $H=P_0(H \cap L) \leqq \Phi(H)(H \cap L)_0$ откуда $H \cap L = H$, $P_0 \leqq H \leqq L$ и $G=P_0L=L$, противоречие. Итак, $P_0 \leqq \Phi(G)$. Мы имеем $G/P_0 = H/P_0 \cdot M/P_0$ и $H/P_0 \cap M/P_0 = (H \cap M)/P_0$, при этом силовская p-подгруппа P/P_0 пересечения $H/P_0 \cap M/P_0$ лежит в $\Phi(H/P_0)$. Предполагая, что теорема уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$, мы заключаем, что M/P_0 имеет нормальное p-дополнение R/P_0. Если R_1-p-дополнение в R, то по теореме Шура-Цассенхауза и рассуждению Фраттини

$$G = N_G(R_1)R = N_G(R_1)R_1P_0 = N_G(R_1)P_0 \leqq N_G(R_1)\Phi(G),$$

откуда $N_G(R_1)=R$ и R_1-нормальное p-дополнение в M. Теорема доказана•

Неизвестно, верна ли теорема A для $p=2$.

Следующий вариант теоремы A допускает простое доказательство (при этом предположение о p не нужно).

Теорема В. *Теорема A верна для произвольного p в случае, если M — p-разрешимая подгруппа.*

Доказательство, как и ранее, ведётся индукцией по $|G|$. Если $O_{p'}(M)>I$, то $M/O_{p'}(M)$ имеет нормальное p-дополнение $T/O_{p'}(M)$ (мы применяем индуктивное предположение к

$$G/O_{p'}(M) = HO_{p'}(M)/O_{p'}(M) \cdot M/O_{p'}(M);$$

легко проверяется, что эта факторгруппа удовлетворяет предположениям теоремы А). Тогда T-нормальное p-дополнение в M. Пусть $O_{p'}(M)=I$. Тогда $O_p(M)>I$, и, как и теореме А, $O_p(M)\leqq \Phi(G)$. Доказательство теперь завершается, как и в теореме А.

Отметим, что теоремы А, Б не являются следствиями теоремы Рокетта. Обратим также внимание на тот факт, что H в этих теоремах не обязана быть холловской подгруппой в G, а $H\cap M$ не обязана лежать в $\Phi(H)$ (и даже быть нильпотентной).

Литература

[1] I. M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, N. J., *Acad. Press*, 1976.
[2] P. Roquette, Über die Existenz von Hall-Komplementen in endlichen Gruppen, *J. Algebra* **1** (1964), 342—346.
[3] W. Feit, Characters of Finite Groups, *N. J., Benjamin*, 1967.

(Поступило 17, VII. 1987)